等式と不等式制約をもつ最適化問題の大域最適化手法と その2レベル計画問題への応用

呂 敏*・志 水 清 孝*

A Global Optimization Technique for Solving a Nonlinear Programming Problem with Equality and Inequality Constraints and Its Application to the Bilevel Programming Problem

Min Lu* and Kiyotaka SHIMIZU*

A global optimization technique is proposed for solving a nonlinear programming problem with equality and inequality constraints by using the concept of exterior penalty method. The original problem is transformed into an auxiliary problem which is an optimization problem with inequality constraints only. It is proved that the global optimal solution can be obtained as an accumulation point of a sequence of solutions to the auxiliary problems, as the penalty parameter goes to the infinite. Under appropriate assumptions, we show that the auxiliary problem can be equivalently transformed to a concave program for which we can find a global optimal solution.

It is then applied to solve the bilevel programming problem. We replace the low-level problem by its Kuhn-Tucker conditions, and obtain a nonlinear programming problem with equality and inequality constraints. Then, by applying the above technique, a global optimal solution to the bilevel programming problem is found in the case of convex quadratic lower-level problem.

Key Words: global optimization, nonlinear programming problem, exterior penalty method, concave program, bilevel programming problem

1. はじめに

等式と不等式制約をもつ最適化問題の大域最適化手法について考える。このような問題は目的関数と制約関数すべてが凸関数であっても、一般には凸計画問題ではなく、通常最適化手法ではその大域最適解を求めることが困難である。ところが、無制約最適化問題や不等式制約をもつ最適化問題などの非凸計画問題に対しては、大域最適化手法が数多く提案されている^{1),2)}。特に、不等式制約をもつ最適化問題に関しては、制約関数が凸関数で目的関数が凹関数であるような凹計画問題に対する研究がさかんに行われ、多くの計算手法が与えられている^{2),3)}。これに対し、等式と不等式制約をもつ最適化問題

に対する大域最適化手法はまだ提案されていない。

そこで、ここでは外点ペナルティ法の考え方を適用し等式と不等式制約をもつ問題の大域最適解を求めることを考える。この手法では、等式と不等式制約をもつ元問題を不等式制約だけをもつ問題に変換し、ペナルティ・パラメータを無限大にしたとき、補助問題の大域最適解が元問題の大域最適解に収束するようにする。このことは通常の外点ペナルティ法(たとえば、文献4)あるいは文献5)の6.2.2節参照)の性質とほとんど同様に証明することができる。等式と不等式制約をもつ問題を不等式制約をもつ補助問題に変換して解く手法はMayne-Polak⁴⁾も用いているが、そこでは目的関数と制約関数が連続微分可能で、かつ1次独立の制約想定が成り立つ仮定のもとで補助問題の局所最適解と元問題の局所最適解との関係について論じている。これに対し、ここでは、目的関数と制約関数の連続性だけを仮定して補助問題の大域最適解と元問題の大域最適解との関係について考える。

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama
(Received September 9, 1991)
(Revised February 10, 1992)

つぎに、補助問題の大域最適化を考える。まず、目的関数と制約関数がともに凸関数である場合を考える。このとき補助問題が凸制約集合のもとの凸関数の差の最小化問題であり、さらに大域最適解が求められる凹計画問題に等価変換できることを示す。そのあと、目的関数と制約関数が凸関数の差であるときでも、ここで提案しているペナルティ法の補助問題を凹計画問題に等価変換できることを説明する。

さらに、この手法を 2 レベル計画問題に応用することを考える。2 レベル計画問題には先手と後手からなる非ゼロ和ゲーム問題である Stackelberg 問題⁹⁾ などがあ。このような問題はかりに、上位と下位の目的関数と制約関数が凸あるいは仮定をもつと強めて線形であっても、問題全体が非凸計画問題となる。2 レベル計画問題の計算手法は過去にも提案されている⁹⁾⁻¹⁰⁾。文献 8) のダブル・ペナルティ法は 2 レベル計画問題を無制約計画問題に変換して解くが、そこでは下位問題の大域最適解が求まることを前提としている。文献 9) の混合整数計画問題に変換して解く手法は 2 レベル線形計画問題に関する手法であり、文献 10) の分枝限定法は下位問題が 2 次凸計画問題である 2 レベル凸計画問題に関する手法であるが、これらはいずれも 2 レベル計画問題を解くかわりに下位問題を Kuhn-Tucker 条件で置き換えた非線形計画問題を解くことを考える。Kuhn-Tucker 条件の中に相補性条件があるため、得られた問題が非凸計画問題である。そのため、文献 9) では下位制約式の個数と同じ個数の 0-1 変数を取り入れて、混合整数計画問題に対する手法でその大域最適解を求める。また、文献 10) では相補性条件の中の Kuhn-Tucker 乗数が 0 であることと下位制約式が活性であることとのすべての組合せを陰伏的に考えるために分枝限定法を用いているが、本質は下位の制約式の個数と同じ個数の 0-1 変数を取り入れたことと同様である。これらに対し、本論文では、まず下位問題をその Kuhn-Tucker 条件で置き換えて、等式と不等式制約をもつ最適化問題を得る。そして、上記の手法を応用することによって、下位問題が 2 次凸計画問題であるときの 2 レベル計画問題の大域最適解を求める。この手法は文献 9), 10) と違って、一つの補助変数を取り入れるだけで済む。数値例でこの手法の有効性が検証された。

