外乱駆動行列の変動に対するロバスト性

山 田 功*・渡 部 慶 二*

Robustness to Perturbation of Disturbance Driving Matrices

Kou YAMADA* and Keiji WATANABE*

This paper is concerned with the robustness of the control systems in the presence of perturbation of disturbance driving matrices. A concept of equivalent disturbance is introduced. It is shown that the nominal plant is robust to the perturbation if the transfer matrix from disturbances to outputs does not have any poles and zeros on imaginary axis.

Key Words: robustness, equivalent disturbance, disturbance driving matrices

1. ま え が き

制御問題において、外乱の影響を小さくすることが一つの課題となっている。通常、実際の制御対象の公称数式モデル、外乱のモデルを考えて、その影響が小さくなるようにコントローラを設計する。最近開発が進められている H^∞ 制御などを用いると、広帯域の外乱の影響を小さくできることが知られている¹⁾。

ところが、実際の外乱がどのようなものでどの部分に加わっているのか、また外乱に対するゲインはいくらかなどを正確に知ることは難しいことがある。すなわち、外乱モデルと実際の外乱、公称数式モデルの外乱駆動行列と実際のそれとの間には誤差があることになる。そのような場合、公称数式モデル上で外乱の出力に対する影響を小さくできたとしても、実際にはどうなのかという疑問があるが、まだ明確にされていないようである。

本稿では、上記の外乱駆動行列の変動に対するロバスト性の問題を、外乱駆動行列に誤差があるとき、制御対象の外乱を等価的に公称数式モデル上の外乱として扱えるかどうかという観点から検討する。外乱が多項式外乱、周期性外乱で、公称数式モデルの状態に加わる外乱から出力までの伝達行列が、虚軸上に極、伝達零点をもたない場合に、制御対象と公称数式モデルの外乱駆動行列に

ずれがあっても、制御対象の外乱は公称数式モデル上の外乱に等価的に置き換えることが可能なことを示す。また、外乱駆動行列の変動があっても公称数式モデル上の制御特性が実際の制御対象上で保存される条件を明らかにする。本稿の定性的な結果は、制御理論の実システムへの応用の際に、制御理論の有効性を保証するのに役立つ。

2. 問題の記述

制御対象の公称数式モデルの状態方程式が、次式のようにならねとす。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) &= Cx(t) \quad (t \geq 0)\end{aligned}\quad (1)$$

ただし、 $u \in R^m$ は制御入力、 $y \in R^r$ は観測出力、 $x \in R^n$ は状態、初期状態を $x(0)$ 、 $w \in R^p$ は外乱、 $A \in R^{n \times n}$ 、 $B_1 \in R^{n \times p}$ 、 $B_2 \in R^{n \times m}$ 、 $C \in R^{r \times n}$ 、 $C_1 \in R^{r \times p}$ 、 (A, B_2) 可制御、 (C, A) 可観測、 $\text{rank}[C(sI_n - A)^{-1}B_1] = \max(r, p)$ とする。 I_n は $n \times n$ 単位行列を表わす。 B_1 、 C_1 を外乱駆動行列と呼ぶ。

(1) 式の公称数式モデルに対して、実際の制御対象は、外乱駆動行列、外乱が公称数式モデルのそれとは異なり次式のようになっているとす。

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 \tilde{w}(t) + B_2 u(t) \\ \tilde{y}(t) &= C\tilde{x}(t) + \tilde{C}_1 \tilde{w}(t) \quad (t \geq 0)\end{aligned}\quad (2)$$

ただし、 $\tilde{y} \in R^r$ は観測出力、 $\tilde{x} \in R^n$ は状態、初期状態を $\tilde{x}(0)$ 、 $\tilde{w} \in R^p$ は外乱、 $\tilde{B}_1 \in R^{n \times p}$ 、 $\tilde{C}_1 \in R^{r \times p}$ とする。

このとき、つぎの二つの問題を考える。

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

(Received October 25, 1991)

(Revised March 9, 1992)

(問題 1)

