多入力デッドビート LQ 最適制御

——多入力終端状態固定条件付離散時間最適レギュレータ——

近 藤 英 二*・清 田 高 徳*・須 永 照 雄*

Multi-Input Deadbeat Linear-Quadratic Optimal Control

—— Multi-Input Discrete-Time Optimal Regulator
with the Fixed Terminal State Condition ——

Eiji KONDO*, Takanori KIYOTA* and Teruo SUNAGA*

This paper discusses the optimal regulator problem for the multi-input linear time-invariant discrete-time system with the zero terminal state. By using the general form of the inputs which satisfy the zero terminal state condition, the system is transformed into the new time-variant system with the time-variant structure of the new input. The performance index is transformed into the sum of the quadratic forms of the new state vectors and the new input vectors with the cross terms, and the new terminal state is free. The optimal inputs are given by the variable gain state feedback in the first phase, by linear combinations of the constant gain state feedback and the variable gain state feedback in the second phase, and by the constant gain state feedback in the third phase. The variable gains are obtained by using the nonstationary Riccati equation. All gains are independent of the initial state of the system.

Key Words: control theory, discrete-time system, optimal control, fixed terminal state, linear-quadratic

1. ま え が き

最適制御問題は、終端状態が自由か固定されるかにより、自由終端問題と固定終端問題とに大別される。これらの最適制御問題は、一般に数値的に解かれ、最適制御はオープンループ形式で表現される¹⁾。しかし、自由終端状態のもとで2次形式評価関数を最小化する線形最適レギュレータ問題に対しては、最適制御は有界なゲインをもつ状態フィードバックにより実現できる。このため、終端状態が自由な最適レギュレータ理論は有効な理論とされている。ところが、レギュレータにおいては有限の時間で状態を0にすることが望ましいので、終端状態固定条件付最適レギュレータ理論を確立することは重要である。しかし、終端状態固定条件付最適レギュレータ問題を一般的に解いて、有界なゲインをもつ状態フィードバック則を求めることは難しいこととされていた²⁾。著

者らは、1入力線形定常離散時間系において、2次形式評価関数を最小化する終端状態固定条件付離散時間最適レギュレータ問題に対し、終端状態を0にする入力(デッドビート入力)の一般形を用いる解法³⁾と、2点境界値問題を直接解く解法⁴⁾を示した。しかし、多入力線形定常離散時間系に対しては、その解法はまだ求められていない。なお、離散時間系で表現されるデジタル制御系では、一定ゲインの状態フィードバックにより終端状態を0にする状態デッドビート制御^{5),6)}があるが、終端状態固定条件付離散時間最適レギュレータは、状態デッドビート制御の拡張と考えることができるので、これをデッドビート LQ 最適制御と呼ぶことにする³⁾。

本論文では、多入力線形定常離散時間系の終端状態固定条件付最適レギュレータ問題、すなわちデッドビート LQ 最適制御問題について述べる。この最適化問題に直接ラグランジュの未定乗数法を適用すると、最適解は両端の状態が固定される2点境界値問題の解となり、この問題を一般的に解いてフィードバック形式の最適解を求めることは難しい²⁾。そこで、最小エネルギー制御⁷⁾と同様に、終端状態が0になる入力(デッドビート入力)の

* 九州大学工学部 福岡市東区箱崎 6-10-1

* Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka
(Received June 14, 1990)
(Revised August 29, 1991)

一般形が満足すべきデッドビート原理⁸⁾を用いてこの問題を変換し、新しい終端状態が拘束されない特別な LQ 問題を誘導する。デッドビート原理と誘導された LQ 問題より、有界なゲインをもつ最適状態フィードバック則と、2次形式評価関数の最小値を求める。最後に、例題を示す。

2. 問題の設定

制御対象として、次の可到達な多入力線形定常離散時間系を考える。

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{x}(t)$ は $n \times 1$ 状態ベクトル、 $\mathbf{u}(t)$ は $m \times 1$ 入力ベクトル、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ はそれぞれ $n \times n$ と $n \times m$ の定数行列とし、 t は零または正の整数とする。なお、 $\mathbf{B}$ は最大階数 m をもつと仮定する。