2. 元問題と補助問題との関係

等式と不等式制約をもつ最適化問題

$$\min_x f(x) \quad (1.a)$$

$$\text{subj. to } g(x) \leq 0 \quad (1.b)$$

$$h(x) = 0 \quad (1.c)$$

を考える。ただし、 $x \in R^n, f: R^n \rightarrow R^1, g: R^n \rightarrow R^m, h: R^n \rightarrow R^l$ とする。

問題 (1) に対し、つぎのような補助問題を考える。

$$\min_x f(x) + s\phi(h(x)) \quad (2.a)$$

$$\text{subj. to } g(x) \leq 0 \quad (2.b)$$

$$h(x) \leq 0 \quad (2.c)$$

ただし、 $s > 0$ はペナルティ・パラメータ、 $\phi: R^l \rightarrow R^1$ はペナルティ関数でつぎのような性質をもつ。

$$\phi(h(x)) = 0, h(x) = 0 \text{ のとき} \quad (3.a)$$

$$\phi(h(x)) > 0, h(x) \leq 0 \text{ (注 1) のとき} \quad (3.b)$$

このような関数の具体例としては、

$$\phi(h) = \sum_{j=1}^l (-h_j)^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots \quad (4)$$

などがある。

(4) 式において $\alpha = 1$ のとき、問題 (2) は文献 6) の補助問題と一致している。ところが、ここでは、文献 6) と違って、関数の連続微分可能性と 1 次独立の制約想定を仮定しないで問題 (1) と問題 (2) との関係を考える。

【定理 1】 問題 (1) の大域最適解 x^0 が存在し、かつ $0 < s^k < s^{k+1}$ なる二つのパラメータ s^k, s^{k+1} に対する問題 (2) の大域最適解 x^k, x^{k+1} が存在すると仮定する。このとき、つぎのことが成り立つ。

- (i) $f(x^k) + s^k \phi(h(x^k)) \leq f(x^{k+1}) + s^{k+1} \phi(h(x^{k+1})) \leq f(x^0)$,
- (ii) $\phi(h(x^k)) \geq \phi(h(x^{k+1}))$,
- (iii) $f(x^k) \leq f(x^{k+1}) \leq f(x^0)$.

(証明) 外点ペナルティ法としてよく知られている定理とほとんど同様に証明できる (たとえば、文献 5) の定理 6.8 の証明を参照)。

この手法の収束性に関する基本定理を与えるために、つぎの仮定をおく。

仮定 1) ある正数 ε が存在して、集合

$$X^\varepsilon = \{x | g_i(x) \leq 0, i=1, \dots, m, \\ -\varepsilon \leq h_j(x) \leq 0, j=1, \dots, l\}$$

がコンパクトである。

このとき、つぎの定理が得られる。

【定理 2】 問題 (1) および、任意の $s > 0$ に対する問題 (2) に大域最適解が存在すると仮定する。このとき、仮定 1) が成り立ち、かつ関数 f, g, h および ϕ が各定義域上で連続ならば、狭義単調増加して無限大に発散する s (つまり、 $k \rightarrow \infty$ のとき、 $s^k \rightarrow \infty$) の正数列 $\{s^k\}$ に対する問題 (2) の大域最適解の点列 $\{x^k\}$ に集積点が存在し、かつ任意の集積点は問題 (1) の大域最適解である。

(証明) (集積点の存在と許容性)。定理 1 の (i) と

(注 1) $a \leq b \iff$ すべての $i \in \{1, \dots, l\}$ に対し $a_i \leq b_i$ かつ少なくとも一つの i に対し $a_i < b_i$.

(iii)より数列 $\{f(x^k) + s^k \Phi(h(x^k))\}$, $\{f(x^k)\}$ は上界をもつ単調増加数列だから、それぞれにある極限 p^* , f^* が存在し, $0 \leq p^* - f^* = \lim_{k \rightarrow \infty} s^k \Phi(h(x^k))$ が成り立つ. $k \rightarrow \infty$ のとき, $s^k \rightarrow \infty$ だから,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(h(x^k)) = 0 \quad (5)$$

が必要である. 連続性の仮定より, $\Phi(h(x))$ が x に関して連続だから, $x^k \in X^e \forall k > K^e$ なる自然数 K^e が存在する. X^e のコンパクト性より, 点列 $\{x^k\}$ には集積点とこれに収束する部分点列が存在する. その任意の集積点を $\bar{x}$ とすると, (5)式より,

$$\Phi(h(\bar{x})) = 0 \quad (6)$$

が得られる. また, 仮定1)より,

$$g_i(\bar{x}) \leq 0, i=1, \dots, m \quad (7.a)$$

$$-\varepsilon \leq h_j(\bar{x}) \leq 0, j=1, \dots, l \quad (7.b)$$

が得られる. (7)式, (6)式と(3)式より, $\bar{x}$ が問題(1)の許容解であることがわかる.

