拡張パルス伝達関数の既約分解に基づく サンプル値制御系の解析と設計

杉 江 俊 治*・村 井 雅 彦**

Analysis and Design of Sampled-Data Control Systems Based on Stable Factorizations of Modified Pulse Transfer Functions

Toshiharu SUGIE* and Masahiko MURAI**

This paper presents a new approach to analysis and design of multivariable sampled-data control systems. First, exploiting the modified pulse transfer function representation, we show that the factorization approach is useful to characterize all the admissible intersample output behavior in sampled-data control systems. Second, we give a solution to the l_2/L_2 -induced norm optimization problem, where continuous time behavior of sampled-data systems is taken into account. Then, we apply these results to the model-matching problem to show the validity of our method by simulation.

Key Words: sampled-data control system, modified pulse transfer function, stable factorization, intersample behavior, model-matching

1. はじめに

連続時間の制御対象をディジタル補償器を用いて制御するサンプル値制御系に関して、従来より多くの研究がなされている。このような制御系においては、単にサンプル点上のシステムの挙動だけでなくサンプル点の間の応答についても考慮すべきであると、従来より指摘されており、このようなサンプル点間の応答を調べる手法として、拡張パルス伝達関数を用いる方法がよく知られている¹⁾。しかし、この方法は拡張 z 変換の複雑さなどのため、統一的な見通しのよい理論展開が困難と考えられ、設計法として積極的に用いられることは少なかった。

これに対して、近年、連続時間信号をベースとしたサンプル値制御系の解析や設計が活発に研究されてきている^{2)~11)}。たとえば、連続時間信号の評価関数を用いたサンプル値系のLQR問題^{2),3)}や $\mathcal{H}_2$ 最適制御問題¹¹⁾、サンプル値系の $\mathcal{L}_p$ 安定性の証明^{5),10)}や $\mathcal{L}_2$ induced ノルムの計算法⁶⁾、さらには $\mathcal{H}_\infty$ タイプの最適制御問題⁸⁾などが考

察されてきており、注目すべき結果が得られつつある。また、関数空間の手法を用いてサンプル値系を解析する新しい枠組みの提案⁹⁾や、サンプル値系のロバスト安定性の解析^{7),12)}などもなされている。これらの結果はそれぞれ注目に値する優れたものであるが、その多くは、連続信号と離散信号を混在させたまま、線形時変系として系を取り扱っているため、近年発展の著しい既約分解に基づく代数的設計法の成果¹³⁾を利用することができない。このため、たとえば、サンプル値制御系において実現可能な目標値応答のクラスなども明確でない。

そこで本論文では、サンプル点間の応答を考慮に入れることができ、かつ線形時不変系としてサンプル値系を扱えるという観点から、拡張パルス伝達関数に着目し、この既約分解表現を用いてサンプル値系を解析することを考える。そして、この結果、サンプル点間の目標値応答を規定する伝達関数の実現可能なクラスなどが非常に簡単な形で得られ、サンプル点間の応答を考慮した制御系設計の見通しがよくなることを示す。さらに、ディジタル補償器の最適設計の観点から、サンプル値系の出力を連続時間信号として評価する l_2/L_2 -induced ノルム最適化問題を考え、その一つの解法を与える。また、この結果をサンプル点間応答を考慮したモデルマッチング問題に適用し、数値例によってこの手法の有効性を検討

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

** (株)東芝 総合研究所 川崎市川崎区浮島町4-1

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji

** R & D Center, Toshiba Corporation, Kawasaki
(Received September 12, 1991)

(Revised January 27, 1992)

する。

なお、本論文では $\mathcal{RH}_\infty$ によってプロパー安定な実有理行列の集合を表わす。また、読者は $\mathcal{RH}_\infty$ 上の既約分解¹³⁾に関する知識を有するものと仮定する。

