H^∞ 制御のためのリカッチ不等式の時間領域における導出

志 水 清 孝*・田 村 太 郎*・英 昌 孝*

A Derivation of the Riccati Inequation for H^∞ Control in Time Domain

Kiyotaka SHIMIZU, Taro TAMURA and Masataka HANABUSA

A simple derivation of the Riccati inequation for H^∞ control by state feedback is presented. It is proved by solving the LQ-max problem, which is equivalent to the H^∞ norm condition such that the uniform norm $\|T_{vz}\|_\infty$ of a transfer operator T from a disturbance v to an output z is less than a specified value γ . The proof is made in a direct and self contained manner with state space representation.

Key Words: Riccati inequation, H^∞ control, time domain, LQ-max problem

1. はじめに

H^∞ 制御 (Francis³⁾, Doyle-Glover-Khargonekar-Francis²⁾) の解析には伝達関数に基づく方法と、状態方程式から直接的に求める方法がある。しかし状態空間法による場合でも、その必要十分条件の導出は周波数領域での解析を経て行われているので、スペクトル分解や Parseval の定理が重要な役割をになっている。また伝達関数の H^∞ ノルムに対する仕様 (満足条件) と等価なリカッチ方程式の誘導は、何段ものプロセスを経た間接的な方法であり、初学者には非常にわかりにくいものになっている。

本論文では状態方程式に基づき、外乱入力から制御出力への伝達作用素の一種ノルム (Chebyshev ノルム) に対する満足条件と同等な LQ-max 問題を解くことによって直接的に H^∞ 制御のためのリカッチ方程式を導出する。これは凹関数ではない 2 次形式評価汎関数の最大化を行うという特異な状況下での最適化問題であるため、通常のレギュレータ理論をそのまま応用することはできない。証明は周波数領域での表現は一切用いず、すべて時間領域での解析だけであり、直接的で自己充足的なものである。なお、本論文は時間領域表現による一貫性および自己充足性を目的としており、それ以外の点はでき

る限り簡単化する方針のため、外乱入力から制御出力への直達項がないプラントに対し考察を進めている。これは直達項がある場合 (Zhou-Khargonekar⁹⁾, 三平, 美多⁷⁾) に比べて限定されたものであるが、一般化は容易である。

H^∞ 制御問題にはいろいろな定式化があり、仮定に応じてリカッチ方程式あるいはリカッチ不等式が得られる。ここでは Zhou-Khargonekar⁹⁾ や Petersen⁶⁾ によって解かれた状態フィードバックによる H^∞ 制御の必要十分条件を与えるリカッチ不等式の導出を別の新しい方法で行う。

従来の証明法は、状態空間法 (三平, 美多⁷⁾ の解説参照) でもスペクトル分解と Parseval の定理が鍵になっている。本論文では H^∞ ノルムに対する満足条件と等価な LQ-max 問題をすべて時間領域で解析することによってスペクトル分解や Parseval の定理は全く使用せずに結論を誘導している。証明も形式的には従来の方法と類似しているが一貫してすべて時間領域で行おうとすると創意工夫しなければならないところも多々あり、本質的には Petersen⁶⁾ の証明と類似しているが、重要な修正点もある。結果はおおむね既知の事実ではあるが、この証明法によって H^∞ 制御の性質の理解を深めることができる。

2. H^∞ 制御問題の定式化

$x(t) \in R^n$ を状態, $u(t) \in R^{r1}$ を制御入力, $v(t) \in R^{r2}$ を外乱, $z(t) \in R^m$ を制御出力として、つぎのようなシステムを考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = x_0$$

(2.1 a)

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received November 2, 1991)

(Revised February 20, 1992)

$$\dot{z}(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.1 \text{ b})$$

$\|\cdot\|_2$ は, 2 乗可積分関数の空間 $L_2[0, \infty)$ のノルムを表わし,

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^\infty x^T(t)x(t)dt \right)^{1/2}$$

と定義される. このとき 2 乗可積分関数 $x: x(t), t \in [0, \infty)$ からなる関数空間を X と定義し, 以下同様に u, v, z, y からなる関数空間を U, V, Z, Y とする.

このとき以下で考察する H^∞ 制御問題とは

(条件 1) 閉ループ系を内部安定とする.

(条件 2) 外乱 v から制御出力 z までの伝達作用素 T_{vz} の一様ノルム $\|T_{vz}\|_\infty$ をある与えられた仕様 γ 以下, つまり $\|T_{vz}\|_\infty \leq \gamma$ にする.

ようなコントローラ $K: x \rightarrow u$ すなわち, 状態フィードバック制御則 $u(t) = Kx(t)$ を決定する問題である.