(集積点の最適性). $\bar{x}$ の許容性より, 問題(1)の大域最適解 x^o に対し,

$$f(x^o) \leq f(\bar{x})$$

が成り立つ. 一方, $\bar{x}$ に収束する部分点列を改めて $\{x^k\}$ とすると, 定理1の(iii)よりすべての k に対し $f(x^k) \leq f(x^o)$ である. このことと f の連続性より,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(\bar{x}) \leq f(x^o)$$

が成り立つ. よって,

$$f(\bar{x}) = f(x^o)$$

となり, $\bar{x}$ が問題(1)の大域最適解である. ■

定理2より, ペナルティ・パラメータが無限大に発散するとき, 問題(2)の大域最適解が元問題(1)の大域最適解に収束することがわかる.

定理1と定理2より, つぎの定理が得られる.

【定理3】 問題(1)および, 任意の $s > 0$ に対する問題(2)に大域最適解が存在すると仮定する. また, 仮定1)が成り立ち, かつ関数 f, g, h および Φ が各定義域上で連続であるとし, 狭義単調増加して無限大に発散する s (つまり, $k \rightarrow \infty$ のとき, $s^k \rightarrow \infty$) の正数列 $\{s^k\}$ に対する問題(2)の大域最適解の点列を $\{x^k\}$ とする. このとき, 問題(1)の大域最適解 x^o に対し, つぎのことが成り立つ.

$$(i) \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) = f(x^o),$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow \infty} s^k \Phi(h(x^k)) = 0.$$

(証明) 文献5)の定理6.10の証明を参照. ■

この手法で問題(1)の大域最適解を求めるための計算手順はつぎのとおりである.

Step1 初期パラメータ s^1 を選び, $k=1$ とする.

Step2 不等式制約だけをもつ補助問題(2)を解き, そ

の大域最適解を x^k とする.

Step3 もし $s^k \Phi(h(x^k)) < \delta$ ならば, x^k を問題(1)の大域最適解として終了する. さもないければ, Step4へ. ただし, δ は十分小さな正数である.

Step4 $s^{k+1} := \beta s^k$ とし, $k := k+1$ として Step2へ. ただし, $\beta > 1$ は定数である.

Step3の終了判定は定理3(ii)によるものである. また, Step2において不等式制約だけをもつ補助問題(2)の大域最適解を求めなければならないが, つぎに適当な仮定のもとで補助問題(2)の大域最適化を考える.

3. 補助問題の大域最適化

3.1 f, g, h が凸関数である場合

このとき, (4)式において $\alpha=1$ とすると, つまり, ペナルティ関数を $\Phi(h(x)) = \sum_{j=1}^l (-h_j(x))$ とすると, 補助問題(2)がつぎようになる.

$$\begin{aligned} \min_x f(x) &= s \sum_{j=1}^l (-h_j(x)) = f(x) - s \sum_{j=1}^l h_j(x) \\ \text{subj. to } g(x) &\leq 0 \\ h(x) &\leq 0 \end{aligned} \quad (8)$$

f, g, h が凸である場合, ペナルティ・パラメータ s が与えられたもとで, 問題(8)の制約集合は凸集合であるが, 目的関数は凸関数の差になっている.

つぎに, 問題(8)のつぎのような関連問題を考える.

$$\begin{aligned} \min_{x, t} t - s \sum_{j=1}^l h_j(x) \\ \text{subj. to } f(x) &\leq t \\ g(x) &\leq 0 \\ h(x) &\leq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

f, g, h が凸である場合, 問題(9)は目的関数が凹関数, 制約集合が凸集合であるいわゆる凹計画問題である.

問題(8)と問題(9)の関係に関して, つぎの定理が成り立つ.

【定理4】 問題(8)と問題(9)は等価である. つまり,

(i) x^o が問題(8)の大域最適解ならば, 必ず (x^o, t^o) が問題(9)の大域最適解となるような $t^o \in R^1$ が存在する.

(ii) (x^o, t^o) が問題(9)の大域最適解ならば, x^o が問題(8)の大域最適解である.