このとき、終端時刻 τ において、レギュレータ問題の終端状態固定条件 (状態デッドビート条件)

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{0} \quad (2)$$

を付加する。そして、この条件のもとで、2次形式評価関数

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{\tau-1} [\mathbf{x}(t)' \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)' \mathbf{R} \mathbf{u}(t)] \quad (3)$$

を最小化するデッドビート LQ 最適制御問題を考える。

ここで、 $'$ は転置を表わし、重み行列 $\mathbf{Q}$ は $n \times n$ 半正定対称行列、 $\mathbf{R}$ は $m \times m$ 正定対称行列とする。

3. デッドビート入力

ここでは、デッドビート入力の一般形について要約する⁹⁾。なお、表現を簡単化するために、つぎの Luenberger の可到達正準形を用いる。

[補題] 可到達性と $\mathbf{B}$ が最大階数 m をもつという仮定より、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ が与えられると、可到達指数の族と呼ばれる m 個の正の整数が一意的に定まる。この不変量を順序付けして

$$n_1 + \cdots + n_m = n \quad (4)$$

$$n \geq n_1 \geq \cdots \geq n_m \geq 1 \quad (5)$$

とする。なお、 n_1 を最大可到達指数と呼ぶ。さらに、制御対象(1)式は、適当な座標変換

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S}_1 \bar{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t) = \mathbf{S}_2 \bar{\mathbf{u}}(t) \quad (6)$$

により、つぎの Luenberger の可到達正準形に変換することができる。

$$\bar{\mathbf{x}}(t+1) = (\mathbf{J}_0 + \mathbf{E}\mathbf{A}^*) \bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{E}\bar{\mathbf{u}}(t) \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{J}_0$ は m 個の $n_i \times n_i$ ベキ零ジョルダン細胞を左上から n_i の大きさの順に並べた $n \times n$ ベキ零ジョルダン行列である。また、 $\mathbf{E}$ は第 $(n_1 + \cdots + n_i, i)$ 成分 ($i=1, \dots, m$) のみが1で、他は0なる $n \times m$ 行列である。さ

らに、 $\mathbf{A}^*$ は $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{S}_1$ および $\mathbf{S}_2$ が与えられれば定まる $m \times n$ 定数行列である。

ところで、最大可到達指数は n_1 なので、終端状態固定条件(2)式が成立するためには、終端時刻 τ は、

$$\tau \geq n_1 \quad (8)$$

でなければならない^{5),6)}。そこで、終端時刻 τ を

$$\tau = n_1 + q \quad (q \text{ は } 0 \text{ または正の整数}) \quad (9)$$

とおくと、つぎの原理が成立する。

[デッドビート原理]⁹⁾ 任意の初期状態 $\bar{\mathbf{x}}(0)$ に対し、終端状態固定条件 (状態デッドビート条件)

$$\bar{\mathbf{x}}(n_1 + q) = \mathbf{0} \quad (10)$$

を満足するデッドビート入力 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ の一般形は、つぎの [1] ~ [3] と等価でなければならない。

[1] $0 \leq t \leq q-1$ のとき

$\bar{\mathbf{u}}(t)$ は任意。

[2] $q \leq t \leq n_1 - n_m + q - 1$ のとき

$\bar{\mathbf{u}}(t)$ の第 i 成分 $\bar{u}_i(t)$ は

$$\bar{u}_i(t) = \begin{cases} -\mathbf{e}_m(i) \mathbf{A}^* \bar{\mathbf{x}}(t) & (n_i \geq n_1 + q - t) \\ \text{任意} & (n_i \leq n_1 + q - t - 1) \end{cases} \quad (11)$$

となる。ここで、 $\mathbf{e}_m(i)$ は第 i 成分のみが1で他は0なる $1 \times m$ 単位ベクトルである。

[3] $n_1 - n_m + q \leq t \leq n_1 + q - 1$ のとき

$$\bar{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{A}^* \bar{\mathbf{x}}(t) \quad (12)$$

