予見サーボ系の設計と一般化予測制御 (GPC) システムについて†

江 上 正*・土 谷 武 士**・愛 田 一 雄***
北 森 俊 行****

Preview Servo System Design and Relation with GPC System

Tadashi EGAMI*, Takeshi TSUCHIYA**,
Kazuo AIDA*** and Toshiyuki KITAMORI****

Generalized Predictive Control (GPC) utilizing information on predicted future controlled variables of the controlled object has been proposed and has become of major interest. Some points are left unclear, for example, relation between the control system performance and the parameters of performance index employed has not been cleared in the GPC system and the GPC system is not always stable.

In this paper, preview servo system design method for the ARMAX by means of principle of optimality is proposed. This system is always guaranteed to be stable, and desirable number of preview steps and asymptotical properties of the control system are theoretically derived.

Using the result of this preview servo system, GPC system is constructed by means of principle of optimality.

Relation between the preview servo system and GPC system is examined to obtain properties of the preview servo system as compared with GPC system.

Key Words: GPC, preview servo system, principle of optimality, ARMAX model

1. ま え が き

近年、プロセス制御の分野において、目標値の未来値を利用するモデル予測制御が注目され、実プラントへの応用も広く行われるようになってい¹⁾。現在応用されている代表的なアルゴリズムは、MAC (Model Algorithmic Control), DMC (Dynamic Matrix Control) などである。これらのアルゴリズムでは、プラントモデル

の予測出力をインパルス応答やステップ応答を使って表現しており、プラントの動特性を直観的に捉えやすいという利点がある。しかし、このモデルはかなり多くのサンプル数で表現しなければならないため、制御則が長くなり、その計算に時間がかかると共に、計算機も大きな記憶容量を要するという欠点もある。

これに対して、ARMAX (Auto-Regressive Moving-Average Exogeneous) (ARX) モデルは、同定の際にその次数を決定しなければならないという煩わしさはあるが、少ないパラメータで表現できるので制御則が簡単になり、その計算時間と計算機の記憶容量が大幅に減少できるという長所がある。

D. W. Clarke ら^{2)~4)}は最近、ARMAX モデルに対してステップ状外乱を想定して表現した CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving-Average) モデルを用いる GPC (Generalized Predictive Control) を提案し、注目を集めている。この GPC は未来目標値を利用してプラントの制御性能を改善しようとする一種のディジタル予見制御である。しかし、設計の評価関数に使われる多くの設計パラメータと設計さ

† 第 13 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1991・1)

* 神奈川大学工学部 横浜市神奈川区六角橋 3-27-1

** 北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8

*** 新潟大学工学部 新潟市五十嵐 2 の町 8050

**** 東京大学工学部 東京都文京区本郷 7-3-1

* Faculty of Engineering, Kanagawa University, Yokohama

** Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

*** Faculty of Engineering, Niigata University, Niigata

**** Faculty of Engineering, University of Tokyo, Bunkyo-ku, Tokyo

(Received May 1, 1991)

(Revised November 27, 1991)

れた制御系の特性との関係が明確でなく、制御系が安定になるように設計パラメータの選択に考慮が必要であるという好ましくない性質も持っている⁴⁾。未来目標値を利用する予見制御系としては最適性の原理を用いた予見サーボ系⁵⁾なども提案されており、GPC システムとの関係についての考察などは興味深いテーマと思われる。

本論文ではまず CARIMA モデルで表わされた 1 入出力プラントに対して、GPC で用いる評価関数に終端項を付加した評価関数を用いて最適性の原理を用いた予見サーボ系を構成する。構成された制御系は常に安定となり、必要な予見ステップ数や評価関数の重みに対する制御系の漸近特性なども明らかになる。これは上述の GPC の好ましくない性質を回避した一つの設計法になっている。つぎにこの結果において終端項を零とした場合から GPC を最適性の原理を用いて誘導する。これによって GPC と予見サーボ系の比較が可能となり、GPC などのモデル予測制御が日本をはじめとした多くの研究者によって扱われてきた予見制御と同類のものであることを明らかにする。また、これにより GPC の評価関数に使われる設計パラメータと制御系の性質の関係を明らかにするための手がかりをあたえる。最後にシミュレーションにより本論文で提案する予見サーボ系の性質について検討を行う。

2. CARIMA モデルを用いた予見サーボ系の設計

2.1 制御対象

制御対象として次式の CARIMA モデルで表わされる 1 入出力線形プラントを考える。

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})z^{-L_m}u(k-1) + d(k) \quad (1)$$

ただし、

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \cdots + a_nz^{-n}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \cdots + b_mz^{-m}$$

ここで、 $m \leq n-1$ 、 $L_m \geq n-m-1$ であり、 $A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$ は互いに既約であるとする。また $d(k)$ はステップ外乱などを考慮して $d(k) = \eta(k)/\Delta(\eta(k))$ ：無相関なランダム系列、 $\Delta: 1-z^{-1}$ とする²⁾。

以下は(1)式で表わされるプラントに対して、(4)式の評価関数のもと、最適な操作量を求めるものを予見制御、(1)式で表わされるプラントに対して、(29)式の評価関数のもと、最適な操作量を求めるものを GPC と定義する。