制御対象(2)式の状態の初期状態 $\bar{x}(0)$, 外乱 $\bar{w}(t)$ に
対し,

$$y(t) = \bar{y}(t) \quad (t \geq 0) \quad (3)$$

とする公称数式モデルの初期状態 $x(0)$, 外乱 $w(t)$ が存
在するための条件は何か。□

【定義 1】

ある外乱駆動行列 $\bar{B}_1$ に対し, $y = \bar{y}$ を満足する公称数
式モデル(1)の外乱 w があったとする。このとき, 制御
対象の外乱駆動行列が $\bar{B}_1$ から $\bar{B}_1 + \Delta \bar{B}_1$ に変動したと
き(3)式を満足する公称数式モデルの初期状態 $x(0)$, 外
乱 $w(t)$ があれば, 公称数式モデルは外乱駆動行列の変
動に対しロバストであるという。■

(問題 2)

公称数式モデルが, 外乱駆動行列の変動に対しロバ
ストであるための条件は何か。□

上記の問題を一般的に扱うことは難しいので, 多項式
外乱, 周期性外乱に限定して考える。制御対象の外乱 $\bar{w}$ を

$$\bar{w}(t) = \bar{D} \frac{t^M}{M!} + \bar{K} \sin \omega_0 t + \bar{L} \cos \omega_0 t \quad (4)$$

$\bar{D}, \bar{K}, \bar{L} \in R^m$ とする。公称数式モデル上の外乱 w も, こ
れにあわせて

$$w(t) = \sum_{i=0}^M D_i \frac{t^i}{i!} + K \sin \omega_0 t + L \cos \omega_0 t \quad (5)$$

とする。ただし, $D_i (i=0, \dots, M), K, L \in R^p$ とする。

《定理 1》

公称数式モデル(1)式において $p \geq r$ (伝達行列 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が横長)で, $|sI - A| = 0$ が $s=0, \pm j\omega_0$ に根を
もたないとする。伝達行列 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が $s=0, \pm j\omega_0$
に伝達零点³⁾をもたないとき, (2)式の $\bar{w}(t), \bar{x}(0)$ に対
し, (3)式を満たす外乱 $w(t)$, 初期状態 $x(0)$ がある。ま
た, (2)式の $\bar{B}_1$ が $\bar{B}_1 + \Delta \bar{B}_1$ と変動しても(3)式を満た
す $w(t), x(0)$ があり, 公称数式モデルは外乱駆動行列の
変動に対しロバストである。■

3. 定理の証明

定理の前半は,

$$y(t) = \bar{y}(t) \quad (t \geq 0) \quad (3) \text{再}$$

とする(5)式の D_i, K, L および $x(0)$ の存在を示すこと
で証明する。証明にはつぎの二つの補題が必要である。

【補題 1】

$|sI - A| = 0$ が $s=0$ に根をもたないとする。

$C(-A)^{-1}B_1$ が行フルランクであるための必要十分条件
は, 伝達行列 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が $s=0$ に伝達零点をもた
ないことである。■

(証明)

伝達零点の定義より明らか。■

【補題 2】

$|sI - A| = 0$ が $s = \pm j\omega_0$ に根をもたないとする。

$$C(j\omega_0 I_n - A)^{-1}B_1 = \Phi + j\Psi \quad (6)$$

$$(\Phi, \Psi \in R^{r \times p})$$

とおいたときに, 行列

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix}$$

が行フルランクであるための必要十分条件は, 伝達行列
 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が $s = \pm j\omega_0$ に伝達零点をもたないこ
とである。■

(証明)

(i) 必要性

ω_0 で

$$\text{rank}[C(j\omega_0 I_n - A)^{-1}B_1] < r \quad (7)$$

になると仮定する。すると,

$$(\xi + j\eta)C(j\omega_0 I_n - A)^{-1}B_1 = 0 \quad (8)$$

にする $(\xi + j\eta) \neq 0 (\xi, \eta \in R^{p \times r})$ が存在する。上式を(6)
式を用いて分解すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & (\xi + j\eta)C(j\omega_0 I_n - A)^{-1}B_1 \\ &= (\xi + j\eta)(\Phi + j\Psi) \\ &= (\xi\Phi - \eta\Psi) + j(\eta\Phi + \xi\Psi) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