2. 2自由度サンプル値制御系

2.1 制御対象の記述

Fig. 1 に示すようなプロパーな連続時間制御対象 $\tilde{P}(s)$ 、デジタル補償器 $C[z]$ とサンプリング周期 h のサンプラ $\mathcal{S}$ およびホールド $\mathcal{H}$ からなるサンプル値制御系を考える。ここで、 $\tilde{u}(t)$ 、 $\tilde{y}(t)$ はそれぞれ連続時間の p 次元制御対象入力、 q 次元制御対象出力を表わし、 $u[k]$ 、 $y[k]$ 、 $r[k]$ はそれぞれ離散時間の p 次元制御入力、 q 次元観測量、 q 次元目標値信号を表わす。 $C[z]$ は $r[k]$ と $y[k]$ の情報から $u[k]$ を定める一般的な形式の2自由度補償器である。サンプラ $\mathcal{S}$ は連続時間信号から離散時間信号へ変換するオペレータであり、 $y = \mathcal{S}\tilde{y}$ は

$$y[k] = \tilde{y}(kh) \quad (1)$$

を意味し、ホールド $\mathcal{H}$ は逆に離散時間信号を連続時間信号に変換するオペレータであり、 $\tilde{u} = \mathcal{H}u$ は

$$\tilde{u}(t) = H(t)u[k], \quad kh \leq t < (k+1)h \quad (2)$$

を意味するものとする。ここで、 $H(t)$ は周期 h の有界な周期関数行列であり、 $H(t) = I$ (単位行列) のときには、通常の0次ホールドを表わす。

$u[k]$ から $y[k]$ への $\mathcal{S}\tilde{P}(s)\mathcal{H}$ のパルス伝達関数を $P[z]$ とし、サンプル点間の応答を知るために、 $u[k]$ から時刻 $t = (k+m)h$ ($0 \leq m < 1$)の制御対象出力 $y[k, m] := \tilde{y}(kh + mh)$ への $\tilde{P}(s)\mathcal{H}$ の拡張パルス伝達関数を $P[z, m]$ とする。

さて、制御対象のパルス伝達関数と拡張パルス伝達関数の状態空間表現を求めておく。いま $\tilde{P}(s)$ の状態空間表現が、

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}\tilde{u}(t) \end{cases} \quad (3)$$

と表わされるものとする。ただし、 $\tilde{A} \in \mathcal{R}^{n \times n}$ 、 $\tilde{B} \in \mathcal{R}^{n \times p}$ 、 $\tilde{C} \in \mathcal{R}^{q \times n}$ 、 $\tilde{D} \in \mathcal{R}^{q \times p}$ である。このとき、 $x[k] = \tilde{x}(kh)$ を状態ベクトル、 $u[k]$ を入力、 $y[k]$ と $y[k, m]$ を出力として、離散化された制御対象を記述すれば、

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad (4)$$

Fig. 1 2 D.O.F. Sampled-data control system

$$y[k] = Cx[k] + Du[k] \quad (5)$$

$$y[k, m] = C(m)x[k] + D(m)u[k] \quad (6)$$

となる。ただし、

$$\begin{cases} A := e^{\tilde{A}h}, B := \int_0^h e^{\tilde{A}(h-\tau)} \tilde{B}H(\tau) d\tau, \\ C := \tilde{C}, D := \tilde{D}H(0), \\ C(m) := \tilde{C}e^{\tilde{A}mh} \\ D(m) := \int_0^{mh} \tilde{C}e^{\tilde{A}(mh-\tau)} \tilde{B}H(\tau) d\tau + \tilde{D}H(mh) \end{cases} \quad (7)$$

である。したがって、パルス伝達関数 $P[z]$ の状態空間表現は(4)、(5)式で、拡張パルス伝達関数 $P[z, m]$ のそれは(4)、(6)式で与えられ、それぞれの伝達関数の値は

$$P[z] = C(zI - A)^{-1}B + D \quad (8)$$

$$P[z, m] = C(m)(zI - A)^{-1}B + D(m) \quad (9)$$

によって計算できる。ここで、明らかに

$$P[z] = P[z, 0], \quad C = C(0), \quad D = D(0) \quad (10)$$

が成立している。

2.2 拡張パルス伝達関数の既約分解

本論文ではつぎの仮定をおく。

【仮定1】 (A, B) は可安定、 (C, A) は可検出。

この仮定はそれほど強くない。たとえば、通常の0次ホールド (すなわち $H(t) = I$) の場合には、もとの連続系の $(\tilde{C}, \tilde{A}, \tilde{B})$ が可検出・可安定であれば、ほとんどすべてのサンプル周期 h に対して、上記の仮定が成立することはよく知られている。