(証明) (i) $t^o = f(x^o)$ とすると, 明らかに (x^o, t^o) が問題(9)の許容解である. もし, (x^o, t^o) が問題(9)の大域最適解でなければ,

$$t' - s \sum_{j=1}^l h_j(x') < t^o - s \sum_{j=1}^l h_j(x^o) \quad (10.a)$$

$$f(x') \leq t' \quad (10.b)$$

$$g(x') \leq 0, h(x') \leq 0 \quad (10.c)$$

なるような (x', t') が存在する。このとき, (10.c) より, x' が問題 (8) の許容解である。また,

$$\begin{aligned} f(x') - s \sum_{j=1}^l h_j(x') &\leq t' - s \sum_{j=1}^l h_j(x') \\ &< t^0 - s \sum_{j=1}^l h_j(x^0) \\ &= f(x^0) - s \sum_{j=1}^l h_j(x^0) \end{aligned}$$

となる。これは x^0 が問題 (8) の大域最適解であることに矛盾する。よって, (x^0, t^0) が問題 (9) の大域最適解である。

(ii) 背理法で証明する。 x^0 が問題 (8) の大域最適解でないとする,

$$f(x') - s \sum_{j=1}^l h_j(x') < f(x^0) - s \sum_{j=1}^l h_j(x^0) \quad (11.a)$$

$$g(x') \leq 0, h(x') \leq 0 \quad (11.b)$$

となるような x' が存在する。 $t' = f(x')$ とおくと, (x', t') は問題 (9) の許容解であり, かつ,

$$\begin{aligned} t' - s \sum_{j=1}^l h_j(x') &= f(x') - s \sum_{j=1}^l h_j(x') \\ &< f(x^0) - s \sum_{j=1}^l h_j(x^0) \\ &\leq t^0 - s \sum_{j=1}^l h_j(x^0) \end{aligned}$$

となる。これは (x^0, t^0) が問題 (9) の大域最適解であることに矛盾する。よって, x^0 が問題 (8) の大域最適解である。

この定理より, 補助問題 (8) を解くかわりに, 問題 (9) を解くことができる。 f, g, h が凸である場合, 問題 (9) は凹計画問題となる。それゆえ, 文献 2) の PART B で述べた手法 (具体的に, 文献 11) の支持超平面法や文献 12) の分離超平面法など) でその大域最適解を求めることができ, さらに 2 章のペナルティ法を用いれば元問題の大域最適解がもとまることを期待できる。

つぎに簡単な数値例を用いて本手法の有効性を示す。

[例題 1]

$$\begin{aligned} \min_x \quad & 3(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 0.5)^2 \\ \text{subj. to} \quad & -0.5x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 0.5x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Fig. 1 Feasible solution set and optimal solutions of example 1

この問題の許容解集合は Fig. 1 の $\widehat{AB}, \widehat{CD}$ の上の点からなる集合であり, 凸ではない。またこの問題にはつぎのような三つの局所最小解が存在する。

$$C(-1.2, -1.6)^T, D(-2, 0)^T, E(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$$

その中で, $E(4/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$ が大域最小解である (Fig. 1 参照)。

例題 1 のような等式と不等式制約をもつ問題に対する大域最適化手法は, 過去には提案されていない。そこで, 上記の手法でその大域最適解を求める。まず, つぎのような凹計画問題

$$\begin{aligned} \min_{x, t} \quad & t - s(x_1^2 + x_2^2 - 4) \\ \text{subj. to} \quad & 3(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 0.5)^2 - t \leq 0 \\ & -0.5x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 0.5x_1 - x_2 \leq 1 \\ & x_1^2 + x_2^2 - 4 \leq 0 \end{aligned}$$

を構成する。 s が与えられたとき, 支持超平面法¹¹⁾ や分離超平面法¹²⁾ でこの凹計画問題の大域最適解を求めることができ, ここでは分離超平面法を用いる。これによって, Table 1 のような結果を得た。ただし, Table 1 において, k はイテレーション番号で, $f^k = f(x^k)$, $h^k = h(x^k)$ である。Table 1 より, 例題 1 の大域最適解が得られたことがわかる。また, 目的関数値 $f(x^k)$, 拡大目的関数値 $f(x^k) - s^k h(x^k)$ は k に関して単調増加, ペナルティ関

Table 1 Computational results of example 1

k	s^k	(x_1^k, x_2^k)	t^k	f^k	$-h^k$	$-s^k h^k$	$f^k - s^k h^k$
1	0.01	(1.003, 0.502)	0.000	0.000	2.743	0.027	0.027
2	0.05	(1.017, 0.509)	0.001	0.001	2.706	0.135	0.136
3	0.25	(1.094, 0.545)	0.032	0.032	2.507	0.627	0.659
4	1.25	(1.714, 0.856)	1.911	1.911	0.328	0.410	2.321
5	6.25	(1.789, 0.894)	2.334	2.334	0.000	0.000	2.333
true values		(1.789, 0.894)	—	2.334	0	—	—

数値 $\phi(h(x^k)) = -h(x^k)$ は k に関して単調減少であることも検証された。

3.2 若干の拡張

3.1 節の仮定をすこし緩めて、たとえば、 g が凸関数であるが、 f, h が凸関数の差である場合を考える。 $h(x) = 0$ と $\sum_{j=1}^l |h_j(x)| = 0$ が等価であるので、 $h(x) = 0$ を考えるかわりに、 $\sum_{j=1}^l |h_j(x)| = 0$ を考える。このとき、 $h_j(x) = h_j^1(x) - h_j^2(x)$ 、 h_j^1, h_j^2 が凸関数であるとする、文献2)の定理 I.7 より、

$$\sum_{j=1}^l |h_j(x)| = h^1(x) - h^2(x)$$

となる。ただし、

$$h^1(x) = 2 \sum_{j=1}^l \max \{h_j^1(x), h_j^2(x)\}$$

$$h^2(x) = \sum_{j=1}^l (h_j^1(x) + h_j^2(x))$$

であり、 h^1, h^2 が凸関数である。 $f(x) = f^1(x) - f^2(x)$ 、 f^1, f^2 が凸関数であるとする、問題(1)は

$$\begin{aligned} & \min_{x, z} f^1(x) - f^2(x) \\ & \text{subj. to } g(x) \leq 0 \\ & \quad h^1(x) - z = 0 \\ & \quad h^2(x) - z = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