したがって,

$$(\xi\Phi - \eta\Psi) = 0 \quad (10)$$

$$(\eta\Phi + \xi\Psi) = 0 \quad (11)$$

が成り立つ。この式を次式のように書き直す。

$$\begin{bmatrix} \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

これより

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \text{ は行フルランクではない。}$$

(ii) 十分性

$C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が $s = \pm j\omega_0$ なる点を零点としてもつ
ていないとする。つまり,

$$\text{rank}[C(j\omega_0 I_n - A)^{-1}B_1] = r \quad (13)$$

とする。すると,

$$(\Phi + j\Psi)(\tilde{\Phi} + j\tilde{\Psi}) = I_r \quad (14)$$

にする $\tilde{\Phi} + j\tilde{\Psi}$ が存在する。ただし, $\tilde{\Phi} \in R^{m \times r}, \tilde{\Psi} \in R^{m \times r}$
である。したがって,

$$\Phi\tilde{\Phi} - \Psi\tilde{\Psi} = I_r \quad (15)$$

$$\Phi\tilde{\Psi} + \Psi\tilde{\Phi} = 0 \quad (16)$$

が成り立つ。このことから

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & -\tilde{\Psi} \\ \tilde{\Psi} & \tilde{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \quad (17)$$

が成り立ち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} & -\tilde{\Psi} \\ \tilde{\Psi} & \tilde{\Phi} \end{bmatrix} = r \quad (18)$$

となる。これより

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \text{は行フルランクとなる。}$$

外乱は重ね合わせが出来るので、多項式外乱と周期性外乱に分割して証明する。

3.1 多項式外乱に対して

状態に加わる外乱

$$\bar{w}(t) = \bar{D} \frac{t^M}{M!} \quad (19)$$

に対し、(3)式を満足する公称数式モデル上の外乱

$$w(t) = \sum_{i=0}^M D_i \frac{t^i}{i!} \quad (20)$$

が存在することを示す。多項式外乱(19)式に対する(2)式の出力 $\bar{y}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= C(sI_n - A)^{-1} \bar{B}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M+1}} + \bar{C}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M+1}} \\ &\quad + C(sI_n - A)^{-1} \bar{x}(0) \\ &= \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j-1} C(-A)^{-j} \bar{B}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M-j+2}} \\ &\quad + \left\{ C(sI_n - A)^{-1} \bar{B}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M+1}} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j-1} C(-A)^{-j} \bar{B}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M-j+2}} \right\} \\ &\quad + \bar{C}_1 \frac{\bar{D}}{s^{M+1}} + C(sI_n - A)^{-1} \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \sum_{j=1}^{M+1} (-1)^{j-1} \frac{1}{(M-j+1)!} C(-A)^{-j} \bar{B}_1 \bar{D} t^{j-1} \\ &\quad + C e^{At} \bar{x}_0 + \bar{C}_1 \bar{D} \frac{t^M}{M!} + C e^{At} \bar{x}(0) \\ &= \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ \frac{t^M I_r}{M!} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ C(-A)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \bar{D} \\ &\quad + C e^{At} \bar{x}_0 + C e^{At} \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (22)$$

となり、 $\bar{x}_0$ は、 $\int_0^t C e^{A\tau} \bar{B}_1 \bar{w}(\tau) d\tau$ の定常項であるので

$$\bar{x}_0 = (-1)^{M+1} (-A)^{-M-1} \bar{B}_1 \bar{D} \quad (23)$$

とまとめられる。

また、多項式外乱(20)式に対する(1)式の出力 y は、上記と同様にして求めると

$$y(t) = \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ \frac{t^M I_r}{M!} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C(-A)^{-1} B_1 & \cdots \\ & \ddots \\ 0 & C(-A)^{-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} B_1 \\ \vdots \\ C(-A)^{-1} B_1 \end{bmatrix}$$

