線形離散時間システムの正入力可制御性

吉 田 宏*

Controllability of Linear Discrete-Time
Systems with Positive Controls

Hiroshi YOSHIDA*

This short paper deals with the controllability of single input linear discrete-time systems with positive controls, and derived necessary and sufficient conditions for the system to be controllable to the zero state.

Key Words : positive controls, controllability to the zero state, constrained controls, linear discrete-time systems

1. ま え が き

システムの可制御性の概念は Kalman¹⁾ によって提起されて以来多くの研究がなされており, 制御入力に制限のある場合の可制御性は, 工学的に重要な意義を有している^{2),3)}. とくに, 制御入力が正值のみを取りうる場合の可制御性は, 振子の振れ止め制御⁴⁾, 経済システムの制御⁵⁾, 薬剤投与問題⁶⁾ などにおいて議論されており, システム制御理論において興味深い課題である. これまで, 離散時間システムの場合については, ①任意の目標状態へ移行する意味での可制御性が論じられているが⁷⁾, ②零状態へ移行する意味での可制御性については検討されていない. 一般に, ①よりも②の可制御性のほうが条件が緩くなり, レギュレータ問題では②の可制御性が必要となるため, 文献 7) の結果をそのまま適用できない. そこで本稿では, 1 入力線形離散時間システムが正入力のもとで零状態へ可制御となるための必要十分条件を導く.

2. 準 備

1 入力線形離散時間システム

$S: x(k+1) = Ax(k) + bu(k); k=0, 1, 2, \dots (1)$ を考える. ここに, $x(k) \in R^n$, $A \in R^{n \times n}$, $b \in R^n$ とし, 入力 $u(k)$ はつぎの条件 C_1 または C_2 を満足するものとする.

$$C_1: u(k) \geq 0 \quad (2)$$

$$C_2: u(k) \geq -1 \quad (3)$$

【定義 1】『(2) 式または (3) 式を満足する入力を, それぞれ C_1 入力または C_2 入力という. さらに, 任意の初期状態 $x(0)$ が与えられたとき, $x(N)=0$ となるような有限ステップ数 N および C_1 (または C_2) 入力の列 $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ が存在するとき, システム S は C_1 (または C_2) 可制御であるという.』

定義 1 から明らかに, C_1 可制御ならば C_2 可制御である. まず, (1) 式のシステム S をつぎのような二つの部分システムに分割しておく⁸⁾.

$$S_o: x_o(k+1) = A_o x_o(k) + b_o u(k) \quad (4)$$

$$S_r: x_r(k+1) = A_r x_r(k) + b_r u(k) \quad (5)$$

ただし, A_o はべき零行列, A_r は正則行列であり

$$A_o \in R^{n_o \times n_o}, \quad b_o \in R^{n_o}, \quad x_o(k) \in R^{n_o} \quad (6)$$

$$A_r \in R^{n_r \times n_r}, \quad b_r \in R^{n_r}, \quad x_r(k) \in R^{n_r} \quad (7)$$

$$A_o^\zeta = 0, \quad \det[A_r] \neq 0 \quad (8)$$

$$n = n_o + n_r \quad (9)$$

とし, ζ は $0 \leq \zeta \leq n_o$ を満足するある整数とする. このとき, つぎの定理 1 が導かれる⁹⁾.

【定理 1】『システム S が C_1 (または C_2) 可制御であるための必要十分条件は, 正則な部分システム S_r が C_1 (または C_2) 可制御であることである.』

定理 1 により, システム S の可制御性は, 部分システム S_r の可制御性に帰着できる. そこで, 固有値に注目して, システム S_r を, さらに

$$S_1: x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + b_1 u(k) \quad (10)$$

$$S_2: x_2(k+1) = A_2 x_2(k) + b_2 u(k) \quad (11)$$

に分割しておく. ただし,

$$A_1 \in R^{n_1 \times n_1}, \quad b_1 \in R^{n_1}, \quad x_1(k) \in R^{n_1} \quad (12)$$

$$A_2 \in R^{n_2 \times n_2}, \quad b_2 \in R^{n_2}, \quad x_2(k) \in R^{n_2} \quad (13)$$

$$n_r = n_1 + n_2 \quad (14)$$

* 鹿児島大学工学部 鹿児島市郡元 1-21-40

* Faculty of Engineering, Kagoshima University, Kagoshima

(Received July 22, 1991)