なお、 $q=0$ のときは、[1] の場合は存在しない。

すなわち、デッドビート入力 $\bar{\mathbf{u}}(t)$ の一般形は、一般に三つの相にわかれ、第一相 ($t=0, \dots, q-1$) では $\bar{\mathbf{u}}(t)$ はすべて任意入力、第二相 ($t=q, \dots, n_1 - n_m + q - 1$) では $\bar{\mathbf{u}}(t)$ のある成分は一定ゲインの状態フィードバック、他の成分は任意、第三相 ($t=n_1 - n_m + q, \dots, n_1 + q - 1$) では $\bar{\mathbf{u}}(t)$ は一定ゲインの状態フィードバックで表現できる。

よって、[デッドビート原理]を用いれば、終端状態固定条件(2)式を除くことができる。

4. デッドビート LQ 最適制御

Luenberger の可到達正準形を用いて、評価関数(3)式を変換すると、

$$J(n_1 + q) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{n_1+q-1} [\bar{\mathbf{x}}(t)' \bar{\mathbf{Q}} \bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{u}}(t)' \bar{\mathbf{R}} \bar{\mathbf{u}}(t)] \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{S}_1' \mathbf{Q} \mathbf{S}_1 \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{S}_2' \mathbf{R} \mathbf{S}_2 \quad (15)$$

となる。明らかに、 $\bar{\mathbf{Q}}$ は $n \times n$ 半正定対称行列、 $\bar{\mathbf{R}}$ は $m \times m$ 正定対称行列である。さらに、評価関数の加法性より、[デッドビート原理]の三つの相に対応して $J(n_1 + q)$

をつぎのように分割する.

$$J(n_1+q)=J_1(n_1+q)+J_2(n_1+q)+J_3(n_1+q) \quad (16)$$

$$J_1(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{q-1}[\bar{x}(t)' \bar{Q} \bar{x}(t)+\bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad (17)$$

$$J_2(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=q}^{n_1-n_m+q-1}[\bar{x}(t)' \bar{Q} \bar{x}(t)+\bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad (18)$$

$$J_3(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=n_1-n_m+q}^{n_1+q-1}[\bar{x}(t)' \bar{Q} \bar{x}(t)+\bar{u}(t)' \bar{R} \bar{u}(t)] \quad (19)$$

簡単のため,

$$n_1-n_m+q-1=p \quad (20)$$

において, 各相にわけて考える.

[1] 第三相 ($t=p+1, \dots, n_1+q-1$)

(12)式を(7)式に代入すると

$$\bar{x}(t+1)=J_0 \bar{x}(t) \quad (21)$$

となるので,

$$\bar{x}(t)=J_0^{t-p-1} \bar{x}(p+1) \quad (22)$$

$$\bar{u}(t)=-A^* J_0^{t-p-1} \bar{x}(p+1) \quad (23)$$

を得る. よって, $J_3(n_1+q)$ は

$$J_3(n_1+q)=\frac{1}{2} \bar{x}(p+1)' \bar{Q}_3 \bar{x}(p+1) \quad (24)$$

$$\bar{Q}_3=\sum_{t=p+1}^{n_1+q-1}(J_0^{t-p-1})' [\bar{Q}+(A^*)' \bar{R} A^*] J_0^{t-p-1} \quad (25)$$

となる. 明らかに, $\bar{Q}_3$ は $n \times n$ 半正定対称行列である.