$$* \begin{bmatrix} D_0 \\ \vdots \\ D_M \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^M C e^{At} x_{0i} + C e^{At} x(0) \quad (24)$$

$$x_{0i} = (-1)^{i+1} (-A)^{-i-1} B_1 D_i \quad (25)$$

となる。(22)式と上式と比較すると、仮定と補題1より $C(-A)^{-1} B_1$ が行フルランクであるから

$$\begin{bmatrix} C(-A)^{-1} B_1 & \cdots & (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} B_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & C(-A)^{-1} B_1 \end{bmatrix}$$

が行フルランクとなり

$$\begin{bmatrix} C(-A)^{-1} B_1 & \cdots & (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} B_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & C(-A)^{-1} B_1 \end{bmatrix} \Gamma_0 = I_{(M+1)r} \quad (26)$$

とする $\Gamma_0 \in R^{(M+1)(p-q) \times (M+1)r}$ が存在する。したがって、 $D_i, x(0)$ を

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ \vdots \\ D_M \end{bmatrix} = \Gamma_0 \begin{bmatrix} (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ C(-A)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \bar{D} \quad (27)$$

$$x(0) = \bar{x}_0 - \sum_{i=0}^M x_{0i} + \bar{x}(0) \quad (28)$$

とすることにより(3)式を満足する。

3.2 正弦波(余弦波)に対して

正弦波, 余弦波外乱

$$\bar{w}(t) = \bar{K} \sin(\omega_0 t) + \bar{L} \cos(\omega_0 t) \quad (29)$$

に対して、(3)式を満足する公称数式モデル上の外乱

$$w(t) = K \sin(\omega_0 t) + L \cos(\omega_0 t) \quad (30)$$

が存在することを示す。(29)式の外乱に対する(2)式の出力 $\bar{y}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= C(sI_n - A)^{-1} \bar{B}_1 \left\{ \frac{\bar{K} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\bar{L} s}{s^2 + \omega_0^2} \right\} \\ &\quad + \bar{C}_1 \left\{ \frac{\bar{K} \omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\bar{L} s}{s^2 + \omega_0^2} \right\} \\ &\quad + C(sI_n - A)^{-1} \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、

$$C(j\omega_0 I_n - A)^{-1} \bar{B}_1 = \bar{\Phi} + j\bar{\Psi} \quad (32)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \bar{y}(s) &= \frac{\bar{\Phi} - j\bar{\Psi}}{-2j} \frac{\bar{K}}{s + j\omega_0} + \frac{\bar{\Phi} + j\bar{\Psi}}{2j} \frac{\bar{K}}{s - j\omega_0} \\ &\quad + \frac{\bar{\Phi} - j\bar{\Psi}}{2} \frac{\bar{L}}{s + j\omega_0} + \frac{\bar{\Phi} + j\bar{\Psi}}{2} \frac{\bar{L}}{s - j\omega_0} \\ &\quad + \bar{H}(s) + C(sI_n - A)^{-1} \bar{x}(0) \end{aligned} \quad (33)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{H}(s) = & C(sI_n - A)^{-1} \bar{B}_1 \left\{ \frac{\bar{K}\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} + \frac{\bar{L}s}{s^2 + \omega_0^2} \right\} \\ & - \left\{ \frac{\bar{K}}{-2j} + \frac{\bar{L}}{2} \right\} \frac{C(-j\omega_0 I_n - A)^{-1} \bar{B}_1}{s + j\omega_0} \\ & - \left\{ \frac{\bar{K}}{2j} + \frac{\bar{L}}{2} \right\} \frac{C(j\omega_0 I_n - A)^{-1} \bar{B}_1}{s - j\omega_0} \end{aligned} \quad (34)$$