いま(1)式はつぎのように状態方程式表現できる。

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}u(k) + \bar{d}(k) \quad (2a)$$

$$y(k) = \bar{C}\bar{x}(k) \quad (2b)$$

ここで、 $\bar{x}(k)$ は $(n+m+L_m) \times 1$ ベクトル、 $\bar{A}$ および

$\bar{B}$ 、 $\bar{C}$ は以下に示すような行列およびベクトルである。

$$\bar{x}(k) = [y(k) \cdots y(k-n+1) \quad u(k-L_m-m) \cdots u(k-1)]^T$$

$$\bar{d} = [d(k) \quad 0 \quad \cdots \quad 0]^T$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} A: n \times n \\ B: n \times (m+L_m) \\ A_u: (m+L_m) \times (m+L_m) \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C} = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]$$

ただし、 $L_m=0$ のときは B および $\bar{B}$ は

$$B = \begin{bmatrix} b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

となる。

(2)式において $(\bar{A}, \bar{B})$ は可制御であり、 $(\bar{C}, \bar{A})$ は可検出となる。

ここで、差分演算子 $\Delta = 1 - z^{-1}$ を導入するとつぎのような拡大系が構成される。このとき $d(k)$ は零として扱える。

$$\begin{bmatrix} y(k+1) \\ \Delta \bar{x}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{C}\bar{A} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(k) \\ \Delta \bar{x}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{C}\bar{B} \\ \bar{B} \end{bmatrix} \Delta u(k)$$

ただし、

$$L_m \geq 1 \text{ のとき } \bar{C}\bar{B} = 0$$

$$L_m = 0 \text{ のとき } \bar{C}\bar{B} = b_0$$

これを以下のように表わす。

$$x_0(k+1) = \bar{A}x_0(k) + \bar{B}\Delta u(k) \quad (3a)$$

また

$$y(k) = [1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0]x_0(k) = \bar{C}x_0(k) \quad (3b)$$

(1)式において $B(z^{-1})$ が $z=1$ に根をもたなければ、(3)式において $(\hat{A}, \hat{B})$ は可制御であり、 $(\hat{C}, \hat{A})$ は可検出となる。以下では(3)式の系は可制御、可検出であるとする。

2.2 予見サーボ系構成

いま現在時刻を k とするとき、現在から N ステップ未来までの目標値信号が既知である場合を考え、つぎのような評価関数 J を定義する。

$$\begin{aligned} J = & [\mathbf{R}_0(k+N) - \mathbf{x}_0(k+N)]^T \mathbf{H} \\ & \times \{\mathbf{R}_0(k+N) - \mathbf{x}_0(k+N)\} \\ & + \sum_{j=1}^N [\{\mathbf{R}_0(k+j) - \mathbf{x}_0(k+j)\}^T \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} \\ & \times \{\mathbf{R}_0(k+j) - \mathbf{x}_0(k+j)\} + \rho \Delta u(k+j-1)^2] \end{aligned} \quad (4)$$

ただし、 $R(k+j)$ は目標値信号であり、

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0(k+N) & \triangleq [R(k+N) \ 0 \cdots 0]^T \\ & = \hat{\mathbf{C}}^T R(k+N) \end{aligned}$$

$\mathbf{H}$: 半正定対称行列

ρ : 正実数

である。この評価関数と GPC の設計に使われる評価関数との大きな違いは右辺第 1 項の終端項が含まれていることである。

(4)式の評価関数を最小にするような制御入力是最適性の原理を用いて以下のように求められる⁹⁾。評価関数の $[k+j, k+N]$ における最小値を $\min J_{N-j}$ とすると、最適性の原理を適用することによって次式を得る。

$$\begin{aligned} \min J_{N-j} = & \min_{\Delta u(k+j)} [\{\mathbf{R}_0(k+j+1) - \mathbf{x}_0(k+j+1)\}^T \\ & \times \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} \{\mathbf{R}_0(k+j+1) - \mathbf{x}_0(k+j+1)\} \\ & + \rho \Delta u(k+j)^2 + \min J_{N-j+1}] \end{aligned} \quad (5)$$

ここで $\min J_{N-j}$ をつぎのように仮定する。

$$\begin{aligned} \min J_{N-j} = & \mathbf{x}_0^T(k+j) \mathbf{A}(N-j) \mathbf{x}_0(k+j) \\ & + \boldsymbol{\Theta}^T(N-j) \mathbf{x}_0(k+j) + \phi(N-j) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、

