操作器の選択を伴う LQ 問題の組合せ的性質を解消するための十分条件†

桑 原 正 典*

A Sufficient Condition to Dissolve the Combinatorial Property for LQ Problem
with Actuator Selections

Masanori KUWAHARA*

The improvement of a control performance can be expected by actuator selections. However, for the combinatorial property of the optimal control problem with actuator selections, it is difficult to solve the problem. We study a sufficient condition to dissolve the combinatorial property.

Key Words: control performance, actuator selection, combinatorial property, optimal control

1. ま え が き

各制御段で操作器を選択すると、制御性能が向上することがあるが¹⁾、組合せ的性質が生じ²⁾、問題の解決が難しくなる。LQ 問題の繰返し解は操作器に関する複雑な非線形関数であるので、各制御段での操作器選択による影響が把握しにくく、この性質の解消を難しくしている。組合せ的性質は繰返し解のリターン行列より発生する。リターン行列は現段(現制御段)の操作器要素と次段(次制御段)以降の要素の和の逆行列より構成されている。このため両要素の分離が難しい。両要素を分離できれば、制御段ごとに操作器選択の影響を把握でき、組合せ的性質の解消に寄与する。2 次元対称行列は逆行列をもとの行列で表現することができる。この性質を利用して、2 次元系における、組合せ的性質解消条件を導出する。

2. 問題の記述

システム方程式が

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k) \quad (1)$$

で表わされ、制御評価関数が

$$J(N) = \sum_{j=1}^N \{ \mathbf{x}(j)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(j) + h(j-1) \mathbf{u}(j-1)^2 \} \quad (2)$$

で表わされる操作器の選択を伴う LQ 問題を考える。ここで、 $\mathbf{A} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ 、 $\mathbf{Q} = \text{diag}(q_1, q_2)$ 、 $\mathbf{B}(k) \in R^{2 \times 1}$ 、 $\mathbf{x}(k) \in R^{2 \times 1}$ 、 $\mathbf{u}(k) \in R^{1 \times 1}$ 、 $h(k) \in R^{1 \times 1}$ である。 $\mathbf{x}(k)$ 、 $\mathbf{u}(k)$ はそれぞれ状態値ベクトル、操作量ベクトルを表わ

す。 $\mathbf{Q}$ は正定値対称行列であり、 $h(k) > 0$ である。 $\mathbf{B}(k)$ は操作器を表わし、集合 $\{\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^s\}$ より各制御段において唯一選ばれる。 $h(k)$ は集合 $\{h^1, \dots, h^s\}$ より $\mathbf{B}(k)$ に依存して選ばれる。ある段で $\mathbf{B}^j$ が選ばれると、その段で h^j が選ばれる。 $\mathbf{B}^1, h^1$ などの上付添字は与えられた操作器の種類を示す。 $\mathbf{x}(k)^T$ などの T は行列の転置を示す。操作器の選択を伴う LQ 問題は、(1) 式で示される系において、(2) 式を最小にするような最適操作器列 $\{\mathbf{B}(k)\}$ 、それらに対応する最適操作量列 $\{\mathbf{u}(k)\}$ 、およびそれらにより定められる最適状態値列 $\{\mathbf{x}(k)\}$ を求めることである。

操作器列 $\{\mathbf{B}(k)\}$ が与えられると、この問題の最適解 $\mathbf{u}(k)^*$ 、最適評価値 $\min_{\mathbf{u}(0) \dots \mathbf{u}(N-1)} J(N)$ は

$$\min_{\mathbf{u}(0) \dots \mathbf{u}(N-1)} J(N) = \mathbf{x}(0)^T \mathbf{M}(0) \mathbf{x}(0) \quad (3)$$

$$\mathbf{u}(k)^* = -\{ \mathbf{B}(k)^T \mathbf{w}(k+1) \mathbf{B}(k) + h(k) \}^{-1} \mathbf{B}(k)^T \mathbf{w}(k+1) \mathbf{A} \mathbf{x}(k) \quad (4)$$