である。(33)式をラプラス逆変換すると

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & (\bar{\Phi}\bar{K} - \bar{\Psi}\bar{L})\sin\omega_0 t \\ & + (\bar{\Psi}\bar{K} + \bar{\Phi}\bar{L})\cos\omega_0 t \\ & + \bar{C}_1\{\bar{K}\sin(\omega_0 t) + \bar{L}\cos(\omega_0 t)\} \\ & + Ce^{At}\bar{x}_i + Ce^{At}\bar{x}(0) \\ = & \begin{bmatrix} \sin\omega_0 t I_r \\ \cos\omega_0 t I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{L} \end{bmatrix} \\ & + Ce^{At}\bar{x}_i + Ce^{At}\bar{x}(0) \end{aligned} \quad (35)$$

が得られる。ただし、

$$\bar{x}_i = \{\omega_0^2 I_n + A^2\}^{-1} (\omega_0 \bar{B}_1 \bar{K} + A \bar{B}_1 \bar{L}) \quad (36)$$

である。

また、(30)式の正弦波、余弦波外乱に対する(1)式の出力 y は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} y(t) = & \begin{bmatrix} \sin\omega_0 t I_r \\ \cos\omega_0 t I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} \\ & + Ce^{At}x_i + Ce^{At}x(0) \end{aligned} \quad (37)$$

となる。ただし、

$$x_i = \{\omega_0^2 I_n + A^2\}^{-1} (\omega_0 B_1 K + A B_1 L) \quad (38)$$

である。仮定と補題 2 から

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix}$$

がフルランクなので

$$\begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \Gamma = I_{2r} \quad (39)$$

にする $\Gamma \in R^{2(p-q) \times 2r}$ が存在し

$$\begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \Phi & -\Psi \\ \Psi & \Phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{L} \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$x(0) = \bar{x}_i - x_i + \bar{x}(0) \quad (41)$$

することにより(3)式を満足し、定理の前半が証明された。

定理の後半は、(26)式を満たす Γ_0 、(39)式を満たす Γ の可解の条件は、 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ の伝達零点に依存し、 $\bar{B}_1$ は関係しないので、 $\bar{B}_1 + \Delta\bar{B}_1$ に対しても、(3)式を満たす $w(t)$ 、 $x(0)$ があり、証明された。 ■

4. 伝達行列が縦長行列の場合

以上述べてきたことは公称数式モデルの伝達行列が横長行列 ($p \geq r$) の場合に成り立つことであるので、つぎに縦長行列 ($r > p$) の場合について検討する。ただし、 $\text{rank}[C(sI_n - A)^{-1}B_1] = p$ とする。

$$X \in R^{p \times r} \text{ を}$$

$$\text{rank}[XC(sI - A)^{-1}B_1] = p \quad (42)$$

となるように選ぶ。状態に加わる外乱に対しては

$$\begin{bmatrix} XC(-A)^{-1}B_1 & \cdots & (-1)^M XC(-A)^{-M+1}B_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & XC(-A)^{-1}B_1 \end{bmatrix} \Gamma_0 = I_{(M+1)p} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} X\Phi & -X\Psi \\ X\Psi & X\Phi \end{bmatrix} \Gamma = I_{2p} \quad (44)$$

にする $\Gamma_0 \in R^{(M+1)(p-q) \times (M+1)p}$ 、 $\Gamma \in R^{2(p-q) \times 2p}$ が存在すれば、 w を(27)、(40)式のように定めることができる。

したがって、3章と同様にしてつぎの定理が得られる。

《定理 2》

公称数式モデル(1)式において $r \geq p$ (伝達行列 $C(sI_n - A)^{-1}B_1$ が縦長)で、 $|sI - A| = 0$ が $s=0$ 、 $\pm j\omega_0$ に根をもたないとする。公称数式モデル上の状態に加わる外乱から出力までの伝達行列に左から X を乗じた $XC(sI_n - A)^{-1}B_1$ が $s=0$ 、 $\pm j\omega_0$ に極、伝達零点をもたないとき、

$$Xy(t) = X\bar{y}(t) \quad (45)$$

満たす外乱 $w(t)$ 、初期状態 $x(0)$ があり、公称数式モデルは外乱駆動行列の変動に対しロバストである。 ■

(証明略)