[2] 第二相 ($t=q, \dots, p$)

(11)式の任意成分の数を m_t とすると, (11)式は

$$\bar{u}(t)=F(t) \bar{x}(t)+W_t(t) \bar{v}_t(t) \quad (26)$$

$$F(t)=-\begin{bmatrix} e_m(1) \\ \vdots \\ e_m(m-m_t) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} A^* \quad (27)$$

$$W_t(t)=\begin{bmatrix} e_m(m-m_t+1)' \\ \vdots \\ e_m(m) \end{bmatrix} \quad (28)$$

となる. ここで, $F(t)$ は $m \times n$ 行列, $W_t(t)$ は $m \times m_t$ 行列, $\bar{v}_t(t)$ は $m_t \times 1$ 任意入力である. さらに, $\bar{v}_t(t)$ と $W_t(t)$ の次元は時変となり,

$$\text{rank } W_t(t)=m_t \quad (\text{列最大階数}) \quad (29)$$

となる. (26)式を(7)式に代入すると, 制御対象は

$$\bar{x}(t+1)=\bar{A}(t) \bar{x}(t)+\bar{B}_t(t) \bar{v}_t(t) \quad (30)$$

となる. ここで, $n \times n$ 行列 $\bar{A}(t)$ と $n \times m_t$ 行列 $\bar{B}_t(t)$ は, それぞれ

$$\bar{A}(t)=J_0+E[A^*+F(t)] \quad (31)$$

$$\bar{B}_t(t)=E W_t(t) \quad (32)$$

である. さらに, 評価関数は

$$J_2(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=q}^p[\bar{x}(t)' \bar{Q}(t) \bar{x}(t)+2\bar{x}(t)' \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t)+\bar{v}_t(t)' \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t)] \quad (33)$$

となる. ここで, 重み行列はそれぞれ

$$\bar{Q}(t)=\bar{Q}+F(t)' \bar{R} F(t) \quad (34)$$

$$\bar{S}_t(t)=F(t)' \bar{R} W_t(t) \quad (35)$$

$$\bar{R}_t(t)=W_t(t)' \bar{R} W_t(t) \quad (36)$$

である. 明らかに, $\bar{Q}(t)$ は $n \times n$ 半正定対称行列, $\bar{S}_t(t)$ は $n \times m_t$ 行列であり, (28)式より $\bar{R}_t(t)$ は $m_t \times m_t$ 正定対称行列である.

[3] 第一相 ($t=0, \dots, q-1$)

入力はすべて任意 ($m_t=m$) であるが, 統一的に表現するために, 第二相と同様な表現を用いる. すなわち, (26)式において

$$F(t)=0, W_t(t)=I_m, \bar{v}_t(t)=\bar{u}(t) \quad (37)$$

とおき, 新しい制御対象(30)式において

$$\bar{A}(t)=J_0+E A^*, \bar{B}_t(t)=E \quad (38)$$

とおく. また, 評価関数は,

$$J_1(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{q-1}[\bar{x}(t)' \bar{Q}(t) \bar{x}(t)+2\bar{x}(t)' \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t)+\bar{v}_t(t)' \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t)] \quad (39)$$

$$\bar{Q}(t)=\bar{Q}, \bar{S}_t(t)=0, \bar{R}_t(t)=\bar{R} \quad (40)$$

となる.

以上をまとめると, 新しい制御対象は, $t=0, \dots, p$ において

$$\bar{x}(t+1)=\bar{A}(t) \bar{x}(t)+\bar{B}_t(t) \bar{v}_t(t) \quad (41)$$

となり, 新しい評価関数は

$$J(n_1+q)=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^p[\bar{x}(t)' \bar{Q}(t) \bar{x}(t)+2\bar{x}(t)' \bar{S}_t(t) \bar{v}_t(t)+\bar{v}_t(t)' \bar{R}_t(t) \bar{v}_t(t)]+\frac{1}{2} \bar{x}(p+1)' \bar{Q}_3 \bar{x}(p+1) \quad (42)$$

となる. ただし, 第一相では(37), (38), (40)式, 第二相では(31), (32), (34)~(36)式である. すなわち, 定常系の終端状態固定の LQ 最適制御問題から, 新しい終端状態 $\bar{x}(p+1)$ が自由な LQ 最適制御問題が誘導された. この誘導された LQ 問題では, 制御対象は入力の構造が変化する時変系となり, 評価関数は重み行列が時変で相乗項を含む 2 次形式評価関数となる.