このとき、拡張パルス伝達関数の既約分解に関してつぎの命題が成り立つ。

【命題1】 仮定1の下で、 $P[z]$ の $\mathcal{RH}_\infty$ 上の右既約分解を $N[z]M[z]^{-1}$ とすると、 $P[z, m] = N[z, m]M[z]^{-1}$ が任意の $m \in [0, 1]$ に対して右既約分解となるような $N[z, m] \in \mathcal{RH}_\infty$ が存在する。

(証明) (A, B) が可安定なので、 $A_K := A - BK$ を安定行列 (すべての固有値の絶対値が1より小さい) とする定数行列 K が存在する。これを用いて、Nettらの方法¹⁴⁾に従い、

$$N_0[z] = D + (C - DK)(zI - A_K)^{-1}B \quad (11)$$

$$N_0[z, m] = D(m) + (C(m) - D(m)K)(zI - A_K)^{-1}B \quad (12)$$

$$M_0[z] = I - K(zI - A_K)^{-1}B \quad (13)$$

と選べば、 $N_0[z]$ 、 $N[z, m]$ 、 $M[z]$ が $\mathcal{RH}_\infty$ に属し、 $P[z] = N_0[z]M_0[z]^{-1}$ および $P[z, m] = N_0[z, m]M_0[z]^{-1}$ が成立することは容易に確認できる。さらに、仮定より (C, A) は可検出であり、このときには任意の m に対して $(C(m), A)$ も自動的に可検出となる (付録命題A参照) ので、上記の分解は共に右既約分解となっている¹³⁾。

さて, $N[z]M[z]^{-1}$ を $P[z]$ の任意の右既約分解とするとき,

$$N[z] = N_0[z]U[z], \quad M[z] = M_0[z]U[z] \quad (14)$$

を満たすユニモジュラ行列 $U[z]$ が存在するので, $P[z, m] = (N_0[z, m]U[z])(M_0[z]U[z])^{-1}$ と右既約分解すれば, 命題の成立することがわかる. ■

この命題は「拡張パルス伝達関数 $P[z, m]$ の右既約分解を適当に選べば, m に依存するのは分子行列 $N[z, m]$ のみであり, 分母行列 $M[z]$ は m に依存せず, しかも $P[z]$ の分母行列に一致させることができる」ことを明らかにしている. この点が以下の解析に非常に重要となる.

(注) なお, 左既約分解に関してはこのことは一般には成立しないが, $P[z, m]$ が $\mathcal{RH}_\infty$ に属する(すなわちもとの連続系 $\bar{P}(s)$ がプロパー安定)か, あるいはスカラー系であるときに成立することは容易に確認できる.

2.3 実現可能な目標値応答のクラス

この節では, 既約分解に基づいて, すべての安定化補償器のパラメータ表現を与え, 2 自由度サンプル値系において実現可能な目標値応答のクラスなどを明らかにする.

まず, 内部安定性を定義するため, Fig. 1 の制御系において, $u[k]$ に $d_1[k]$, $y[k]$ に $d_2[k]$ なる外部信号を加えると, 制御系は

$$\begin{bmatrix} y[z, m] \\ y[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P[z, m] \\ P[z] \end{bmatrix} (u[z] + d_1[z]) \quad (15)$$

$$u[z] = C[z] \begin{bmatrix} r[z] \\ y[z] + d_2[z] \end{bmatrix} \quad (16)$$

と書ける. 後の表記の便宜のため $C[z]$ を $r[k]$ と $y[k]$ の次元数に応じて $C[z] = [C_1[z], -C_2[z]]$ と分割しておく. このとき, $(r[k], d_1[k], d_2[k])$ から $(u[k], y[k], y[k, m])$ への六つのパルス伝達関数がすべて $\mathcal{RH}_\infty$ に属するならば, 制御系は内部安定という.

いま, $P[z]$ の $\mathcal{RH}_\infty$ 上の左右既約分解および Bezout 等式の解を

$$P[z] = N[z]M[z]^{-1} = \tilde{M}[z]^{-1}\tilde{N}[z] \quad (17)$$

$$\tilde{X}[z]N[z] + \tilde{Y}[z]M[z] = I \quad (18)$$

とする. このとき, 命題 1 より,

$$\begin{bmatrix} P[z, m] \\ P[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N[z, m] \\ N[z] \end{bmatrix} M^{-1}[z] \quad (19)$$

となる. (19)式において $N[z]$ と $M[z]$ が右既約であることは, この制御対象が $u[k]$ から可安定, $y[k]$ から可検出であることを示しているので, サンプル点上だけをみた $P[z]$ を内部安定化しておけば十分であることが予想され, 実際つぎの結果を得る.