と等価である。このとき、補助問題(8)は

$$\begin{aligned} & \min_{x, z} f^1(x) - \{f^2(x) + s(h^1(x) + h^2(x) - 2z)\} \\ & \text{subj. to } g(x) \leq 0 \\ & \quad h^1(x) - z \leq 0 \\ & \quad h^2(x) - z \leq 0 \end{aligned} \quad (13)$$

となり、凸制約集合のもとでの凸関数の差の最小化問題である。定理4より、この問題は問題(9)の形の凹計画問題に等価変換でき、文献2)のPART Bで述べた手法でその大域最適解を求めることができる。

もっと一般的に、 f, g, h すべてが凸関数の差である場合を考える。 $g(x) \leq 0$ と $\max\{g_i(x), i=1, \dots, m\} \leq 0$ が等価であるので、 $g(x) \leq 0$ を考えるかわりに、 $\max\{g_i(x), i=1, \dots, m\} \leq 0$ を考える。まず、 $g_i(x) = g_i^1(x) - g_i^2(x)$ 、 g_i^1, g_i^2 が凸関数であるとする。このとき、文献2)の定理 I.7 より、

$$\max\{g_i(x), i=1, \dots, m\} = g^1(x) - g^2(x)$$

となる。ここで、

$$g^1(x) = \max \left\{ g_i^1(x) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m g_i^2(x), i=1, \dots, m \right\}$$

$$g^2(x) = \sum_{i=1}^m g_i^2(x)$$

であり、 g^1, g^2 が凸関数である。また、 $f(x) = f^1(x) - f^2(x)$ 、 $h_j(x) = h_j^1(x) - h_j^2(x)$ 、 f^1, f^2, h_j^1, h_j^2 が凸関数であるとする、問題(1)は

$$\min_x f^1(x) - f^2(x)$$

$$\text{subj. to } g^1(x) - g^2(x) \leq 0$$

$$h_j^1(x) - h_j^2(x) = 0, j=1, \dots, l$$

となり、さらに $g^1(x) - g^2(x) = z_1$ と置くと、

$$\min_{x, z_1} f^1(x) - f^2(x)$$

$$\text{subj. to } z_1 \leq 0$$

(14)

$$g^1(x) - (g^2(x) + z_1) = 0$$

$$h_j^1(x) - h_j^2(x) = 0, j=1, \dots, l$$

と等価変換できる。問題(14)の不等式制約関数は凸関数

であり、等式制約関数と目的関数は凸関数の差である。

本節の冒頭の説明より、問題(14)は

$$\min_{x, z_1, z_2} f^1(x) - f^2(x)$$

$$\text{subj. to } z_1 \leq 0$$

$$h^A(x, z_1) - z_2 = 0$$

$$h^B(x, z_1) - z_2 = 0$$

と等価である。ここで、

$$h^A(x, z_1) = 2 \sum_{j=0}^l \max \{h_j^1(x, z_1), h_j^2(x, z_1)\}$$

$$h^B(x, z_1) = \sum_{j=0}^l (h_j^1(x, z_1) + h_j^2(x, z_1))$$

であり、ただし、

$$h_0^1(x, z_1) = g^1(x), h_0^2(x, z_1) = g^2(x) + z_1,$$

$$h_r^j(x, z_1) = h_j^r(x), r=1, 2, j=1, \dots, l$$

である。このとき、補助問題(8)は

$$\begin{aligned} & \min_{x, z_1, z_2} f^1(x) - \{f^2(x) + s(h^A(x, z_1) \\ & \quad + h^B(x, z_1) - 2z_2)\} \\ & \text{subj. to } z_1 \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$h^A(x, z_1) - z_2 \leq 0$$

$$h^B(x, z_1) - z_2 \leq 0$$

となり、凸制約集合のもとでの凸関数の差の最小化問題である。定理4より、この問題は問題(9)の形の凹計画問題に等価変換でき、文献2)のPART Bで述べた手法でその大域最適解を求めることができる。

凸関数は凸関数の差という関数の特殊な場合であるため、3.1 節の場合はこの場合の特殊な場合とみることができる。

この章では、目的関数と制約関数が凸関数あるいは凸関数の差であるという前提だけのもとで分析を行っている。これは Mayne-Polak⁶⁾とは異なっていることに注意しよう。