この誘導された LQ 問題は入力の次元が時変であるが, 入力の次元が一定な場合⁹⁾と同様に, ラグランジュの未定乗数法とリカッチ変換を用いて解くことができる. まず, $p+1$ 個の $n \times 1$ 未定乗数ベクトル $\bar{\lambda}(t)$ ($t=1, \dots, p+1$) を用いると, ラグランジュ関数 $\bar{L}$ は

$$\bar{L} = J(n_1 + q) + \sum_{i=0}^p \bar{\lambda}(t+1)' \cdot [\bar{A}(t)\bar{x}(t) + \bar{B}_i(t)\bar{v}_i(t) - \bar{x}(t+1)] \quad (43)$$

となる。\$\bar{L}\$ を \$\bar{x}(t)\$ および \$\bar{v}_i(t)\$ で偏微分して 0 とおくと、それぞれ

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{Q}(t)\bar{x}(t) + \bar{A}(t)'\bar{\lambda}(t+1) + \bar{S}_i(t)\bar{v}_i(t) \quad (1 \leq t \leq p) \quad (44)$$

$$\bar{R}_i(t)\bar{v}_i(t) + \bar{S}_i(t)'\bar{x}(t) + \bar{B}_i(t)'\bar{\lambda}(t+1) = 0 \quad (0 \leq t \leq p) \quad (45)$$

を得る。(36), (40)式より \$\bar{R}_i(t)\$ は正則であるから, (45)式より \$\bar{v}_i(t)\$ は

$$\bar{v}_i(t) = -\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{S}_i(t)'\bar{x}(t) - \bar{R}_i(t)^{-1}\bar{B}_i(t)'\bar{\lambda}(t+1) \quad (0 \leq t \leq p) \quad (46)$$

となる。さらに, \$\bar{L}\$ を新しい終端状態 \$\bar{x}(p+1)\$ で偏微分して 0 とおくと, 新しい終端条件

$$\bar{\lambda}(p+1) = \bar{Q}_3\bar{x}(p+1) \quad (47)$$

を得る。ここで, 簡単のため

$$\bar{Q}_0(t) = \bar{Q}(t) - \bar{S}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{S}_i(t)' \quad (48)$$

$$\bar{A}_0(t) = \bar{A}(t) - \bar{B}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{S}_i(t)' \quad (49)$$

とおくと, (46)式より (44)式は

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{Q}_0(t)\bar{x}(t) + \bar{A}_0(t)'\bar{\lambda}(t+1) \quad (50)$$

となり, (41)式は

$$\bar{x}(t+1) = \bar{A}_0(t)\bar{x}(t) - \bar{B}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{B}_i(t)'\bar{\lambda}(t+1) \quad (51)$$

となる。すなわち, 誘導された LQ 問題は, 境界条件 \$\bar{x}(0)\$ と \$\bar{\lambda}(p+1)\$ のもとで

$$\begin{bmatrix} I_n & \bar{B}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{B}_i(t)' \\ 0 & \bar{A}_0(t)' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t+1) \\ \bar{\lambda}(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0(t) & 0 \\ -\bar{Q}_0(t) & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{\lambda}(t) \end{bmatrix} \quad (52)$$

を解く 2 点境界値問題に変換される。そこで, ある \$n \times n\$ 対称行列 \$\bar{P}(t)\$ を用いてリカッチ変換

$$\bar{\lambda}(t) = \bar{P}(t)\bar{x}(t) \quad (53)$$

を行う。このとき, (51)式は

$$[I_n + \bar{B}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)]\bar{x}(t+1) = \bar{A}_0(t)\bar{x}(t) \quad (54)$$

となる。ここで, \$\bar{P}(t+1)\$ が半正定と仮定すると, \$I_n + \bar{B}_i(t)\bar{R}_i(t)^{-1}\bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\$ は正則となり, 逆行列の補題を用いると, \$\bar{x}(t+1)\$ は

$$\bar{x}(t+1) = [I_n - \bar{B}_i(t)[\bar{R}_i(t) + \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t)]^{-1} \cdot \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}_0(t)\bar{x}(t) \quad (55)$$