(Revised November 20, 1991)

$$\lambda_i(A_1) > 0; i=1, 2, \dots, n_1 \quad (15)$$

$$\lambda_i(A_2) < 0 \text{ または } \operatorname{Im}\{\lambda_i(A_2)\} \neq 0; i=1, 2, \dots, n_2 \quad (16)$$

とし、 $\lambda_i(A_j)$ は A_j ($j=1, 2$) の i 番目の固有値を表わす。

3. 可制御性の必要十分条件

文献7)より、つぎの定理2を導くことができる。

【定理2】『システム S_r が C_1 可制御であるための必要十分条件はつぎの (i), (ii) が成立することである。

$$(i) \quad n_1 = 0 \quad (17)$$

$$(ii) \quad \operatorname{rank}[b_2, A_2 b_2, \dots, A_2^{n_2-1} b_2] = n_2 \quad (18)』$$

C_2 可制御については、つぎの定理3が成立する。

【定理3】『システム S_r が C_2 可制御であるための必要十分条件はつぎの (i), (ii) が成立することである。

$$(i) \quad \operatorname{rank}[b_r, A_r b_r, \dots, A_r^{n_r-1} b_r] = n_r \quad (19)$$

$$(ii) \quad 0 < \lambda_i(A_1) \leq 1; i=1, 2, \dots, n_1 \quad (20)』$$

(証明) (必要性) (i) の必要性は、容易に導かれる。

(ii) が成立しないと仮定する。このとき、 S_1 の成分の中に次式を満たすものが存在する。

$$S_{11}: \xi(k+1) = \lambda \xi(k) + \eta u(k); \lambda > 1; \eta \neq 0 \quad (21)$$

もし、 S_{11} が C_2 可制御であるとすれば、任意の初期状態 $\xi(0)$ に対し、

$$\xi(N) = \lambda^N \xi(0) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{N-i-1} \eta u(i) = 0 \quad (22)$$

を満たす C_2 入力列 $\{u(k)\}_{k=0}^{N-1}$ が存在する。簡単のため $\eta > 0$ と仮定し、さらに $u(k) \geq -1$ に注意すれば、上式から次式が導かれる。

$$\xi(0) = -\sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{1-i} \eta u(i) \leq \sum_{i=0}^{N-1} \lambda^{1-i} \eta \leq \frac{\eta \lambda}{\lambda - 1} \quad (23)$$

右辺は一定であるから、初期状態 $\xi(0)$ が十分に大きいとき、上の不等式は成立しない。よって、 S_{11} は C_2 可制御とならない。 $\eta < 0$ の場合も同様に議論できる。したがって、 S_r は C_2 可制御とならない。ゆえに、(ii) が必要である。 (必要性の証明終)

以下、(19), (20) 式が成立するとき S_r が C_2 可制御となることを補題1～3により示そう。

$n_1 = 0$ または $n_2 = 0$ の場合の証明は容易であるから、 $n_1 \geq 1$ かつ $n_2 \geq 1$ の場合について吟味する。

文献7)よりつぎの補題1が導かれる。

【補題1】『つぎの (i), (ii) を満たすような多項式

$$f(s) = a_L s^L + \dots + a_1 s + a_0$$

$$0 < a_i \leq 1; i=0, 1, \dots, L \quad (24)$$

$$L \geq n_2 \quad (25)$$

が存在する。

$$(i) \quad f(A_2) = 0 \quad (26)$$

$$(ii) \quad \det[f(A_1)] \neq 0 \quad (27)』$$

(略証) A_2 の固有値が負または実部が負の複素数のみの場合、 A_2 の特性多項式の係数は正となる。よってその最大の係数が1となるように $f(s)$ を選べば(24)～(26)式が成立する。また(27)式は A_1 を Jordan 形式に直すことにより導かれる。実部が非負の複素固有値を含む場合には、適当な正係数の多項式因子を A_2 の特性多項式に追加すればよい⁷⁾。 (略証終)