$\mathbf{A}(N-j)$: $(n+m+L_m) \times (n+m+L_m)$ 正定行列

$\boldsymbol{\Theta}(N-j)$: $(n+m+L_m) \times 1$ ベクトル

$\phi(N-j)$: スカラー値

(6)式を(5)式に代入して計算を進めると(6)式の仮定に矛盾はなく $\Delta u(k)$ の最適値は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & -D(N) \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N-1) \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0(k) \\ & + D(N) \hat{\mathbf{B}}^T \hat{\mathbf{C}}^T R(k+1) \\ & - \frac{1}{2} D(N)^{-1} \hat{\mathbf{B}}^T \boldsymbol{\Theta}(N-1) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(N-j) = & \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{S}(N-j+1) \hat{\mathbf{A}} \\ & - \hat{\mathbf{A}}^T \mathbf{S}(N-j+1) \hat{\mathbf{B}} D(N) \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N \end{aligned}$$

$$- \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N-j+1) \hat{\mathbf{A}} + \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}} \quad (8)$$

$$D(N-j) = [\rho + \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N-j+1) \hat{\mathbf{B}}]^{-1} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}^T(N-j) = & \{\boldsymbol{\Theta}^T(N-j+1) - 2R(k+j+1) \hat{\mathbf{C}}\} \\ & \times \boldsymbol{\xi}(N-j+1) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}(N-j+1) = & \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{B}} D(N-j) \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N-j+1) \hat{\mathbf{A}} \\ (j = & N-1, N-2, \dots, 1) \end{aligned} \quad (11)$$

であり、境界条件は

$$\mathbf{S}(0) = \mathbf{H} + \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}}$$

$$D(1) = [\rho + \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(0) \hat{\mathbf{B}}]^{-1}$$

$$\boldsymbol{\Theta}^T(0) = -2R(k+N) \hat{\mathbf{C}} \mathbf{H}$$

となる。(10)式から $\boldsymbol{\Theta}^T(N-1)$ を求め(7)式に代入すると(12)式ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & -D(N) \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{S}(N-1) \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0(k) \\ & + D(N) \hat{\mathbf{B}}^T [\hat{\mathbf{C}}^T, \boldsymbol{\xi}^T(N-2) \hat{\mathbf{C}}^T, \\ & \boldsymbol{\xi}^T(N-2) \boldsymbol{\xi}^T(N-3) \hat{\mathbf{C}}^T, \dots, \\ & \boldsymbol{\xi}^T(N-2) \cdots \boldsymbol{\xi}^T(0) [\mathbf{H} + \mathbf{I}] \hat{\mathbf{C}}^T] \bar{\mathbf{R}}(k) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、

$$\bar{\mathbf{R}}(k) \triangleq [R(k+1), R(k+2), \dots, R(k+N)]^T$$

(8)式の Riccati 方程式は、 $(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{A}})$ が可検出なので半正定一意解 $\mathbf{P}$ をもち、重み行列 $\mathbf{H}$ を $\mathbf{H} = \mathbf{P} - \hat{\mathbf{C}}^T \hat{\mathbf{C}}$ とすると、 $\mathbf{S}(i) = \mathbf{P}(i=0, 1, \dots, N-1)$ 、 $D(i) = D(i=1, \dots, N-1)$ 、 $\boldsymbol{\xi}(i) = \boldsymbol{\xi}(i=0, 1, \dots, N-2)$ と一定値となる。これらを(12)式に代入すると(13)式ようになる。

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & -D \hat{\mathbf{B}}^T \mathbf{P} \hat{\mathbf{A}} \mathbf{x}_0(k) \\ & + D \hat{\mathbf{B}}^T [\hat{\mathbf{C}}^T, \boldsymbol{\xi}^T \hat{\mathbf{C}}^T, (\boldsymbol{\xi}^T)^2 \hat{\mathbf{C}}^T, \dots, \\ & (\boldsymbol{\xi}^T)^{N-1} \mathbf{P} \hat{\mathbf{C}}^T] \bar{\mathbf{R}}(k) \\ = & \mathbf{F}_x \mathbf{x}_0(k) + \mathbf{F}_R \bar{\mathbf{R}}(k) \end{aligned} \quad (13)$$

(13)式において

$$\mathbf{F}_x = [f_y \ f_{x0} \cdots f_{x\bar{n}-1} \ f_{uL\bar{m}+\bar{m}} \cdots f_{u1}]$$

とおくと(14)式が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = & \mathbf{F}_x \mathbf{x}_0(k) + \mathbf{F}_R \bar{\mathbf{R}}(k) \\ = & [f_y \ f_{x0} \cdots f_{x\bar{n}-1} \ f_{uL\bar{m}+\bar{m}} \cdots f_{u1}] \mathbf{x}_0(k) + \mathbf{F}_R \bar{\mathbf{R}}(k) \\ = & (f_y + f_{x0}) y(k) + \cdots \\ & + (f_{x\bar{n}-1} - f_{x\bar{n}-2}) y(k-n+1) - f_{x\bar{n}-1} y(k-n) \\ & + f_{u1} \Delta u(k-1) + \cdots + f_{uL\bar{m}+\bar{m}} \Delta u(k-L_m \\ & - m) + \mathbf{F}_R \bar{\mathbf{R}}(k) \\ = & \mathbf{F}_R \bar{\mathbf{R}}(k) + \mathbf{F}_y \bar{\mathbf{y}}(k) + \mathbf{F}_u \bar{\mathbf{u}}(k) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(k) \triangleq [y(k), y(k-1), \dots, y(k-n)]^T$$

$$\bar{\mathbf{u}}(k) \triangleq [\Delta u(k-1), \Delta u(k-2), \dots, \Delta u(k-L_m-m)]^T$$

(14)式が ARMAX モデルから作成した状態空間モデルに対する予見サーボ系の制御入力となる。ここで以下のような変数を定義する。

$$\mathbf{M}_k(z) \triangleq [z, z^2, \dots, z^N]^T$$

$$\mathbf{M}_y(z^{-1}) \triangleq [z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-n}]^T$$