となる。さらに, (50), (53), (55)式より

$$\begin{aligned} & [\bar{P}(t) - \bar{Q}_0(t) - \bar{A}_0(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}_0(t) \\ & + \bar{A}_0(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t) \\ & \cdot [\bar{R}_i(t) + \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t)]^{-1} \end{aligned}$$

$$\cdot \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}_0(t)]\bar{x}(t) = 0 \quad (56)$$

を得る。(56)式が任意の \$\bar{x}(t)\$ に対して成立するためには, \$\bar{P}(t)\$ は非定常リカッチ方程式

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & \bar{Q}_0(t) + \bar{A}_0(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}_0(t) \\ & - \bar{A}_0(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t) \\ & \cdot [\bar{R}_i(t) + \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t)]^{-1} \\ & \cdot \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}_0(t) \end{aligned} \quad (57)$$

を満足しなければならない。(47)式と (53)式より, 境界条件は

$$\bar{P}(p+1) = \bar{Q}_3 \quad (58)$$

となる。\$\bar{Q}_3\$ は半正定行列であるから, \$\bar{P}(t+1)\$ も半正定行列となり, 仮定を満足する。また, (46), (53), (55)式より誘導された LQ 問題の最適入力 \$\bar{v}_i^*(t)\$ は

$$\begin{aligned} \bar{v}_i^*(t) = & -[\bar{R}_i(t) + \bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{B}_i(t)]^{-1} \\ & \cdot [\bar{B}_i(t)'\bar{P}(t+1)\bar{A}(t) + \bar{S}_i(t)']\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (59)$$

となる。

よって, [デッドビート原理]と誘導された LQ 問題より, デッドビート LQ 最適制御の最適入力 \$\bar{u}^*(t)\$ は,

$$\bar{u}^*(t) = F(t)\bar{x}(t) + W_i(t)\bar{v}_i^*(t) \quad (60)$$

となる。特に,

$$\bar{A} = J_0 + EA^* \quad (61)$$

とおくと, 第一相では (37), (38), (40)式より

$$\bar{u}^*(t) = -[\bar{R} + E'\bar{P}(t+1)E]^{-1}E'\bar{P}(t+1)\bar{A}\bar{x}(t) \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) = & \bar{Q} + \bar{A}'\bar{P}(t+1)\bar{A} - \bar{A}'\bar{P}(t+1)E \\ & \cdot [\bar{R} + E'\bar{P}(t+1)E]^{-1}E'\bar{P}(t+1)\bar{A} \end{aligned} \quad (63)$$

となる。最後に, 評価関数 \$J(n_1 + q)\$ の最小値 \$J^*(n_1 + q)\$ は,

$$\begin{aligned} J^*(n_1 + q) = & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^p [\bar{x}(t)'\bar{P}(t)\bar{x}(t) \\ & - \bar{x}(t+1)'\bar{P}(t+1)\bar{x}(t+1)] \\ & + \frac{1}{2} \bar{x}(p+1)'\bar{Q}_3\bar{x}(p+1) \\ = & \frac{1}{2} \bar{x}(0)'\bar{P}(0)\bar{x}(0) \end{aligned} \quad (64)$$

となる。

以上をまとめると, つぎの定理を得る。

[定理] デッドビート LQ 最適制御の最適入力 \$\bar{u}^*(t)\$ は

$$\bar{u}^*(t) = \bar{K}^*(n_1 + q, t)\bar{x}(t) \quad (65)$$

なる状態フィードバックの形で表わすと, つぎのようになる。

[1] 第一相 (\$t=0, \dots, q-1\$)

最適フィードバックゲインは

$$\begin{aligned} \bar{K}^*(n_1 + q, t) = & -[\bar{R} + E'\bar{P}(t+1)E]^{-1} \\ & \cdot E'\bar{P}(t+1)\bar{A} \end{aligned} \quad (66)$$