5. 制御への応用

等価外乱をもつ公称数式モデルの制御への応用について考える。

(2)式で表わされる実際の制御対象に、多項式外乱

$$\bar{w}(t) = \bar{D} \frac{t^M}{M!} \quad (46)$$

が加わっているとする。ただし、 $C(sI - A)^{-1}B_2$ は原点に極、伝達零点をもたないとする、等価外乱の考えから

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) = & \begin{bmatrix} I_r \\ \vdots \\ \frac{t^M I_r}{M!} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C(-A)^{-1}B_2 & \cdots \\ & \ddots \\ 0 & & C(-A)^{-1}B_2 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} D_0 \\ \vdots \\ D_M \end{bmatrix} + \sum_{i=0}^M Ce^{At}x_{0i} + Ce^{At}x(0) \end{aligned} \quad (47)$$

$$x_{0i} = (-1)^{i+1} (-A)^{-i-1} B_2 D_i \quad (48)$$

とする $D_0, \dots, D_M$ があり、

$$\begin{bmatrix} D_0 \\ \vdots \\ D_M \end{bmatrix} = \Gamma_0 \begin{bmatrix} (-1)^M M! C(-A)^{-M+1} \bar{B}_1 \\ \vdots \\ C(-A)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \bar{D} \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} C(-A)^{-1}B_2 & \cdots & (-1)^M M! C(-A)^{-M+1}B_2 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & C(-A)^{-1}B_2 \end{bmatrix} \Gamma_0$$

$$= I_{(M+1)r} \quad (50)$$

$$x(0) = \bar{x}_0 - \sum_{i=0}^M x_{0i} + \bar{x}(0) \quad (51)$$

で与えられる。(47)式を状態空間表現すると、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 w(t) + B_2 u(t) \\ \bar{y}(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (52)$$

$$w(t) = \sum_{i=0}^M D_i \frac{t^i}{i!} \quad (53)$$

と表わされる。

このとき、(52)式の入力 $u(t)$ を積分器をとおり、次式で与える。

$$\begin{aligned} \dot{x}_I(t) &= Jx_I(t) + B_I v(t) \\ u(t) &= C_I x_I(t) \end{aligned} \quad (54)$$

ただし、 $x_I \in R^{m(M+1)+1}$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_m & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$B_I = [I \ 0 \ 0]^T, C_I = [I \ 0 \ 0]$$

である。(52)式と(54)式から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_I(t) \\ \dot{x}_d(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_2 C_I & B_2 C_I \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + [0 \ B_I^T \ 0]^T v(t) \\ \bar{y}(t) &= [C \ 0 \ 0] [x(t)^T \ x_I(t)^T \ x_d(t)^T]^T \end{aligned} \quad (56)$$

$$x_d(0) = [D_0^T \cdots D_M^T]^T$$

とまとめられる。この系に座標変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}_I(t) \\ \bar{x}_d(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_I(t) \\ x_d(t) \end{bmatrix} \quad (57)$$

を施すと

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ \dot{\bar{x}}_I(t) \\ \dot{\bar{x}}_d(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_2 C_I & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ \bar{x}_I(t) \\ \bar{x}_d(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + [0 \ B_I^T \ 0]^T v(t) \\ \bar{y}(t) &= [C \ 0 \ 0] [\bar{x}(t)^T \ \bar{x}_I(t)^T \ \bar{x}_d(t)^T]^T \end{aligned} \quad (58)$$

となり、外乱は $\bar{y}$ からみて不可観測になる。そこで、適当な制御器 $G_c(s)$ を用いて

$$v(s) = -G_c(s) \bar{y}(s) \quad (59)$$

とし閉ループ系を安定にすれば、 $t \rightarrow \infty$ で $\bar{y}(t) \rightarrow 0$ とできる。すなわち、多項式外乱の定常偏差を 0 にできる。ここで注意すべきことは $C(sI - A)^{-1}B_2$ は原点に極、伝達零点をもたなければ、外乱駆動行列の変動に対するロ