プラント (2.1) において, 外乱 $v \in V$ から制御量 $z \in Z$ への伝達特性を表わす有界線形作用素 $T_{vz}: V \rightarrow Z$ の一様ノルムはつぎのように定義される. ただし以下で V はコンパクト部分集合とする.

$$\|T_{vz}\|_\infty = \max_{v \in V} \frac{\|T_{vz}v\|_2}{\|v\|_2} = \max_{v \in V} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2}$$

それゆえ条件 2 は

$$\|T_{vz}\|_\infty = \max_{v \in V} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} \leq \gamma \quad (2.2)$$

となる. (2.2) 式は

$$\frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} \leq \gamma \quad \forall v \in V$$

と書けるので, 次式と等価である.

$$\|z\|_2 \leq \gamma^2 \|v\|_2 \quad \forall v \in V$$

ゆえに

$$\max_{v \in V} \{\|z\|_2 - \gamma^2 \|v\|_2\} \leq 0$$

したがって, H^∞ 制御問題は形式的に表現すると,

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)dt &\leq 0 \\ (i. e. \|T_{vz}\|_\infty &\leq \gamma) \end{aligned} \quad (2.3 \text{ a})$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = 0 \quad (2.3 \text{ b})$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (2.3 \text{ c})$$

$$u(t) = Kx(t) \quad (2.3 \text{ d})$$

となるような状態フィードバックコントローラのゲイン行列 K を求める問題である.

(注意) $\|T_{vz}\|_\infty$ の定義では $v \neq 0$ が必要である. しかし記述簡略のため特に強調する必要のないかぎり $v \neq 0$ を省略する.

3. LQ-max 問題とリカッチ不等式

H^∞ 制御問題を研究するために, まずはじめにつぎのような LQ-max 問題を考える.

$$\max_{v \in V} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)dt \quad (3.1 \text{ a})$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = 0 \quad (3.1 \text{ b})$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.1 \text{ c})$$

外部入力 $v \in V$ から制御量 $z \in Z$ への伝達特性を表わす作用素 $T_{vz}: V \rightarrow Z$ の一様ノルム $\|T_{vz}\|_\infty$ は, T_{vz} が有界線形作用素なので,

$$\|T_{vz}\|_\infty = \max_{v \in V} \frac{\|T_{vz}v\|_2}{\|v\|_2} = \max_{v \in V} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2}$$

と定義される. それゆえ $\|T_{vz}\|_\infty \leq \gamma$ は, $\|z\|_2 / \|v\|_2 \leq \gamma \quad \forall v \in V$ と書け, 2 章で述べたように

$$\max_{v \in V} \{\|z\|_2 - \gamma^2 \|v\|_2\} \leq 0 \quad (3.2)$$

と等価である. したがって H^∞ ノルム制約問題は,

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t)dt &\leq 0 \\ (i. e. \|T_{vz}\|_\infty &\leq \gamma) \end{aligned} \quad (3.3 \text{ a})$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = 0 \quad (3.3 \text{ b})$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.3 \text{ c})$$

となる.

まず, つぎの標準的な LQ-max 問題とリカッチ方程式の関係性を研究する.

$$\begin{aligned} \max_{v \in V} J[v; x_0, \infty] \\ \triangleq \int_0^\infty x^T(t)Qx(t) - v^T(t)Rv(t)dt \end{aligned} \quad (3.4 \text{ a})$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = x_0 \quad (3.4 \text{ b})$$

この問題は, Q が半負定でないときには評価関数の凹性がいえないので, 解の存在は保証されない. また, この問題に対するリカッチ方程式の解の存在も保証されない. しかし, 適当な仮定のもとで, その有界な解が存在する十分性を与えることができる. まずつぎの補助定理が成り立つ.

《補助定理 3.1》 $Q = Q^T, R = R^T > 0$ とする. そして

$$PA + A^T P + PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.5)$$

の

$$\operatorname{Re} \lambda(A + BR^{-1}B^T P) < 0 \quad (3.6)$$

を満たす正定解 $P > 0$ が存在すると仮定する. このとき問題 (3.4) の最大解は

$$v^*(t) = R^{-1}B^T P x(t) \quad (3.7)$$

である. また (3.4 a) 式の最大値は,

$$J[v^*; x_0, \infty] = x_0^T P x_0$$

である.

(証明) 標準的最適レギュレータ理論と同様にして, 平方完成の手法 (Brockett¹⁾ 参照) を用いて証明できる. ■

つぎにリカッチ方程式をパラメータ化したつぎのような式を考える。

$$PA + A^T P + \alpha PBB^T P + C^T C = O$$

このリカッチ方程式は、 $\alpha < 0$ のとき $\{A, B\}$ が可制御のもとで解は存在する。しかし $\alpha > 0$ のときは $C^T C \geq O$ なので解の存在は必ずしもいえない。

つぎの補助定理は、 $\alpha > 0$ における上のリカッチ方程式が、ある条件のもとで解をもつと仮定したとき、その解の上界を与えている。以下に述べる補助定理 3.2, 3.3 の証明法は、文献 1) の Section 25 の手法を拡張したものである。