なる時変ゲインとなる。ただし, \$\bar{P}(t)\$ は (63)式の非定常

リカッチ方程式より求める。

[2] 第二相 ($t=q, \dots, p$)

最適フィードバックゲインは

$$\begin{aligned} \bar{K}^*(n_1+q, t) = & F(t) \\ & - W_t(t) [\bar{R}_t(t) + \bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{B}_t(t)]^{-1} \\ & \cdot [\bar{B}_t(t)' \bar{P}(t+1) \bar{A}(t) + \bar{S}_t(t)] \end{aligned} \quad (67)$$

となり、ある成分は一定ゲインの状態フィードバック、他の成分は時変ゲインの状態フィードバックとなる。ただし、 $\bar{P}(t)$ は (57) 式の非定常リカッチ方程式より求める。

[2] 第三相 ($t=p+1, \dots, n_1+q-1$)

最適フィードバックゲインは

$$\bar{K}^*(n_1+q, t) = -A^* \quad (68)$$

なる一定ゲインとなる。

また、評価関数の最小値は (63) 式となる。

さらに、1 入力系³⁾の場合と同様に、つぎの性質が成立する。

(1) 最適フィードバックゲインは、一定ゲインも時変ゲインも共に初期状態 $x(0)$ に依存しない。

(2) 終端時刻が n_1+q のときの時刻 t における最適フィードバックゲイン $\bar{K}^*(n_1+q, t)$ は、

$$\bar{K}^*(n_1+q, t) = \bar{K}^*(n_1+q+1, t+1) \quad (69)$$

となる。すなわち、終端時刻が長い場合の最適フィードバックゲインは、終端時刻が短い場合のフィードバックゲインをその一部として含む。

(3) 終端時刻が n_1+q のときの制御は、終端時刻が n_1+q+1 のときの制御の特別な場合と考えることができるから、

$$J^*(n_1+q+1) \leq J^*(n_1+q) \quad (70)$$

となる。

なお、Luenberger の可到達正準形による表現をもとの座標系に変換するのは容易であり、明らかに同様な性質が成立する。このとき、もとの座標系の最適フィードバックゲイン $K^*(n_1+q, t)$ は

$$K^*(n_1+q, t) = S_2 \bar{K}^*(n_1+q, t) S_1^{-1} \quad (71)$$

となり、第二相 ($t=q, \dots, p$) では一定ゲインと時変ゲインの線形結合の形で表現される。さらに、2 次形式評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ は、

$$J^*(n_1+q) = \frac{1}{2} x(0)' P(0) x(0) \quad (72)$$

$$P(0) = (S_1^{-1})' \bar{P}(0) S_1^{-1} \quad (73)$$

となる。

5. 例 題

Sebakhy ら¹⁰⁾の例題を用いる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

このとき、可到達指数の族は $(n_1, n_2, n_3) = (3, 1, 1)$ である。重み行列を、

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

として、 $q=2$ の場合を考える。このとき、もとの座標系での最適フィードバックゲイン $K^*(5, t) (t=0, \dots, 4)$ は、つぎのようになる。

$$K^*(5, 0) = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.539 & 0.426 & -0.436 & 0.436 \\ -0.916 & 0.875 & 0.067 & 0.960 & -0.041 \\ 0.003 & 0.458 & 0.053 & 0.505 & 0.454 \end{bmatrix}$$

$$K^*(5, 1) = \begin{bmatrix} 0.000 & -0.429 & 0.535 & -0.552 & 0.552 \\ -0.916 & 0.874 & 0.066 & 0.961 & -0.042 \\ 0.003 & 0.457 & 0.053 & 0.506 & 0.454 \end{bmatrix}$$

$$K^*(5, 2) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0.916 & 0.871 & 0.063 & 0.964 & -0.045 \\ 0.003 & 0.454 & 0.050 & 0.508 & 0.451 \end{bmatrix}$$

$$K^*(5, 3) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0.916 & 0.800 & 0 & 1.036 & -0.116 \\ 0.004 & 0.400 & 0 & 0.564 & 0.396 \end{bmatrix}$$

$$K^*(5, 4) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

つぎに、終端時刻 $\tau = n_1+q$ が増加したときに、2 次形式評価関数の最小値 $J^*(n_1+q)$ がどのように減少するか調べる。なお、 $J^*(n_1+q)$ は初期状態 $x(0)$ に依存するので、このようなときによく用いられる $\text{trace } P(0)$ を求め、Table 1 に示す。