バスト性から外乱駆動行列 $\bar{B}_1$ が変動しても(3)式を満たす(1)式の $w(t)$ があることである。後は(57)式の変換で外乱を不可観測にでき、(59)式の制御で $t \rightarrow \infty$ で $\bar{y}(t) \rightarrow 0$ にできる。上記のことは、 $\bar{B}_1$ が正確にわからなくても、公称数式モデル (A, B_2, C) 上で(54)式の積分器をつけることで、定常偏差を 0 にすることができることを意味し、これは従来のサーボ理論⁴⁾の結果に符合する。

つぎに、実際の制御対象(2)式に正弦波、余弦波外乱

$$\bar{w}(t) = \bar{K} \sin(\omega_0 t) + \bar{L} \cos(\omega_0 t) \quad (60)$$

が加わっているときに、 $A + B_2 F$ を安定にする F を用いて、状態フィードバック

$$u(t) = F \bar{x}(t) \quad (61)$$

を施し、外乱から出力までのゲインを低減化する制御を考える。定常出力は

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) &= \begin{bmatrix} \sin \omega_0 t I_r \\ \cos \omega_0 t I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{K} \\ \bar{L} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

となる。ただし、

$$C(j\omega_0 I - A - B_2 F)^{-1} \bar{B}_1 = \bar{\Phi} + j\bar{\Psi} \quad (63)$$

である。

一方、公称数式モデル(1)式上での(61)式の制御は、

$$u(t) = Fx(t) \quad (64)$$

であり、外乱

$$w(t) = K \sin(\omega_0 t) + L \cos(\omega_0 t) \quad (65)$$

に対する定常出力は

$$y(t) = \begin{bmatrix} \sin \omega_0 t I_r \\ \cos \omega_0 t I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & -\hat{\Psi} \\ \hat{\Psi} & \hat{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{L} \end{bmatrix} \quad (66)$$

となる。ただし、

$$C(j\omega_0 I - A + B_2 F)^{-1} B_1 = \hat{\Phi} + j\hat{\Psi} \quad (67)$$

である。 $C(sI - A)^{-1}B_1$ が $s = \pm j\omega_0$ に伝達零点をもたないとすると、 $C(sI - A - B_2 F)^{-1}B_1$ の伝達零点は、 $C(sI - A)^{-1}B_1$ の伝達零点と一致しこれも $s = \pm j\omega_0$ に伝達零点をもたない。また、 $A + B_2 F$ が安定であることから、 $C(sI - A - B_2 F)^{-1}B_1$ は虚軸上に極をもたないので、

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi} & -\hat{\Psi} \\ \hat{\Psi} & \hat{\Phi} \end{bmatrix} \hat{\Gamma} = I_{2r} \quad (68)$$

とする $\hat{\Gamma}$ があり、

$$\begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{L} \end{bmatrix} = \hat{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{\Phi} + \hat{C}_1 & -\hat{\Psi} \\ \hat{\Psi} & \hat{\Phi} + \hat{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{L} \end{bmatrix} \quad (69)$$

とすると、

$$\begin{aligned} y(t) &= \begin{bmatrix} \sin \omega_0 t I_r \\ \cos \omega_0 t I_r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\Phi} & -\hat{\Psi} \\ \hat{\Psi} & \hat{\Phi} \end{bmatrix} \\ &\quad * \hat{\Gamma} \begin{bmatrix} \hat{\Phi} + \hat{C}_1 & -\hat{\Psi} \\ \hat{\Psi} & \hat{\Phi} + \hat{C}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{K} \\ \hat{L} \end{bmatrix} \\ &= \bar{y}(t) \end{aligned} \quad (70)$$

となる。外乱駆動行列の変動に対するロバスト性より、

$\bar{B}_1$ が変動しても、常に上記の式を満たす $\bar{F}$ がある。

さらに、(62), (70) 式より

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & \bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \bar{F} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

であり、

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \right\| \left\| \bar{F} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \\ & \geq \left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \end{aligned} \quad (72)$$