となる。ただし、

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{A}^T \{ \mathbf{w}(k+1)^{-1} + \mathbf{B}(k) h(k)^{-1} \mathbf{B}(k)^T \}^{-1} \mathbf{A} \quad (5)$$

$$\mathbf{w}(k) = \mathbf{M}(k) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{w}(N) = \mathbf{Q} \quad (6)$$

($k=1, \dots, N-1$) である。ここで、 N は制御段数である。

3. 組合せ的性質を解消するための条件

(3) 式より最適評価値は $\mathbf{x}(0)^T \mathbf{M}(0) \mathbf{x}(0)$ で表わされ、 $\mathbf{M}(0)$ は (5)、(6) 式より得られるので、組合せ的性質を解消するためには $\mathbf{M}(k)$ 行列の性質を調べる事が重要である。

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(k+1) &\triangleq \mathbf{R}(k+1)^{-1} \\ &= \{ \mathbf{w}(k+1)^{-1} + \mathbf{B}(k) h(k)^{-1} \mathbf{B}(k)^T \}^{-1} \end{aligned} \quad (7)$$

† 第 35 回システム制御情報学会研究発表講演会で発表 (1991・5)

* 熊本工業大学 熊本市池田 4-22-1

* Kumamoto Institute of Technology, Kumamoto
(Received September 24, 1991)

(Revised January 16, 1992)

とおくと、

$$M(k) = A^T a(k+1)A \quad (8)$$

となる。対称行列 $P \in R^{2 \times 2}$ に対してつぎの関係が成立する。

《補助定理 1》

$P \in R^{2 \times 2}$ が対称行列のとき

$$P^{-1} = ePe^T / \det P \quad (9)$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

が成立する。□

(証明) 省略。

この関係を利用するとつぎの定理が得られる。

《補助定理 2》

$$h(k)^{-1}B(k)^T w(k+1)B(k) \ll 1 \quad (10)$$

のとき

$$\det R(k+1) = \frac{1}{\det w(k+1)} \quad (11)$$

が成立する。□

(証明) 付録参照。

補助定理 2 よりつぎの定理が得られる。

《定理 1》

$$h(k)^{-1}B(k)^T w(k+1)B(k) \ll 1 \quad (12)$$

のとき

$$\begin{aligned} M(k) = & \det w(k+1)A^T ew(k+1)^{-1}e^T A \\ & + \det w(k+1)A^T eB(k)h(k)^{-1}B(k)^T e^T A \end{aligned} \quad (13)$$

が成立する。□

(証明) 補助定理 2 より明らかである。

補助定理 2 と定理 1 よりつぎの定理が成立する。

《定理 2》

$$h(i)^{-1}B(i)^T w(i+1)B(i) \ll 1 \quad (14)$$

($i=k, k+1$) のとき

$$\begin{aligned} w(k+1)^{-1} = & \frac{\det w(k+2)}{\det w(k+1)} eA^T ew(k+2)^{-1}e^T Ae^T \\ & + \frac{\det w(k+2)}{\det w(k+1)} eA^T eB(k+1)h(k) \\ & + 1^{-1}B(k+1)^T e^T Ae^T \\ & + \frac{1}{\det w(k+1)} eQe^T \end{aligned} \quad (15)$$

となる。

(証明) 付録参照。

定理 1 より

$$\begin{aligned} x(0)^T M(0)x(0) = & \det w(1)x(0)^T A^T ew(1)^{-1}e^T Ax(0) \\ & + \det w(1)x(0)^T A^T eB(0) \\ & \times h(0)^{-1}B(0)^T e^T Ax(0) \end{aligned} \quad (16)$$

となる。定理 2 より (16) 式の第 1 項は

$$\det w(1)x(0)^T A^T ew(1)^{-1}e^T Ax(0)$$

$$\begin{aligned} = & \det w(2)x(0)^T (A^2)^T ew(2)^{-1}e^T A^2 x(0) \\ & + \det w(2)x(0)^T (A^2)^T eB(1) \\ & \times h(1)^{-1}B(1)^T e^T A^2 x(0) \\ & + x(0)^T A^T QAx(0) \end{aligned} \quad (17)$$