補題1により、任意の初期状態 $x_2(0)$ が与えられたとき、 $x_2(L+1) = 0$ を満たす C_1 入力列

$$\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_L\} \quad (28)$$

が存在することが導かれる⁷⁾。

つぎに、 (n_1-1) 次の多項式

$$\beta_q(s) = \sum_{i=1}^{n_1} 2^{-i} \beta_q^i s^{i-1}; q=1, 2, \dots, Q \quad (29)$$

および $(M-1)$ 次の多項式

$$\beta_q(s)f(s) = \sum_{i=1}^M \delta_q^i s^{i-1}; q=1, 2, \dots, Q \quad (30)$$

を定義する。ただし、 Q は適当な自然数とし、

$$M = n_1 + L \quad (31)$$

$$|\beta_q^i| \leq 1; i=1, 2, \dots, n_1; q=1, 2, \dots, Q \quad (32)$$

とする。なお、 δ_q^i は次式で与えられる。

$$\delta_q^i = \sum_{p=1}^{n_1} 2^{-i} \beta_q^p a_{p-i}; p=1, 2, \dots, M; q=1, 2, \dots, Q \quad (33)$$

ただし、

$$a_i = 0; i < 0, i > L \quad (34)$$

とする。(32)～(34), (24) 式より、

$$|\delta_q^i| \leq \sum_{p=1}^{n_1} 2^{-i} |\beta_q^p| a_{p-i} \leq \sum_{i=1}^{n_1} 2^{-i} < 1 \quad (35)$$

が成立する。一方、(28) 式は C_1 入力列であるから、

$$\begin{aligned} \{u(0), u(1), \dots, u(L+MQ)\} \\ = \{\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_L, \delta_{10}^1, \dots, \delta_{10}^{n_1}, \dots, \delta_{10}^M, \dots, \delta_{10}^M\} \end{aligned} \quad (36)$$

は C_2 入力列となる。(36) 式を、(10), (11) 式のシステム S_1, S_2 に加えると、次式が導かれる。

$$\begin{aligned} x_1(L+1) &= A_1^{L+1} x_1(0) + \sum_{k=0}^L A_1^{L-k} b_1 \varepsilon_k \\ x_1(L+1+qM) &= A_1^M x_1(L+1+(q-1)M) \\ &\quad + \sum_{p=1}^M A_1^{p-1} b_1 \delta_q^p; q=1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (37)$$

ここで、(30) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned} x_1(L+1+qM) &= A_1^M x_1(L+1+(q-1)M) \\ &\quad + \beta_q(A_1) f(A_1) b_1; q=1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (39)$$

同様にして、次式を得る。

$$\begin{aligned} x_2(L+1+qM) &= A_2^M x_2(L+1+(q-1)M) \\ &\quad + \beta_q(A_2) f(A_2) b_2; q=1, 2, \dots, Q \end{aligned} \quad (40)$$

補題 1 より $f(A_2)=0$ であり, さらに $x_2(L+1)=0$ であるから, (40)式より次式が得られる.

$$x_2(L+1+qM)=0; q=1, 2, \dots, Q \quad (41)$$

さて, (27)式より $f(A_1)$ は正則であるから, 新しい状態変数

$$x^*(k)=f(A_1)^{-1}x_1(L+1+kM); k=0, 1, \dots, Q \quad (42)$$

を定義することができる. ここで, $A_1^M, \beta_k(A_1)$ および $f(A_1)^{-1}$ は互いに積の順序を入れ替えることができるから, (39)式より次式が導かれる.

$$\begin{aligned} x^*(k+1) &= A_1^M x^*(k) + \beta_{k+1}(A_1) b_1 \\ &= A_1^M x^*(k) + \sum_{i=1}^{n_1} 2^{-i} A_1^{i-1} b_1 \beta_i^{k+1} \end{aligned} \quad (43)$$

上式は, つぎのような多入力システム S^*

$$\begin{aligned} S^*: x^*(k+1) &= A^* x^*(k) + B^* u^*(k); \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (44)$$

ただし,

$$A^* = A_1^M \quad (45)$$

$$B^* = [2^{-1} b_1, 2^{-2} A_1 b_1, \dots, 2^{-n_1} A_1^{n_1-1} b_1] \quad (46)$$

$$u^*(k) = [u_1^*(k), \dots, u_{n_1}^*(k)]^T \quad (47)$$

において, とくに入力を

$$u_i^*(k) = \beta_i^{k+1}; i=1, 2, \dots, n_1; k=0, 1, 2, \dots \quad (48)$$

と選んだ場合とみなすことができる.