[定理 1] Fig. 1 のサンプル値系を内部安定にするすべての補償器は, 次式のようにパラメータ表現できる.

$$\begin{aligned} C[z] &= [C_1[z], -C_2[z]] \\ &= (\tilde{Y}[z] - Q[z]\tilde{N}[z])^{-1} [K[z], \\ &\quad -(\tilde{X}[z] + Q[z]\tilde{M}[z])] \end{aligned} \quad (20)$$

ここで, $K[z], Q[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ は適当なサイズの自由パラメータである.

(証明) $(r[k], d_1[k], d_2[k])$ から $(u[k], y[k])$ への六つのパルス伝達関数をプロパー安定にするすべての補償器が (20) 式のパラメータ表現で与えられることはよく知られている¹³⁾. よって, この補償器が $(r[k], d_1[k], d_2[k])$ から $y[k, m]$ への三つの伝達関数をプロパー安定にすることを示せば十分であるが, これらは後の (21)~(23) 式に示すように $\mathcal{RH}_\infty$ に属する. ■

$(r[k], d_1[k], d_2[k])$ から $y[k, m]$ への三つの拡張パルス伝達関数をそれぞれ $G_{yr}[z, m]$, $G_{yd_1}[z, m]$, $G_{yd_2}[z, m]$ とする. このとき, 安定化補償器によって実現できるこれらの伝達関数のクラスは (15), (16), (19), (20) 式よりつぎのように表現できる.

$$\begin{aligned} G_{yr}[z, m] &= P[z, m](I + C_2[z]P[z])^{-1}C_1[z] \\ &= N[z, m]K[z] \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} G_{yd_1}[z, m] &= P[z, m](I + C_2[z]P[z])^{-1} \\ &= N[z, m](\tilde{Y}[z] - Q[z]\tilde{N}[z]) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_{yd_2}[z, m] &= -P[z, m](I + C_2[z]P[z])^{-1}C_2[z] \\ &= -N[z, m](\tilde{X}[z] + Q[z]\tilde{M}[z]) \end{aligned} \quad (23)$$

(21) 式はサンプル点間 $y[k, m]$ への実現可能な目標値応答のクラスが $N[z, m]$ (すなわち $P[z, m]$ の分子行列) と自由パラメータ $K[z]$ の積としてコンパクトに表現できることを示している. ここで $m=0$ とおけば $G_{yr}[z] = N[z]K[z]$ となり, これはよく知られた離散系のクラス表現にほかならない. この意味では (21) 式は従来結果をサンプル点間応答へ拡張したものと見える. (22), (23) 式も同様である. これらの式において重要な点は (i) m に依存するのが $N[z, m]$ のみであり, 他は $P[z]$ のデータだけから計算できること, および, 容易に確認できることであるが (ii) 通常の離散系 $P[z]$ に対して $G_{yr}[z]$, $G_{yd_1}[z]$, $G_{yd_2}[z]$ を計算して $N[z]$ のかわりに $N[z, m]$ を代入するだけでこれらの式が得られる点にある.

このように, 拡張パルス伝達関数の既約分解を用いれば, サンプル点間応答の実現可能なクラスは非常に簡潔な形で表現されるため, サンプル点間の応答を考慮した制御系の設計が見通しよく行えることが期待できる. また, 目標値応答は $K \in \mathcal{RH}_\infty$ で, ほかのフィードバック特性は $Q \in \mathcal{RH}_\infty$ で, それぞれ独立に指定できる点は, 従来の連続時間系 (あるいは離散時間系) の場合と同様であり, 2 自由度補償器を用いることはサンプル値系の設計に際しても有用である.