となる。(16)式は $w(1)^{-1}$ を含む項と $B(0)$ を含む項の和より構成され、 $\det w(1) > 0$ であるので、 $B(0)$ の決定が $w(1)^{-1}$ の決定に影響を及ぼさない。(17)式も、 $w(2)^{-1}$ と $B(1)$ に関して同様の形をしているので、 $B(1)$ の決定が $w(2)^{-1}$ の決定に影響を及ぼさない。(16)、(17)式の関係繰返し用いることにより、操作器を初段より Forward に決定することができ、組合せ的性質が解消される。以上の議論により、(14)式が組合せ的性質が解消されるための十分条件を与えることが明らかになった。

4. あとがき

組合せ的性質を解消させるための条件について考察した。2 次元対称行列の逆行列はもとの行列で表現可能である。この性質を利用して 2 次元系に関して、組合せ的性質を解消させるための十分条件を導出した。今後の問題として、本条件の 3 次元以上の系への拡張や条件の緩和などが考えられる。

参考文献

- 1) 桑原正典：操作器の選択を伴う LQ 問題における最適操作器決定条件，電気学会論文誌 C，106-3，41/47 (1986)
- 2) Y. Vanbeveren and M. R. Gevers: On Optimal and Suboptimal Actuator Selection Strategies, IEEE Trans. Automatic Control, AC-21-3, 382/385 (1976)

《付 録》

(補助定理 2 の証明)

$$B(k) = [b_1(k) \ b_2(k)]^T \quad (A.1)$$

$$w(k)^{-1} = \begin{bmatrix} w_{11}(k)^{-1} & w_{12}(k)^{-1} \\ w_{12}(k)^{-1} & w_{22}(k)^{-1} \end{bmatrix} \quad (A.2)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \det R(k+1) = & \det w(k+1)^{-1} \\ & + h(k)^{-1}w_{22}(k+1)^{-1}b_1(k)^2 \\ & + h(k)^{-1}w_{11}(k+1)^{-1}b_2(k)^2 \\ & - 2h(k)^{-1}w_{12}(k+1)^{-1}b_1(k)b_2(k) \end{aligned} \quad (A.3)$$

となる。また、

$$\begin{aligned} h(k)^{-1}B(k)^T ew(k+1)^{-1}e^T B(k) = & h(k)^{-1}w_{22}(k+1)^{-1}b_1(k)^2 \\ & + h(k)^{-1}w_{11}(k+1)^{-1}b_2(k)^2 \\ & - 2h(k)^{-1}w_{12}(k+1)^{-1}b_1(k)b_2(k) \end{aligned} \quad (A.4)$$

である。したがって

$$\det \mathbf{R}(k+1) = \det \mathbf{w}(k+1)^{-1} + h(k)^{-1} \mathbf{B}(k)^T \mathbf{e} \mathbf{w}(k+1)^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{B}(k) \quad (\text{A.5})$$

となる。補助定理 1 より

$$\det \mathbf{R}(k+1) = \{1 + h(k)^{-1} \mathbf{B}(k)^T \mathbf{w}(k+1) \mathbf{B}(k)\} / \det \mathbf{w}(k+1) \quad (\text{A.6})$$

となる。したがって、 $h(k)^{-1} \mathbf{B}(k)^T \mathbf{w}(k+1) \mathbf{B}(k) \ll 1$ のとき (11) 式が成立する

(定理 2 の証明)

補助定理 1 より

$$\mathbf{w}(k+1)^{-1} = \mathbf{e} \mathbf{w}(k+1) \mathbf{e}^T / \det \mathbf{w}(k+1) \quad (\text{A.7})$$

となる。(14) 式と定理 1 より

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(k+1) = & \det \mathbf{w}(k+2) \mathbf{A}^T \mathbf{e} \mathbf{w}(k+2)^{-1} \mathbf{e}^T \mathbf{A} \\ & + \det \mathbf{w}(k+2) \mathbf{A}^T \mathbf{e} \mathbf{B}(k+1) h(k+1)^{-1} \mathbf{B}(k+1)^T \mathbf{e}^T \mathbf{A} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。(6), (A.7), (A.8) 式より (15) 式が得られる。

(証明終)