このとき文献 2) より, つぎの補題 2 が導かれる.

[補題 2] 『(44)式のシステム S^* において, 任意の初期状態 $x^*(0)$ が与えられたとき,

$$|u_i^*(k)| \leq 1; i=1, 2, \dots, n_1 \quad (49)$$

のもとで $x^*(Q)=0$ となるような有限ステップ数 Q および入力の列 $\{u^*(k)\}_{k=0}^{Q-1}$ が求められる.』

これより, つぎの補題 3 を得る.

[補題 3] 『システム S_r において, 任意の初期状態 $x_1(0)$ および $x_2(0)$ が与えられたとき, 以下の手順 1~5 により, (36)式を求めるものとする.

1. (28)式より $\{\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_L\}$ を求める.
2. (37)式より $x_1(L+1)$ を求め, さらに $x^*(0)=f(A_1)^{-1}x_1(L+1)$ より $x^*(0)$ を求める.
3. 補題 2 より $\{u^*(k)\}_{k=0}^{Q-1}$ を求める.
4. $\beta_i^q = u_i^*(q-1); i=1, 2, \dots, n_1; q=1, 2, \dots, Q$ (50)

により β_i^q を求める.

5. (33)式より $\{\delta_k^0, \dots, \delta_1^1, \dots, \delta_k^0, \dots, \delta_1^0\}$ を求める.

このとき, (36)式の C_2 入力の列を, システム S_1 および S_2 に加えると次式が成立する.

$$x_1(L+1+QM)=0 \text{ かつ } x_2(L+1+QM)=0 \quad (52)』$$

(証明) まず, (41)式より $x_2(L+1+QM)=0$ となる. また, システム S_1 に (36)式の C_2 入力を加えると, 補題 2 により $x^*(Q)=0$ となる. すると, (42)式により $x_1(L+1+QM)=0$ となる. (証明終)

補題 3 により, 定理 3 の十分性が証明された.

4. 数 値 例

システム S_r において

$$A_r = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad b_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (53)$$

のとき,

$$n_r=2, \quad n_1=1, \quad n_2=1 \quad (54)$$

$$A_1=0.5, \quad b_1=1, \quad \lambda_1(A_1)=0.5 \quad (55)$$

$$A_2=-2, \quad b_2=1, \quad \lambda_1(A_2)=-2 \quad (56)$$

となり, 定理 2 の条件 (i) を満たさないから S_r は C_1 可制御ではない. しかし, 定理 3 の条件 (i), (ii) を満たすから C_2 可制御である.

5. 結 び

一般に係数行列が非正則である場合も含めて, 1 入力線形離散時間システムが正入力のもとで零状態へ可制御となるための必要十分条件を与えた. 今後, 多入力システムの場合に拡張して行きたい.

参 考 文 献

- 1) R. E. Kalman, et al.: Controllability of Linear Dynamical Systems, Contributions to J. Differential Equations, 1, 189/213 (1962)
- 2) J. Wing and C. A. Desoer: The Multiple-Input Minimal Time Regulator Problem (General Theory), IEEE Trans. Automatic Control, AC-8-2, 125/136 (1963)
- 3) 児玉慎三: 入力や状態に制限のあるサンプリングシステムの controllability, 電気通信学会誌, 48-5, 884/891 (1965)
- 4) S. H. Saperstone and J. A. Yorke: Controllability of Linear Oscillatory Systems Using Positive Controls, SIAM J. Control, 9-2, 253/262 (1971)
- 5) S. H. Saperstone: Global Controllability of Linear Systems with Positive Controls, SIAM J. Control, 11-3, 417/423 (1973)
- 6) 楠岡, 前田, 児玉: 非負入力制限をもつコンパートメントシステムの可到達性について, 電子通信学会論文誌, J63-A-2, 67/73 (1980)
- 7) M. E. Evance and D. N. P. Murthy: Controllability of Discrete-Time Systems with Positive Controls, IEEE Trans., AC-22-6, 942/945 (1977)