Fig. 1 Block diagram of preview servo system

Fig. 2 Equivalent block diagram in $j \geq l$

$$M_u(z^{-1}) \triangleq [z^{-1}, z^{-2}, \dots, z^{-(L_u+m)}]$$

これらの変数を用いて(14)式をブロック線図で表わすと Fig. 1 のようになる。

2.3 (4)式の評価関数の意義

(4)式の評価関数において終端項の重み H を $H = P - \hat{C}^T \hat{C}$ とすると、有限区間で定義される評価関数にもかかわらず、状態フィードバック係数行列 F_x が Riccati 方程式の半正定一意解 P によって与えられ、常に安定な制御系が設計できる。

このようにすることによって評価関数の意義があいまいになるようにみえる。しかし、(3)式の拡大系に対して(4)式の評価関数を用いて得た(13)式の予見サーボ系の制御則は、無限区間で定義された評価関数

$$J_0 = \sum_{i=k}^{\infty} [e^2(i) + \rho \Delta u^2(i)] \quad (15)$$

$$e(i) \triangleq y(i) - R(i)$$

を用いて設計する有限予見動作をもつ予見サーボ系の制御則⁶⁾と等価になることを示すことができる（付録参照）。(15)式の評価関数は、GPCの設計に使われる評価関数の最大評価ホライズンを無限大にした形とであり、その意義は明白である。

2.4 予見サーボ系の定常ロバスト性

Fig. 1 の制御系の定常ロバスト性について証明を行う。

いま(14)式のフィードバック係数行列 F_y および予見フィードフォワード係数行列 F_R を

$$F_R = [f_{R1}, f_{R2}, \dots, f_{RN}]$$

$$F_y = [f_{y0}, f_{y1}, \dots, f_{yn}]$$

のように表現し、 γ を

$$\gamma \triangleq \sum_{i=1}^N f_{Ri} \quad (16)$$

と定義する。 $k \geq l$ の k で目標値信号 $R(k)$ が定値 R^* になるものと仮定すると、 $k \geq l$ で Fig. 1 のブロック図は Fig. 2 と等価になる。

ここで(8)式に対する定常 Riccati 方程式を ξ を用いて表現すると

$$P = \xi^T P \hat{A} + \hat{C}^T \hat{C} \quad (17)$$

が得られる。両辺に $P \hat{A}$ を加え、 $(I - \xi^T)$ が正則として整理すると

$$P \hat{A} = (I - \xi^T)^{-1} P (\hat{A} - I) + (I - \xi^T)^{-1} \hat{C}^T \hat{C} \quad (18)$$

となる。ここで $\hat{A}$, $\hat{C}$ の定義式をつぎのように表現する。

$$\hat{A} = [\hat{C}^T A_1], \quad \hat{C} = [1 \quad 0_{n+m+L_m}] \quad (19)$$

ただし、

$$A_1 \triangleq \begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{A} \\ \hat{A} & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad 0_{n+m+L_m} : 1 \times (n+m+L_m) \text{ の零ベクトル}$$

(19)式の表現を用いると(18)式は

$$P[\hat{C}^T A_1] = (I - \xi^T)^{-1} P[0 \quad A_2] + (I - \xi^T)^{-1} \hat{C}^T [1 \quad 0_{n+m+L_m}] \quad (20)$$

$A_2 : \hat{A} - I$ によって得られる $(n+m+L_m+1) \times (n+m+L_m)$ の行列

となる。この第1項目の等式から

$$P \hat{C}^T = (I_{n+m+L_m} - \xi^T)^{-1} \hat{C}^T \quad (21)$$

が成り立つ。(16)式の γ は

$$\begin{aligned} \gamma &= D \hat{B}^T \{ I + \xi^T + \dots + (\xi^T)^{N-2} + (\xi^T)^{N-1} P \} \hat{C}^T \\ &= D \hat{B}^T \{ (I - (\xi^T)^{N-1}) (I - \xi^T)^{-1} \hat{C}^T \\ &\quad + (\xi^T)^{N-1} P \hat{C}^T \} \end{aligned} \quad (22)$$

となるが、(21)式の関係を用いると

$$\begin{aligned} \gamma &= D \hat{B}^T (I - \xi^T)^{-1} \hat{C}^T \\ &= D \hat{B}^T P \hat{C}^T \end{aligned} \quad (23)$$

となる。一方、

$$\begin{aligned} [F_y M_y(z^{-1})]_{z=1} &= \sum_{i=0}^n f_{yi} \\ &= f_y \\ &= -D \hat{B}^T P \hat{A} \hat{C}^T \\ &= -D \hat{B}^T P \hat{C}^T \end{aligned} \quad (24)$$

が得られる。ゆえに、(23)、(24)式から、 $\gamma = -[F_y M_y(z^{-1})]_{z=1}$ となるので、 $k \rightarrow \infty$ で Fig. 2 の制御系は直結フィードバックとなり、内部モデルの原理を満足する。したがって、Fig. 1 の制御系は全系の安定性が損なわれない範囲のプラントパラメータの変動およびステップ状のプラント外乱に対しても定常偏差は残らず、定常ロバストであることがわかる。