4. 2レベル計画問題への応用

2レベル計画問題とは、未知パラメータに依存する下位の計画問題と、このパラメータを決定変数とし、その最適値を上位独自の目的関数や制約関数により決める

上位問題とからなり、しかも上位の決定が下位の最適解を考慮して行われる問題である。このような問題には先手と後手からなる非ゼロ和ゲーム問題である Stackelberg 問題⁷⁾ などがある。

上位の決定変数を $x \in R^N$ とし、下位の決定変数を $y \in R^n$ とする。また、上位の目的関数、制約関数をそれぞれ $F: R^{N+n} \rightarrow R^1$, $G: R^{N+n} \rightarrow R^m$ とし、下位の目的関数、制約関数をそれぞれ $f: R^{N+n} \rightarrow R^1$, $g: R^{N+n} \rightarrow R^m$ とする。このとき、2 レベル計画問題はつぎのように定式化される。

$$\min_x F(x, \check{y}(x)) \quad (16.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, \check{y}(x)) \leq 0 \quad (16.b)$$

$$f(x, \check{y}(x)) = \min_y f(x, y) \quad (16.c)$$

$$\text{subj. to } g(x, y) \leq 0 \quad (16.d)$$

ただし、 $\check{y}(x)$ は x が与えられたもとでの下位問題(16.

c, d) の最適解である。以下では簡単のために、 $\check{y}(x)$ は点対点写像で、つまり唯一解であるとする。

問題(16)に関して、つぎの仮定をおく。

仮定 2) f, g が y に関する連続微分可能な凸関数である。

仮定 3) (Slater の制約想定) x が与えられたとき、 $g(x, y) < 0$ なる y が存在する。

このとき、問題(16)がつぎのように等価変換できる。

$$\min_{x, y, u} F(x, y) \quad (17.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0 \quad (17.b)$$

$$g(x, y) \leq 0 \quad (17.c)$$

$$\nabla_y f(x, y) + u^T \nabla_y g(x, y) = 0 \quad (17.d)$$

$$u^T g(x, y) = 0 \quad (17.e)$$

$$u \geq 0 \quad (17.f)$$

ここで、相補性条件(17.e)が存在するために、 F, G, f, g に関する仮定をいかに強めても、問題(17)が非凸計画問題となり、通常の数値計画法では大域最適解がもとまらない。

以下ではつぎの仮定のもとで、2 章で述べたペナルティ法を応用して変換問題(17)を解くことを考える。

仮定 4) F, G が凸関数、 f が y に関して 2 次凸関数、 g が線形関数である。

このとき、

$$f(x, y) = \frac{1}{2} y^T A_0 y + (x^T B_0 + c_0^T) y + p(x)$$

$$g(x, y) = c_j^T y + d_j^T x + e_j, j=1, \dots, m$$

とする。ただし、 $p(x)$ は任意の関数で、 $A_0 \geq 0$ は非負定値行列である。これによって、2 レベル計画問題(16)の変換問題(17)は

$$\min_{x, y, u} F(x, y) \quad (18.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0 \quad (18.b)$$

$$c_j^T y + d_j^T x + e_j \leq 0, j=1, \dots, m \quad (18.c)$$

$$A_0^T y + B_0^T x + c_0 + (c_1, \dots, c_m) u = 0 \quad (18.d)$$

$$\sum_{j=1}^m u_j (c_j^T y + d_j^T x + e_j) = 0 \quad (18.e)$$

$$u \geq 0 \quad (18.f)$$

となる。この場合、問題(18)において、相補性条件(18.e)以外の制約式によって規定されている領域は凸集合である。

ところが、相補性条件(18.e)の制約関数は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m u_j (c_j^T y + d_j^T x + e_j) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{j=1}^m [u_j^2 + (c_j^T y + d_j^T x + e_j)^2] \right. \\ & \quad \left. - \sum_{j=1}^m (u_j - c_j^T y - d_j^T x - e_j)^2 \right\} \end{aligned}$$

と書き換えられる。 $u \geq 0, c_j^T y + d_j^T x + e_j \leq 0$ なので、凸関数の性質より、関数 $\sum_{j=1}^m [u_j^2 + (c_j^T y + d_j^T x + e_j)^2]$ と関数 $\sum_{j=1}^m (u_j - c_j^T y - d_j^T x - e_j)^2$ がともに凸関数である。つまり、相補性条件(18.e)の制約関数は“凸関数の差”の形に書き換えられる。このとき、問題(18)を問題(12)の形に等価変換してから 2 章のペナルティ法を適用してその大域最適解を求めることができる。ところが、ここでは、 $u \geq 0, c_j^T y + d_j^T x + e_j \leq 0$ なので、かならず

$$\sum_{j=1}^m u_j (c_j^T y + d_j^T x + e_j) \leq 0$$

となる。それゆえ、問題(12)の形に変換しないで、2 章のペナルティ法を直接問題(18)に適用するとき、その補助問題((8)に相当)の中の制約条件 $\sum_{j=1}^m u_j (c_j^T y + d_j^T x + e_j) \leq 0$ を省くことができる。したがって、問題(18)に変換(8)を施し、相補性条件(18.e)を目的関数に組み込むと、その補助問題がつぎのような凸制約集合のもとでの凸関数の差の最小化問題になる。