3. $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化問題

前章では、サンプル値制御系のすべての安定化補償器や実現可能な目標値応答のクラスを明らかにした。本章では、サンプル点間の応答を考慮した最適設計の観点から、具体的に一つの安定化補償器を定める方法を考える。すなわち、サンプル値系への離散入力を l_2 ノルム、連続出力を $\mathcal{L}_2$ ノルムではかり、その $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムを最適化する問題を考え、その一つの解法を与える。そして、この方法をサンプル点間の応答を考慮したモデルマッチング問題に適用し、その有効性をシミュレーションによって検討する。

3.1 $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムの計算法

まず、最適化補償器を求める準備として、Fig. 2 に示す連続時間系とホールドから成る $\tilde{P}(s)\mathcal{H}$ の $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム、すなわち、

$$\|\tilde{P}(s)\mathcal{H}\|_{l_2/\mathcal{L}_2} = \sup_{u \in l_2} \frac{\|\tilde{y}(t)\|_2}{\|u[k]\|_2} \quad (24)$$

を求める方法について述べる。

$\tilde{P}\mathcal{H}$ の拡張パルス伝達関数 $P[z, m]$ の状態空間表現は 2 章の議論より

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ y[k, m] = C(m)x[k] + D(m)u[k] \end{cases} \quad (25)$$

と表わされることに注意する。いま、 $y[k, m] = \tilde{y}(kh + mh)$ であることから

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}(t)\|_2^2 &= \int_0^\infty \tilde{y}^T(t) \tilde{y}(t) dt \\ &= \sum_{k=0}^\infty \int_0^1 y^T[k, m] y[k, m] h dm \\ &= \sum_{k=0}^\infty [x^T[k] u^T[k]] W \begin{bmatrix} x[k] \\ u[k] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

が成り立つ。ここで、 W は

$$W := \int_0^1 E(m)^T E(m) h dm \quad (27)$$

$$E(m) := [C(m), D(m)]$$

で定義されるものである。この W を、

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}^T \\ \tilde{D}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = W \quad (28)$$

と分解する。ただし、 $\tilde{C} \in \mathcal{R}^{(n+p) \times n}$ 、 $\tilde{D} \in \mathcal{R}^{(n+p) \times p}$ である（ここで、 n は状態 $x[k]$ の次元、 p は入力 $u[k]$ の次元であったことに注意されたい）。そして、離散時間の出力 $\tilde{y}[k] \in \mathcal{R}^{(n+p)}$ を

Fig. 2 Continuous time plant with hold

$$\tilde{y}[k] = \tilde{C}x[k] + \tilde{D}u[k] \quad (29)$$

によって定義すれば、明らかに

$$\|\tilde{y}[k]\|_2^2 = \sum_{k=0}^\infty \tilde{y}^T[k] \tilde{y}[k] = \|\tilde{y}(t)\|_2^2 \quad (30)$$

が成立する。よって、

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \\ \tilde{y}[k] = \tilde{C}x[k] + \tilde{D}u[k] \end{cases} \quad (31)$$

なる状態空間表現で記述される離散時間系 $\tilde{P}[z]$ を考えると、つぎの定理を得る。

[定理 2] (25) 式で表現される系 $\tilde{P}(s)\mathcal{H}$ の $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムは、(31) 式で表現される離散系の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム $\|\tilde{P}[z]\|_\infty$ に等しい。

(証明) (30) 式と $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの定義から

$$\|\tilde{P}[z]\|_\infty = \sup_{u \in l_2} \frac{\|\tilde{y}[k]\|_2}{\|u[k]\|_2} = \sup_{u \in l_2} \frac{\|\tilde{y}(t)\|_2}{\|u[k]\|_2} \quad (32)$$

が成り立つことより明らか。

離散時間系の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの計算法は確立されているので、いったん、induced ノルムの等価な離散系を上記手順により求めれば、 $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムが計算できることになる。

Chen ら⁶⁾ は同様の問題をオペレータ理論を用いて考察しているが、induced ノルムの計算法と考え方はかなり複雑である。これに対して、本論文の方法はきわめて簡単である。また、本手法では、induced ノルム等価な離散系において、もとのサンプル値系の状態量 $x[k]$ が保存されている。この点が次節の最適化問題への応用に際して非常に重要である。

なお、この定理 2 に関して、筆者らとは独立に早川ら¹⁵⁾ が本質的に同じ結果を得ている。

3.2 $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化

つぎに、通常の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題と同様に一般的な定式化を行うために、Fig. 3 に示す一般化制御系を考える。ここで、 $r[k]$ 、 $u[k]$ 、 $y[k]$ は適当な次元の離散時間信号で、それぞれ外部入力、制御入力、観測量を表わし、 $\tilde{e}(t)$ は連続時間の制御量を表わす。この制御系の伝達関数表現を

$$\begin{bmatrix} e[z, m] \\ y[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}[z, m] & G_{12}[z, m] \\ G_{21}[z] & G_{22}[z] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r[z] \\ u[z] \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$u[z] = C[z]y[z] \quad (34)$$