なお(4)式の評価関数において N を無限大とすると(13)式の予見フィードフォワード係数行列は

$$D \hat{B}^T [\hat{C}^T, \xi^T \hat{C}^T, (\xi^T)^2 \hat{C}^T, \dots] \quad (25)$$

となる。ここで $(k+N+1)$ ステップ以降の目標値信号をすべて $R(k+N)$ に等しいとして、 $R(k+j) (j \geq N)$ が定

値 R^* のときの予見フィードフォワード項は

$$\begin{aligned} D\bar{B}^T[\bar{C}^TR(k+1)+\xi^T\bar{C}^TR(k+2) \\ +\cdots+(\xi^T)^{N-2}\bar{C}^TR(k+N-1) \\ +\{(\xi^T)^{N-1}+(\xi^T)^N+\cdots\}\bar{C}^TR^*] \end{aligned} \quad (26)$$

となるが、(21)式の関係を用いると

$$\begin{aligned} \{(\xi^T)^{N-1}+(\xi^T)^N+\cdots\}\bar{C}^TR^* \\ =(\xi^T)^{N-1}P\bar{C}^TR^* \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つので(25)式は

$$D\bar{B}^T[\bar{C}^T, \xi^T\bar{C}^T, (\xi^T)^2\bar{C}^T, \cdots, (\xi^T)^{N-1}P\bar{C}^T]\bar{R}(k) \quad (28)$$

となり、(13)式の予見フィードフォワード項に一致する。すなわち、本章で導出した $(k+1)$ から $(k+N)$ ステップまでの未来目標値信号を利用した予見サーボ系は $(k+N+1)$ ステップ以降の目標値信号をすべて $R(k+N)$ と同じ値とみなしていることに相当することがわかる。

3. 最適性の原理を用いる GPC の設計

ここでは 2 章の結果を利用して、最適性の原理を用いた GPC システムの誘導を行う。これは Clarke らが提案している手法とは異なった手法により、GPC システムの設計を行うものである。

GPC システムにおいて用いられている評価関数 J_G は (29) 式のようなものである⁹⁾。

$$\begin{aligned} J_G = \sum_{j=N_1}^N \{R(k+j)-y(k+j)\}^2 \\ + \sum_{j=1}^{NU} \rho \Delta u(k+j-1)^2 \end{aligned} \quad (29)$$

ここで N は最大評価ホライズン、 N_1 は最小評価ホライズンそして NU は制御ホライズンと呼ばれている。このとき、 $j \geq NU+1$ で $\Delta u(k+j-1)=0$ と仮定される。(1) 式で表わされた制御対象に対して (29) 式の評価関数のものと最適な操作量を求めるものが GPC である。ここでは、 $N_1=1$ とし、まず $N=NU$ の場合、続いて $N \neq NU$ の場合の設計法を 2 章の結果を用いて述べる。

[1] $N=NU$ のとき

(27) 式の評価関数は

$$J_G = \sum_{j=1}^N \{[R(k+j)-y(k+j)]^2 + \rho \Delta u(k+j-1)^2\} \quad (30)$$

となる。(30) 式の評価関数 J_G は (4) 式の評価関数 J で $H=0$ とした場合に相当する。したがってこれを最小にする制御則は、2 章と同様に最適性の原理を用いて以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta u(k) = -D(N)\bar{B}^TS(N-1)\bar{A}x_0(k) \\ + D(N)\bar{B}^T[\bar{C}^T, \xi^T(N-2)\bar{C}^T, \\ \xi^T(N-2)\xi^T(N-3)\bar{C}^T, \cdots, \\ \xi^T(N-2)\cdots\xi^T(0)\bar{C}^T]\bar{R}(k) \end{aligned}$$

$$=F_x x_0(k) + F_R \bar{R}(k) \quad (31)$$

ここで $D(N)$, $S(N-1)$, $\xi(N-2)$, $\cdots$, $\xi(0)$ は、(8) ~ (11) 式を

$$S(0) = \bar{C}^T\bar{C}$$

$$D(1) = [\rho + \bar{B}^TS(0)\bar{B}]^{-1}$$

$$\Theta^T(0) = 0$$

の境界条件のもとで解いて得られる。

[2] $N \neq NU$ のとき

一般に $NU < N$ であり、 $j \geq NU+1$ で $\Delta u(k+j-1)=0$ を強制することになるので⁹⁾、(29) 式の評価関数は

$$\begin{aligned} J_G = \sum_{j=1}^{NU} \{[R(k+j)-y(k+j)]^2 \\ + \rho \Delta u(k+j-1)^2\} \\ + \sum_{j=NU+1}^N \{[R(k+j)-y(k+j)]^2 \\ + \varepsilon \Delta u(k+j-1)^2\} \end{aligned} \quad (32)$$

で、 $\varepsilon \rightarrow \infty$ となる。このときの制御入力 (31) 式と同じであるが、 $D(N-j)$ とその境界条件は