$$\min_{x, y, u} F(x, y) + s \sum_{j=1}^m (u_j - c_j^T y - d_j^T x - e_j)^2$$

$$- s \sum_{j=1}^m [u_j^2 + (c_j^T y + d_j^T x + e_j)^2]$$

$$\text{subj. to } G(x, y) \leq 0$$

$$c_j^T y + d_j^T x + e_j \leq 0, j=1, \dots, m \quad (19)$$

$$A_0^T y + B_0^T x + c_0 + (c_1, \dots, c_m) u = 0$$

$$u \geq 0$$

定理 4 より、この問題はつぎのような凹計画問題に等価変換できる。

$$\begin{aligned}
 \min_{x, y, u, t} \quad & t - s \sum_{j=1}^m [u_j^2 + (c_j^T y + d_j^T x + e_j)^2] \\
 \text{subj. to} \quad & F(x, y) + s \sum_{j=1}^m (u_j - c_j^T y - d_j^T x - e_j)^2 \leq t \\
 & G(x, y) \leq 0 \\
 & c_j^T y + d_j^T x + e_j \leq 0, j=1, \dots, m \quad (20) \\
 & A_0^T y + B_0^T x + c_0 + (c_1, \dots, c_m)u = 0 \\
 & u \geq 0
 \end{aligned}$$

ここでは、凹計画問題の制約集合が凸であることが大切であり、線形等式制約があっても差し支えないことに注意しよう。問題(20)の制約条件に等式制約があるため、その制約集合に内点をもたない。そのため、問題(20)を解くとき、内点を必要とするような手法（たとえば、支持超平面法¹¹⁾）を用いることができない。 s が与えられたとき、問題(20)の大域最適解を凹計画問題に対する分離超平面法¹²⁾などで計算できるので、2章の手法で問題(18)、ひいてはもとの2レベル計画問題(16)の大域最適解を求めることができる。

2レベル計画問題の計算手法は文献8)～10)にも与えられている。文献8)のダブル・ペナルティ法は下位問題の大域最適解が求まることを前提としたもとで、大域最適解に収束することを理論的に保証したが、数値計算では最急降下法などの局所最適化手法を用いているため、必ずしも大域最適解が得られるとは限らない。文献9)の混合整数計画問題に変換して解く手法は m 個の0-1変数を取り入れている。文献10)の分枝限定法も本質は m 個の0-1変数を取り入れている。これらに比べ、本手法は補助変数 t を取り入れるだけで、凹計画問題に対する手法を用いて2レベル計画問題の大域最適解を求めることができる。本手法の2レベル計画問題に対する有効性を検証するためには、つぎの数値例について考える。

[例題2]

$$\begin{aligned}
 \min_x \quad & 16x^2 + 9(\tilde{y}(x))^2 \\
 \text{subj. to} \quad & -4x + \tilde{y}(x) \leq 0 \\
 & x \geq 0 \\
 & (x + \tilde{y}(x) - 20)^2 \\
 & = \min_y (x + y - 20)^2 \\
 \text{subj. to} \quad & 4x + y - 50 \leq 0
 \end{aligned}$$

Fig. 2 Feasible solution set and optimal solutions of example 2

$$y \geq 0$$

この問題の許容解集合は Fig. 2 の AB, BC の上の点からなる集合であり、凸ではない。また、この問題にはつぎの二つの局所最小解が存在する。

$$D(7.2, 12.8)^T, E(11.25, 5)^T$$

その中で、 $E(11.25, 5)^T$ が大域最小解である (Fig. 2 参照)。

この問題に対し、ダブル・ペナルティ法では、必ずしも大域最適解が得られるとは限らない。また、混合整数計画問題に変換して解く手法や分枝限定法では、非線形混合整数計画問題を解く必要があり、数値計算が煩雑である。そこで、上記の手法でその大域最適解を求める。まず、つぎのような凹計画問題

$$\begin{aligned}
 \min_{x, y, u, t} \quad & t - s[u_1^2 + (4x + y - 50)^2 + u_2^2 + y^2] \\
 \text{subj. to} \quad & 16x^2 + 9y^2 + s[(u_1 - 4x - y + 50)^2 \\
 & + (u_2 + y)^2] - t \leq 0 \\
 & -4x + y \leq 0 \\
 & 4x + y - 50 \leq 0 \\
 & 2x + 2y + u_1 - u_2 - 40 = 0 \\
 & x, y, u_1, u_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

を構成する。 s が与えられたとき、分離超平面法¹²⁾でその大域最適解を求めることができる。これによって、Table 2 のような結果を得た。ただし、Table 2 において、 k がイテレーション番号で、 $F^k = F(x^k, y^k)$, $h^k = \sum_{j=1}^2 u_j^k g_j(x^k, y^k)$ である。