Table 1 Trace P(0)

q	0	1	2	3	4
Trace P (0)	197	155	145	142	141

6. あとがき

本論文では、多入力線形定常離散時間系の終端状態固定条件付最適レギュレータ問題、すなわちデッドビート LQ 最適制御問題の解法を示した。まず、デッドビート入力の一般形が満足すべきデッドビート原理を用いて、この終端状態固定の LQ 最適制御問題から、自由な終端状態をもつ LQ 最適制御問題を誘導した。この誘導された LQ 問題では、新しい制御対象は入力の構造が変化する時変系となり、新しい評価関数は重み行列が時変で相乗項を含む 2 次形式評価関数となる。デッドビート原理と誘導された LQ 問題より、最適入力とは三つの相にわかれ、第一相では時変ゲインの状態フィードバック、第二相では一定ゲインの状態フィードバックと時変ゲインの状態フィードバックの線形結合、第三相では一定ゲインの状態フィードバックとなる。このとき、時変ゲインは特別な非定常リカッチ方程式より求まる。また、最適フィードバックゲインは、制御対象の初期状態に依存しない。

参考文献

- 1) M. Athans and P. Falb: Optimal Control, 460/466, McGraw-Hill (1966)
- 2) 計測自動制御学会編：自動制御ハンドブック基礎編, 497/499, オーム社(1983)
- 3) 近藤, 清田, 菊池, 須永: 1 入力線形定常離散時間系のデッドビート LQ 最適制御, 計測自動制御学会論文集, 25-11, 1245/1247(1989)
- 4) 近藤, 清田, 須永: 1 入力線形定常離散時間系に対する終端状態固定条件付最適レギュレータ問題の新解法, 第 32 回自動制御連合講演会前刷, 95/96(1989)
- 5) J. O'Reilly: The Discrete Linear Time Invariant Time-optimal Control Problem - An Overview, Automatica, 17-2, 363/370(1981)
- 6) 今井弘之: デッドビート制御, 計測と制御, 22-7, 606/613(1983)

- 7) 近藤, 清田, 須永, 川口: 終端状態固定条件付レギュレータ問題の入力エネルギー最小化(多入力線形定常離散時間系の場合), 日本機械学会論文集(C編), 56-527, 1762/1768(1990)
- 8) 近藤, 清田, 菊池, 須永: 多入力線形定常離散時間系のデッドビート原理, 日本機械学会論文集(C編), 55-514, 1372/1376(1989)
- 9) 美多勉: デジタル制御理論, 149/153, 昭晃堂(1984)
- 10) O. A. Sebakhy and T. M. Abdel-Moneim: State Regulation in Linear Discrete-Time Systems in Minimum Time, IEEE Trans. Automatic Control, AC-24-1, 84/87(1979)

[著者紹介]

近藤 英二 (正会員)

1975 年九州大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学。同年 4 月同大学工学部講師, 1978 年 8 月同助教授, 1988 年 10 月同教授, 現在に至る。極配置, オブザーバ, フィルタ, デジタル制御の研究に従事。日本機械学会の会員 (工学博士)。

清田 高德 (正会員)

1987 年九州大学大学院工学研究科修士課程修了。同年 4 月同大学工学部助手, 現在に至る。デジタル制御に関する研究に従事。日本機械学会の会員 (工学博士)。

須永 照雄 (正会員)

1959 年, 東京大学大学院数物系研究科応用物理学博士課程単位取得退学。同年 4 月九州大学工学部助教授, 1974 年同教授, 現在に至る。非線形計画法など最適化手法の計算法と機械工学への応用に関する研究に従事。日本 OR 学会のフェロー (工学博士)。