1) $N-1 \geq j \geq NU$ のとき

$$D(N-j) = [\varepsilon + \bar{B}^TS(N-j+1)\bar{B}]^{-1}$$

境界条件 $D(1) = [\varepsilon + \bar{B}^TS(0)\bar{B}]^{-1}$

2) $NU-1 \geq j \geq 0$ のとき

$$D(N-j) = [\rho + \bar{B}^TS(N-j+1)\bar{B}]^{-1}$$

境界条件 $D(N-NU+1) = [\rho + \bar{B}^TS(N-NU)\bar{B}]^{-1}$

となる。

つぎに、ここで求めた GPC の設計結果と Clarke らの手法による GPC の設計結果が一致することを簡単な例題で示しておく。

[例題]

いま、プラントとして $n=2$, $m=1$, $L_m=0$ のものを考え、

$$(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2})y(k) = (b_0+b_1z^{-1})u(k-1) \quad (33)$$

とする。ここで $N=NU=2$ としてフィードバック係数行列 F_x 、予見フィードフォワード係数行列 F_R を求める。

A) Clarke らの手法による GPC の設計²⁾

制御入力は

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= [1 \ 0](G^TG + \rho I)^{-1}G^T(\bar{R}(k) - f) \\ &= F_R \bar{R}(k) + f_{y0}y(k) + f_{y1}y(k-1) \\ &\quad + f_{y2}y(k-2) + f_{u1}\Delta u(k-1) \end{aligned}$$

となる。ここで、 f は Diophantine 方程式を解いて得られる現在から過去の y と過去の u に依存する項であり、 G はプラントの indicial 応答係数 g_0, g_1 で構成される行列

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

である。 g_0, g_1 は (33) 式を使って求めると

$$g_0 = b_0$$

$$g_1 = b_1 + (1 - a_1)b_0$$

となり，予見フィードフォワード係数行列 F_R は

$$\begin{aligned} F_R &= [1 \ 0](G^T G + \rho I)^{-1} G^T \\ &= \frac{[(\rho + g_0^2)b_0, \rho g_1]}{\rho^2 + (2g_0^2 + g_1^2)\rho + g_0^4} \\ &= \frac{[(\rho + b_0^2)b_0, \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}]}{\rho^2 + d\rho + b_0^4} \end{aligned}$$

$$d \triangleq 3b_0^2 + 2b_0b_1 + b_1^2 - a_1b_0(2b_0 + 2b_1 - a_1b_0)$$

となる．またフィードバック係数行列 $F_x = [f_{y0} \ f_{y1} \ f_{y2} \ f_{u1}]$ は，文献2)のDiophantine方程式のrecursionの手法に従って

$$\begin{aligned} f_{y0} &= [(\rho + b_0^2)b_0(a_1 - 1) \\ &\quad + \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}(a_1 + a_2 - 1 - a_1^2)] \\ &\quad / (\rho^2 + d\rho + b_0^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{y1} &= [(\rho + b_0^2)b_0(a_2 - a_1) \\ &\quad + \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}a_1(a_1 - 1 - a_2)] \\ &\quad / (\rho^2 + d\rho + b_0^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{y2} &= [-(\rho + b_0^2)b_0a_2 \\ &\quad + \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}a_2(a_1 - 1)] \\ &\quad / (\rho^2 + d\rho + b_0^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{u1} &= [(\rho + b_0^2)b_0b_1 \\ &\quad + \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}(1 - a_1)b_1] \\ &\quad / (\rho^2 + d\rho + b_0^4) \end{aligned}$$

と求まる．

B) 最適性の原理を用いるGPCの設計

(33)式を状態方程式表現すると(2)式にしたがって

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C} = [1 \ 0 \ 0]$$

となる．そして拡大系は(3)式にしたがって

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 1 - a_1 & -a_2 & b_1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

と求まる．以下3章[1]の手順にしたがってつぎのように順次求まる．

$$S(0) = \tilde{C}^T \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(1) = [\rho + \tilde{B}^T S(0) \tilde{B}]^{-1} = \frac{1}{\rho + b_0^2}$$

$$S(1) = \hat{A}^T S(0) \hat{A} - \hat{A}^T S(0) \hat{B} D(1) \hat{B}^T S(0) \hat{A}$$

$$+ \tilde{C}^T \tilde{C}$$

$$= \frac{\rho}{\rho + b_0^2}$$

$$\times \begin{bmatrix} 2 + b_0^2/\rho & -a_1 & -a_2 & b_1 \\ -a_1 & a_1^2 & a_1 a_2 & -a_1 b_1 \\ -a_2 & a_1 a_2 & a_2^2 & -a_2 b_1 \\ b_1 & -a_1 b_1 & -a_2 b_1 & b_1^2 \end{bmatrix}$$

$$D(2) = [\rho + \tilde{B}^T S(1) \tilde{B}]^{-1}$$

$$= \frac{\rho + b_0^2}{\rho^2 + d\rho + b_0^4}$$

$$\xi(0) = \hat{A} - \hat{B} D(1) \hat{B}^T S(0) \hat{A}$$

$$= \frac{\rho}{\rho + b_0^2} \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -a_2 & b_1 \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

したがって予見フィードフォワード係数行列 F_R は

$$\begin{aligned} F_R &= D(2) \tilde{B}^T [\tilde{C}^T \xi^T(0) \tilde{C}^T] \\ &= \frac{[(\rho + b_0^2)b_0, \rho\{b_1 + (1 - a_1)b_0\}]}{\rho^2 + d\rho + b_0^4} \end{aligned}$$