Table 2 Computational results of example 2

k	s^k	(x_1^k, x_2^k)	(u_1^k, u_2^k)	t^k	F^k	$-h^k$	$-s^k h^k$	$F^k - s^k h^k$
1	0.01	(0.000, 0.000)	(40.26, 0.261)	81.47	0.000	4026.1	40.26	40.26
2	0.1	(0.000, 0.000)	(40.08, 0.081)	811.5	0.000	4008.1	400.8	400.8
3	1.0	(11.25, 5.000)	(7.500, 0.000)	2331.3	2250.0	0.000	0.000	2250.0
true values		(11.25, 5)	(7.5, 0)	—	2250	0	—	—

Table 2 より, 目的関数値 $F(x^k, y^k)$, 拡大目的関数値 $F(x^k, y^k) - s^k \sum_{j=1}^m u_j^k g_j(x^k, y^k)$ は k に関して単調増加し, またペナルティ関数値 $\Phi(h(x^k, y^k, u^k)) = -h(x^k, y^k, u^k) = -\sum_{j=1}^m u_j^k g_j(x^k, y^k)$ は k に関して単調減少し, かつ例題 2 の大域最適解が得られたことがわかる。

ここでは, 上位目的関数 F と制約関数 G がともに凸関数の差で, 下位問題 (16.c, d) が 2 次凸計画問題である場合でも, 2 レベル計画問題 (16) の変換問題 (17) に対し 3.2 節の手法を用いればその補助問題を凹計画問題に等価変換できることを付け加えておく。

5. おわりに

本論文ではまず, 等式と不等式制約をもつ最適化問題に対し, 不等式制約だけをもつ補助問題をつくり, ペナルティ・パラメータが無限大に発散したとき, 補助問題の大域最適解が元問題の大域最適解に収束することを証明した。つぎに目的関数と制約関数が凸関数である場合および凸関数の差である場合に, 補助問題が, 大域最適解が求められる凹計画問題に等価変換できることを説明した。さらに適当な仮定のもとで 2 レベル計画問題を等式と不等式制約をもつ問題に等価変換でき, 上記の手法を適用してその大域最適解を求めることができることを説明した。数値例でこの手法の有効性が確認された。

本論文の手法は, 等式と不等式制約をもつ問題の大域最適化の一手法を与えており, とくに, 数値計算が困難である 2 レベル計画問題を凹計画問題に変換して解くことは有用な解法であるといえる。

参 考 文 献

- 1) A. Törn and A. Žilinskas: Global Optimization, Springer-Verlag (1989)
- 2) R. Horst and H. Tuy: Global Optimization-Deterministic Approaches, Springer-Verlag (1990)
- 3) R. Horst: Deterministic Methods in Constrained Global Optimization: Some Recent Advances and New Fields of Applications, Naval Research Logistics, **37**, 433/471 (1990)
- 4) W. I. Zangwill: Nonlinear Programming via Penalty Functions, Management Science, **13**, 344/358 (1967)
- 5) 志水, 相吉: 数値計画法, 昭晃堂 (1984)
- 6) D. Q. Mayne and E. Polak: Feasible Directions Algorithms for Optimization Problems with Equality and Inequality Constraints, Mathematical Programming, **11**, 67/80 (1976)
- 7) M. Simaan and J. B. Cruz: On the Stackelberg Strategy in Nonzero-sum Games, Journal of Optimization Theory and Applications, **11-5**, 533/555 (1973)
- 8) E. Aiyoshi and K. Shimizu: A Solution Method for the Static Constrained Stackelberg Problem via Penalty Method, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-29-12**, 1111/1114 (1984)
- 9) J. Fortuny-Amat and B. McCarl: A Representation and Economic Interpretation of a Two-level Programming Problem, Journal of the Operational Research Society, **32**, 783/792 (1981)
- 10) J. F. Bard: Convex Two-Level Optimization, Mathematical Programming, **40**, 15/27 (1988)
- 11) K. L. Hoffman: A Method for Globally Minimizing Concave Functions over Convex Sets, Mathematical Programming, **20**, 22/32 (1981)
- 12) T. V. Thieu, B. T. Tam and V. T. Ban: An Outer Approximation Method for Globally Minimizing a Concave Function over a Compact Convex Set, Acta Mathematica Vietnamica, **8**, 21/40 (1983)

[著 者 紹 介]

呂 敏 (学生会員)

1984 年, 中国西安交通大学情報制御工学科卒業。1989 年慶応義塾大学大学院理工学研究科修士課程修了。1992 年同博士課程修了。現在, 千代田化工建設(株)に勤務。2 レベル計画問題などの大域最適化手法に関する研究に従事。(工学博士)

志 水 清 孝 (正会員)

1962 年, 慶応義塾大学理工学部計測工学科卒業。1964 年同大学大学院修士課程修了。1967 年ケース工科大学博士課程修了。Ph. D. 現在, 慶大理工学部教授。専門はシステム制御, 数値計画法, 最適制御など。Sigma Xi などの会員。著書「多目的と競争の理論」, 「数値計画法」など。