Fig. 3 Generalized Sampled-data feedback system

であるとする。(33)式は一般化制御対象を(34)式は補償器を表わす。ここで $e[z, m]$ は $e[k, m] := \bar{e}(kh + mh)$ の z 変換であり, $G_{11}[z, m]$, $G_{12}[z, m]$ は拡張パルス伝達関数である。このとき, $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化問題とは, 制御系を内部安定にする補償器のなかから

$$J = \sup_{r \in l_2} \frac{\|\bar{e}(t)\|_2}{\|r[k]\|_2} \quad (35)$$

なる評価関数を最小にする最適解 $C[z]$ を求める問題である。

さて, (33)式の状態空間表現が,

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + B_1r[k] + B_2u[k] \\ e[k, m] = C_1(m)x[k] + D_{11}(m)r[k] + D_{12}(m)u[k] \\ y[k] = C_2x[k] + D_{21}r[k] + D_{22}u[k] \end{cases} \quad (36)$$

で与えられるものとし, 先と全く同様にして,

$$W_{GP} = \int_0^1 E_c(m)^T E_c(m) h dm \quad (37)$$

$$E_c(m) := [C_1(m), D_{11}(m), D_{12}(m)]$$

なる行列を考え, この分解形を,

$$\begin{bmatrix} \bar{C}_1^T \\ \bar{D}_{11}^T \\ \bar{D}_{12}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \end{bmatrix} = W_{GP} \quad (38)$$

とする。各行列のサイズは先と同様適当に選ばれている

とする。新たな離散時間制御量 $\bar{e}[k]$ を

$$\bar{e}[k] = \bar{C}_1x[k] + \bar{D}_{11}r[k] + \bar{D}_{12}u[k] \quad (39)$$

と定めれば, 明らかに

$$\|\bar{e}(t)\|_2 = \|\bar{e}[k]\|_2 \quad (40)$$

を得る。ここで,

$$\begin{cases} x[k+1] = Ax[k] + B_1r[k] + B_2u[k] \\ \bar{e}[k] = \bar{C}_1x[k] + \bar{D}_{11}r[k] + \bar{D}_{12}u[k] \\ y[k] = C_2x[k] + D_{21}r[k] + D_{22}u[k] \end{cases} \quad (41)$$

で与えられる離散時間の一般化制御対象 $\hat{G}[z]$ と(34)式の補償器 $C[z]$ からなる Fig. 4 の離散時間制御系を考え, $r[k]$ から $\bar{e}[k]$ への l_2 -induced ノルムを最小にする安定化補償器 $C[z]$ を $\mathcal{H}_\infty$ 最適解とよぶことにすれば, つぎの定理を得る。

[定理 3] Fig. 3 のサンプル値制御系における $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムの最適化問題の解は, Fig. 4 の離散時間

Fig. 4 Equivalent discrete-time system

系における $\mathcal{H}_\infty$ 最適解に等しい。

(証明) 上記の議論より明らか。

離散時間系の $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題の解法はいくつかすでに提案されているので, いったん, (38)式を満たす $\bar{C}_1$ などの行列を求めて, (41)式の系を得れば, あとは, これらの方法を利用して最適解を求めればよいことになる。Chen ら⁹⁾ も同様の問題を考察しているが, その解法は概念的なレベルにとどまっており, 本報告のように具体的な手順を与えているとはいえない。

3.3 モデルマッチング問題への適用

所期の目標値応答を得るための制御系設計問題の一つにモデルマッチング問題がある。しかし, サンプル値制御系においては, 目標値応答を規範モデルの応答に完全に一致させることは, 一般に不可能である。そこで, $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化の手法を応用して, サンプル点において規範モデルの応答と完全には一致しないかもしれないが, サンプル点間の応答を考慮にいれてモデルの応答と最も近くなるような補償器の一設計法を考える。