となり，フィードバック係数行列 F_x は

$$\begin{aligned} F_x &= -D(2) \tilde{B}^T S(1) \hat{A} \\ &= [f_{y0} + f_{y1} + f_{y2} \quad -f_{y1} - f_{y2} \quad -f_{y2} \quad f_{u1}] \end{aligned}$$

となってA)の結果と一致する．

4. 予見サーボ系の特徴

2章で提案した予見サーボ系は，Riccati方程式の定常解を用いてフィードバック係数行列および予見フィードフォワード係数行列を設計しているためつぎのような特徴がある．

[a] GPCでは， N および NU の選択によって，(31)式のフィードバック係数行列 F_x ，予見フィードフォワード係数行列 F_R が複雑に変化するが，予見サーボ系では(13)式の F_x が N に依存しないので，フィードバック特性は評価関数の重み ρ のみによって決まる．目標値信号の予見フィードフォワード効果のみが N に依存し N は予見ステップ数とみなせる．

[b] 予見サーボ系では ξ は常に安定行列となり， $\xi^{N-1} \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$ となる． $R(k+N)$ の予見フィードフォワード係数は $(\xi^T)^{N-1}$ に比例するので， $N \rightarrow \infty$ で漸近的に零になる．また評価関数の重み ρ が小さくなれば ξ の固有値も小さくなるので， N は小さくてよく，その度合は ξ の固有値の大きさに依存する⁷⁾．これに対してGPCシステムでは， N は制御系のフィードバック特性にも関係してくるので，予見サーボ系の場合のように制御系との明確な関係は述べられず， N は $N \geq 2(n+L)-1$ とし，実際にはプラントの立ち上がり時間にとるといわれている⁴⁾．

[c] 予見サーボ系では N に関係なく制御系は常に安定となり、制御系の $\rho \rightarrow 0$ での漸近特性も求められている⁸⁾。

ただし、 $N=NU$ で、これらが大きくなると GPC のフィードバック特性は予見サーボ系のものに漸近する。これは(4)式の評価関数 J を用いて計算されたフィードバック係数行列 F_x (あるいは F_y, F_u) は、2.3 より

$$J_\infty = \sum_{j=1}^{\infty} [\{R_0(k+j) - x_0(k+j)\}^T \bar{C}^T \bar{C} \times \{R_0(k+j) - x_0(k+j)\} + \rho \Delta u(k+j-1)^2] \quad (33)$$

を用いて設計されたものと同じになるが、(29)式の評価関数 J_G で $N \rightarrow \infty$ とすると J_∞ に漸近することから明らかとなる。

[d] GPC システムはプラントのパラメータとステップ応答係数を用いて制御系が設計できる。またパラメータをオンラインで同定するセルフチューニング制御に適している。一方、予見サーボ系の場合、セルフチューニング制御を行う場合には GPC システムに比べてある程度計算時間がかかると予想される。

6. 予見サーボ系のシミュレーション

2 章で提案した ARMAX モデルに対する予見サーボ系を DC モータ速度制御へ適用したシミュレーション結果を示す。用いた DC モータの定格値は 1.5 kW, 100 V, 18.5 A, 1500 rpm であり、サンプリング周期は 10 ms としている。このシステムの ARMAX モデルは(31)式と同様であり、

$$(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})y(k) = (b_0 + b_1 z^{-1})u(k-1) + d(k)$$

となる。ただし、 $y(k) = \omega_r(k)$ (回転速度)、 $u(k) = v_a(k)$ (電機子電圧)である。またこのシステムのパラメータ値は以下のようなものである。

$$\begin{aligned} a_1 &= -1.55 & a_2 &= 5.73 \times 10^{-1} \\ b_0 &= 3.59 \times 10^{-3} & b_1 &= 2.98 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

Fig. 3 にこのシミュレーション結果を示す。ここでは $\rho = 10.0$ とし、 $d(k) = 0$ としている。また電機子電流 $i_a(k)$ の応答も参考までに示してある。(a), (b), (c) はそれぞれ $N=2, N=20, N=40$ の場合のステップ状目標値変化に対するシステムの応答を示したものである。 N を大きくするにつれて、目標値の先だてて回転速度 $y(k)$ が変化し、入力 $u(k)$ が穏やかに変化していることがわかる。また $R(k+40)$ に対する予見フィードフォワード係数は $R(k+1)$ の係数の 17% 程度となっており、 N をこれ以上大きくしても応答はほとんど変わらないものとなっている。

(a) $N=2$

(b) $N=20$

(c) $N=40$

Fig. 3 System response of preview servo system

7. あとがき

CARIMA モデルに対する予見サーボ系の設計法を提案した。この予見サーボ系は常に安定な制御系となる特徴をもっている。ここで提案した予見サーボ系の設計法は、ランプ状目標入力の場合や多入出力系の場合にも容易に拡張できるものである。

つぎに最適性の原理を用いて GPC システムが設計できることも示した。これによって、制御ホライズン NU と制御系の性質との関係を考察できると考えられるが、これは今後の課題としたい。