が成り立つ。 $\|\cdot\|$ はマトリクスノルムである。ここで、

$$\left\| \bar{F} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \leq 1 \quad (73)$$

であれば

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \quad (74)$$

が成り立つ。公称数式モデル、実システム共にスカラのときには、

$$\left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \right\| = |C(j\omega_0 I - A - B_2 F)^{-1} B_1| \quad (75)$$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \\ & = |C(j\omega_0 I - A - B_2 F)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{C}_1| \end{aligned} \quad (76)$$

ともとれるので、

$$\begin{aligned} & |C(j\omega_0 I - A - B_2 F)^{-1} B_1| \\ & \geq |C(j\omega_0 I - A - B_2 F)^{-1} \bar{B}_1 + \bar{C}_1| \end{aligned} \quad (77)$$

が成り立ち、(74) 式の $\|\cdot\|$ は外乱から出力までのゲインとみなすことができる。(74) 式は、公称数式モデルの外乱から出力までのゲインを δ 以下に抑えれば、実際の制御対象の外乱から出力までのゲインを δ 以下に抑えられることを意味する。

つぎに、(74) 式を満足させる方法であるが、ここで B_1 を kB_1 ($k > 1$) に変えてみると

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \rightarrow k \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix}$$

であり、(68) 式から

$$k \begin{bmatrix} \bar{\Phi} & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} \end{bmatrix} \frac{1}{k} \bar{F} = I \quad (78)$$

$$\bar{F} \rightarrow \frac{1}{k} \bar{F}$$

が成り立つ。したがって、 k を十分大きく取ると

$$\left\| \frac{1}{k} \bar{F} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix} \right\| \leq 1 \quad (79)$$

を満たすことができる。行列

$$\begin{bmatrix} \bar{\Phi} + \bar{C}_1 & -\bar{\Psi} \\ \bar{\Psi} & \bar{\Phi} + \bar{C}_1 \end{bmatrix}$$

には $\bar{B}_1$ が関係するので、 $\bar{B}_1$ の値が正確にわからなくても $\|\bar{B}_1\|$ の最大値がわかれば、 $\|\bar{B}_1\|$ をそれ以上にとることにより (68) 式を満足でき、公称数式モデル上での外乱除去特性が、実際の制御対象で保存される。

6. あとがき

本稿では、外乱が多項式外乱、周期性外乱で、公称数式モデルの外乱から出力までの伝達行列が、虚軸上に極、伝達零点をもたない場合に、制御対象と公称数式モデルの外乱駆動行列にずれがあっても、制御対象の外乱は公称数式モデル上の外乱に等価的に置き換えられること、また公称数式モデルの外乱駆動行列の要素を大きめに取りれば、実際の制御対象の外乱駆動行列が変動したとしても、公称数式モデルの制御特性が実際の制御対象上でも保存しえることを明らかにした。本稿で得られた定性的な結果は、制御理論を実システムに適用する際に、制御理論の有効性を保証するのに役立つものと思われる。公称数式モデルの外乱から出力までの伝達行列が虚軸上に極をもっている場合においても、制御対象の外乱が公称数式モデル上の外乱に等価的に置き換えられる可能性があり、これについては稿を改めて検討することにしたい。

最後に、適切なご指摘を頂きました校閲委員に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 前田, 杉江: アドバンスト制御のためのシステム制御理論, システム制御情報学会編システム制御情報ライブラリー, 朝倉書店(1990)
- 2) 美多勉: 状態方程式による H^∞ 制御問題の解法, 計測自動制御学会基礎講習会— H^∞ 制御入門—テキスト, 35/48(1991)
- 3) 須田信英: 極と零点 [I], 計測と制御, 17-6, 460/472 (1978)
- 4) 細江, 伊藤: 線形サーボ問題におけるエラーシステムについて, 電気学会論文誌 C-92-10, 369/375(1972)

[著 者 紹 介]

山 田 功 (正会員)

(Vol. 28, No. 8 参照)

渡 部 慶 二 (正会員)

(Vol. 28, No. 8 参照)