2章で述べた制御系を考えると, 目標値 $r[k]$ から出力 $y[k, m]$ への拡張パルス伝達行列は(21)式の $G_{yr}[z, m] = N[z, m]K[z]$ で与えられる。いま, 規範モデルを $\bar{G}_M(s)$ とし, これにホールド $\mathcal{H}$ を加えた $\bar{G}_M(s)\mathcal{H}$ の拡張パルス伝達関数を $G_M[z, m]$ とすると, 問題は $G_M[z, m]$ と $N[z, m]K[z]$ の差がなんらかの意味で最も小さくなるような $K[z]$ を見つけることとなる。両者の目標値応答の差を出力とする Fig. 5 の系を考えると, この系の入力離散時間であり出力は連続時間なので, $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルムを最小にする問題を考えれば, サンプル点間の応答をも考慮したモデルマッチング問題を解くことになる。

この問題は Fig. 3 の一般化制御系において,

$$\begin{bmatrix} G_{11}[z, m] & G_{12}[z, m] \\ G_{21}[z] & G_{22}[z] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_M[z, m] & -N[z, m] \\ I & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$C[z] = K[z] \quad (43)$$

と選ぶことに対応している。3.2 節の手順に従って, 離散時間系の $\mathcal{H}_\infty$ 問題に帰着させて解くことができる。

$K[z]$ が定まれば, あとは任意の $Q[z] \in \mathcal{RH}_\infty$ を選び

Fig. 5 Model-matching problem

(20)式から $C[z]$ を計算すれば設計がおわる。

シミュレーション例

次式で与えられる連続時間の制御対象をサンプル周期 0.1[sec]で制御することを考える。

$$\bar{P}(s) = \frac{1}{s-1} \quad (44)$$

いま規範モデルとして、

$$\bar{G}_M(s) = \frac{10}{s+10} \quad (45)$$

を選び、これに 0 次ホールドを用いた場合のモデルマッチング問題を考える。上記手順に従って計算するとつぎの解を得る。

$$K[z] = \frac{6.2113z^2 - 0.0960z}{z^2 - 0.3504z - 0.0064} \quad (46)$$

ただし離散時間 $\mathcal{H}_\infty$ 最適制御問題を解くにあたっては、Kondo ら¹⁶⁾ の計算アルゴリズムを用いた。このときの規範モデルと実際の制御対象のステップ応答をそれぞれ破線および実線で Fig. 6 に示す。

一方、サンプル点間を考慮せず、従来のように制御系を完全に離散系としてモデルマッチングした場合、得られる解は、

$$K[z] = \frac{6.0104z}{z - 0.3679} \quad (47)$$

となる。両者の比較のためステップ応答における規範モデル出力との誤差を Fig. 7 に示す。実線が提案手法を用いた場合、破線が従来法の場合を示している。ここで提案したモデルマッチング問題の解を用いた場合、サン

プル点では規範モデルの出力と一致していないが、サンプル点間全体でモデルの出力に近い応答を示していることがわかる。これに対して離散時間系のモデルマッチング問題の解を用いると、サンプル点ではモデルの出力と完全に一致しているが、サンプル点間においてはモデルの応答との差が大きくなっている。

以上のことより、提案した設計法はサンプル値制御系の一つの設計法として有効であると思われる。 $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化問題の有用性の一端を示したものと考えられる。

4. おわりに

本論文では、拡張パルス伝達関数の既約分解に着目し、サンプル点間の応答を考慮した 2 自由度サンプル値制御系の解析・設計問題について考察した。その結果、サンプル値系においても既約分解に基づく代数的手法が活用でき、たとえば、サンプル点間の目標値応答を規定する伝達関数の実現可能なクラスなどが、従来の離散時間系の自然な拡張として、非常に簡潔な形で得られることを明らかにした。さらに、ディジタル補償器の最適設計の観点から、サンプル値制御系の出力を連続時間信号として評価する $l_2/\mathcal{L}_2$ -induced ノルム最適化問題を考察し、その一つの解法を与えた。そして、この結果をサンプル点間応答を考慮したモデルマッチング問題に適用し、シミュレーションによりこの手法の有効性を検証した。