また本論文では $d(k) = \eta(k)/\Delta$ としたが文献 3), 4) のように $d(k) = C(z^{-1})\eta(k)/\Delta$ で表わされているときの設計法についても今後の課題としたい。さらに MAC, DMC アルゴリズムと予見サーボ系の関係を明らかにすることや、オートチューニングに適した予見サーボ系のアルゴリズムの開発なども興味のある問題と思われる。

参 考 文 献

- 1) 西谷紘一：モデル予測制御の応用，計測と制御，28-11 (1989)
- 2) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tufts: Generalized Predictive Control-Part I. The Basic Algorithm, Automatica, 23-2 (1987)
- 3) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tufts: Generalized Predictive Control-Part II. Extensions and Interpretations, Automatica, 23-2 (1987)
- 4) D. W. Clarke and C. Mohtadi: Properties of Generalized Predictive Control, Automatica, 25-6 (1989)
- 5) 土谷，江上：多入力多出力ロバスト予見制御系設計法，計測自動制御学会論文集，22-8 (1986)
- 6) T. Katayama, T. Ohki, T. Inoue and T. Kato: Design of an Optimal Controller for a Discrete-Time System Subject to Previewable Demand, Int. J. of Control, 41-3, 677/699 (1985)
- 7) 江上，品田，土谷：予見フィードフォワード補償を含む部分状態フィードバック制御系構成法，計測自動制御学会論文集，23-12 (1987)
- 8) 愛田，北森：最適予見制御と最小 2 乗スモーthing の関係および平滑化逆システムの一構成法，計測自動制御学会論文集，25-4 (1989)

《付 録》

本予見サーボ系の制御則が文献 6) の予見サーボ系の制御則と等価になることの証明。

文献 6) の設計法では， N 時点未来までの目標値が予見できるものとし， $R(k) = 0 (k=0, -1, \dots)$ ， $\Delta R(k+i) (i=N+1, \dots)$ と仮定する。

この方法は制御則

$$\Delta u(k) = G_x \begin{bmatrix} e(k) \\ \Delta \tilde{x}(k) \end{bmatrix} + G_R \Delta \bar{R}(k) \quad (A1)$$

のフィードバック係数行列 G_x および予見フィードフォワード係数行列 G_R を拡大系

$$\begin{bmatrix} e(i+1) \\ \Delta \tilde{x}(i+1) \end{bmatrix} = \bar{A} \begin{bmatrix} e(i) \\ \Delta \tilde{x}(i) \end{bmatrix} + \bar{B} \Delta u(i) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta R(i+1) \quad (A2)$$

の拘束のもとで，(15) 式の評価関数 J_0 を最小にするように設計するものである。このとき設計結果は

$$G_x = -D\bar{B}'P\bar{A}x_0(k) \quad (A3)$$

$$G_R = D\bar{B}'[P\bar{C}^T, \xi^T P\bar{C}^T, (\xi^T)^2 P\bar{C}^T, \dots, (\xi^T)^{N-1} P\bar{C}^T] \quad (A4)$$

となる。(13) 式と (A3) 式より， $F_x = G_x$ となりフィードバック係数行列は一致する。一方，(A1) 式の予見制御部を $\Delta u_P(k)$ とすると (A4) 式から

$$\begin{aligned} \Delta u_P(k) &= G_R \Delta \bar{R}(k) \\ &= -D\bar{B}'P\bar{C}^T R(k) \\ &\quad + D\bar{B}'[(I - \xi^T)P\bar{C}^T, \xi^T(I - \xi^T)P\bar{C}^T, \\ &\quad \dots, (\xi^T)^{N-2}(I - \xi^T)P\bar{C}^T, \\ &\quad (\xi^T)^{N-1}P\bar{C}^T] \bar{R}(k) \end{aligned} \quad (A5)$$

となる。ここで (21) 式から

$$(I - \xi^T)P\bar{C}^T = \bar{C}^T \quad (A6)$$

の関係が成り立ち， $R(k) = 0$ の仮定と (A6) 式を，(A5) 式に用いて，(13) 式と比較すると， $F_R = G_R \Delta$ となり，予見フィードフォワード係数行列も一致する。

〔著 者 紹 介〕

江 上 正 (正会員)

1982 年，北海道大学工学部電気工学科卒業。86 年同大学院工学研究科博士課程修了。同年神奈川大学工学部機械工学科専任講師，90 年同助教授，現在に至る。デジタル制御理論とその応用に関する研究に従事 (工学博士)。

土 谷 武 士 (正会員)

1963 年，北海道大学工学部電気工学科卒業。65 年同大学院工学研究科修士課程修了。その後北海道大学工学部講師，助教授を経て現在同教授。制御工学，ロボット工学，パワーエレクトロニクスなどの研究に従事 (工学博士)。

愛 田 一 雄 (正会員)

1961 年，金沢大学工学部機械工学科卒業。(株)古河電気工業を経て 65 年新潟大学工学部精密工学科助手，現在機械システム工学科助教授。制御系の設計法に関する研究に従事。74 年計測自動制御学会論文賞受賞 (工学博士)。

北 森 俊 行 (正会員)

(Vol. 28, No. 4 参照)