命題 A の証明を含め多くの重要な点に関して貴重な助言をいただいた萩原朋道助教授、および日頃ご指導いただく吉川恒夫教授に深く感謝します。

参考文献

- 1) 美多, 原, 近藤: 基礎ディジタル制御, コロナ社 (1988)
- 2) A. H. Levis, R. A. Schlueter and M. Athans: On the Behaviour of Optimal Linear Sampled-Data Regulators, *Int. J. Control*, **13**-2, 343/361 (1971)
- 3) R. Kondo and K. Furuta: Sampled-Data Optimal Control of Continuous Systems for Quadratic Criterion Function Taking Account of Delayed Control Action, *Int. J. Control*, **41**-4, 1051/1060 (1985)
- 4) S. Urikura and A. Nagata: Ripple-Free Deadbeat Control for Sampled-Data Systems, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC-32**-6, 474/482 (1987)
- 5) B. A. Francis and T. T. Georgiou: Stability Theory for Linear Time-Invariant Plants with Periodic Digital Controllers, *IEEE Trans.*, **AC-33**-9, 821/832 (1988)
- 6) T. Chen and B. A. Francis: On the $\mathcal{L}_2$ -induced Norm of a Sampled-Data System, *Systems & Control Letters*, **15**-3, 211/219 (1990)
- 7) 萩原, 藤村, 荒木: サンプル値制御系のロバスト安定性, 第 19 回制御理論シンポジウム資料, 237/240 (1990)
- 8) S. Hara and P. T. Kabamba: Worst Case Analysis and Design of Sampled-Data Control Systems, *Proc. 29th IEEE CDC, Honolulu*, 202/203 (1990)
- 9) Y. Yamamoto: New Approach to Sampled-Data Con-

Fig. 6 Step response (proposed method)

Fig. 7 Step response error

- trol Systems—A Function Space Method, Proc. 29th IEEE CDC, Honolulu, 1882/1887 (1990)
- 10) T. Chen and B. A. Francis: Input-Output Stability of Sampled-Data Systems, IEEE Trans., AC-36-1, 50/58 (1991)
 - 11) T. Chen and B. A. Francis: $\mathcal{H}_2$ -Optimal Sampled-Data Control, IEEE Trans., AC-36-4, 387/397 (1991)
 - 12) 原, 中島, Kabamba: サンプル値制御系のロバスト安定化, 第 13 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 115/120 (1991)
 - 13) 前田, 杉江: アドバンス制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)
 - 14) C. N. Nett, C. A. Jacobson and M. J. Balas: A Connection between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representations, IEEE Trans., AC-29-9, 831/832 (1984)
 - 15) 早川, 天野, 藤井: サンプル値系と induced ノルム等価な離散時間系, 第 30 回 SICE 学術講演会予稿集, 63/64 (1991)
 - 16) R. Kondo, S. Hara and T. Itou: Characterization of Discrete-Time H_∞ Controllers via Bilinear Transformation, Proc. 29th IEEE CDC, Honolulu, 1763/1768 (1990)

《付 録》

[命題 A] $A, C(m)$ が (7) 式で定義されているとき, (C, A) が可検出 (または可観測) であることと $(C(m), A)$ が任意の $m \in [0, 1)$ に対して可検出 (または可観測) であることは等価である.

(証明) $A_m := e^{\bar{A}m}$ とおくと, $C(m)$ と A の定義より, $C(m) = CA_m$ かつ $A_m A = A A_m$ となる. また, 任意の m に対して $\det A_m \neq 0$ である. これより, 任意の複素数 s に対して

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C(m) \end{bmatrix} &= \text{rank} \begin{bmatrix} A_m^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} A_m \\ &= \text{rank} \begin{bmatrix} sI - A \\ C \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成立する. (C, A) が可検出のときは上式右辺は任意の $s \in \mathbb{C}_+$ (複素閉右半面) に対して列フルランクとなり, これは左辺より $(C(m), A)$ が可検出であることを意味する. 逆も同様. ■

[著 者 紹 介]

杉 江 俊 治 (正会員)

1978 年, 京都大学大学院修士課程 (精密工学専攻) 修了. 84 年同博士課程研究指導認定退学. この間 78 年より 80 年まで日本電信電話公社勤務. 84 年大阪府立大学工学部助手. 88 年京都大学工学部助教授となり現在に至る. ロバスト制御, ロボット工学の研究に従事. 日本ロボット学会, システム制御情報学会などの会員. (工学博士)

村 井 雅 彦 (正会員)

1989 年, 京都大学工学部精密工学科卒業. 1991 年同大学大学院修士課程修了. 同年 (株) 東芝入社, 現在に至る. 総合研究所エネルギー機器研究所にてシステム制御技術に応用したプロセス制御系の開発に従事. システム制御情報学会の会員.