《補助定理 3.2》 $Re \lambda(A) < 0$, かつ

$$\max_{v \in V} \int_0^\infty z(t)^T z(t) - v(t)^T v(t) dt \leq 0 \quad (3.8 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = 0 \quad (3.8 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.8 c)$$

と仮定する。また、リカッチ方程式

$$PA + A^T P + \alpha PBB^T P + C^T C = O \quad (3.9)$$

が

$$Re \lambda(A + \alpha BB^T P_+(\alpha)) < 0 \quad (3.10)$$

を満たす正定解 $P_+(\alpha) > O$ をもつとし、さらに

$$PA + A^T P + C^T C = O \quad (3.11)$$

の正定解を P_0 とする。このとき、 $0 \leq \alpha < 1$ に対して

$$P_+(\alpha) \leq \frac{1}{1-\alpha} P_0 \quad (3.12)$$

が成り立つ。

(証明) $P_+(\alpha)$ は (3.10) 式を満たすリカッチ方程式 (3.9) の正定解なので、補助定理 3.1 より $Q = C^T C$, $R = \frac{1}{\alpha} I$ とすると、

$$\max_{v \in V} \int_0^\infty z(t)^T z(t) - \frac{1}{\alpha} v(t)^T v(t) dt \quad (3.13 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = x_0 \quad (3.13 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.13 c)$$

は、最大解

$$v^*(t) = \alpha B^T P_+(\alpha) x(t) \quad (3.14)$$

において最大値 $x_0^T P_+(\alpha) x_0$ をとる。 $z(t)$ は初期条件 x_0 のみに依存する項 $z_1(t)$ と、入力 $v^*(t)$ に依存する項 $z_2(t)$ の和であるので、つぎのように表わされる。

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t) \quad (3.15)$$

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t), x_1(0) = x_0, z_1(t) = Cx_1(t) \quad (3.16)$$

$$\dot{x}_2(t) = Ax_2(t) + Bv^*(t), x_2(0) = 0, z_2(t) = Cx_2(t) \quad (3.17)$$

よって (3.13 a) 式の最大値はつぎのように書ける。

$$x_0^T P_+(\alpha) x_0$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty (z_1(t) + z_2(t))^T (z_1(t) + z_2(t)) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha} v^*(t)^T v^*(t) dt \\ &= \int_0^\infty z_1^T(t) z_1(t) dt + 2 \int_0^\infty z_1^T(t) z_2(t) dt \\ &\quad + \int_0^\infty z_2^T(t) z_2(t) dt - \int_0^\infty \frac{1}{\alpha} v^*(t)^T v^*(t) dt \end{aligned} \quad (3.18)$$

さて、問題 (3.8) においては $x_0 = 0$ だから、初期条件に依存しない $z_2(t)$ に対して、(3.8 a) 式より

$$\int_0^\infty v^*(t)^T v^*(t) dt \geq \int_0^\infty z_2^T(t) z_2(t) dt = \beta^2 \quad (3.19)$$

が成り立つ。ただしここで、 $\beta \triangleq \|z_2(t)\|_2$ とおいた。

ここで、 $Re \lambda(A) < 0$ だから、リアプノフ方程式

$$PA + A^T P + C^T C = O$$

の解 P_0 は

$$P_0 = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$$

となり、 $z_1(t) = C e^{A t} x_0$ だから、

$$x_0^T P_0 x_0 = \int_0^\infty z_1^T(t) z_1(t) dt = \rho^2 \quad (3.20)$$

となる。ただし、 $\rho \triangleq \|z_1(t)\|_2$ とおいた。(3.18) (3.19) (3.20) 式より

$$\begin{aligned} x_0^T P_+(\alpha) x_0 &\leq \rho^2 + 2 \int_0^\infty z_1^T(t) z_2(t) dt - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \beta^2 \\ &\leq \rho^2 + 2 \left| \int_0^\infty z_1^T(t) z_2(t) dt \right| - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \beta^2 \end{aligned}$$

Schwartz の不等式

$$\left| \int_0^\infty z_1^T(t) z_2(t) dt \right| \leq \left(\int_0^\infty z_1^T(t) z_1(t) dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty z_2^T(t) z_2(t) dt \right)^{1/2}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} x_0^T P_+(\alpha) x_0 &\leq \rho^2 + 2\rho\beta - \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \beta^2 \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) \left(\beta - \frac{\alpha\rho}{1-\alpha} \right)^2 + \frac{\rho^2}{1-\alpha} \end{aligned} \quad (3.21)$$

となる。この式の左辺は β の関数と考え、 $\beta = \alpha\rho/(1-\alpha)$ のとき、最大値 $\rho^2/(1-\alpha)$ であり、(3.20) 式を考慮すると、

$$x_0^T P_+(\alpha) x_0 \leq \frac{1}{1-\alpha} x_0^T P_0 x_0$$

となる。これは任意の x_0 について成立するので、(3.12) 式が成り立つ。

最後に、補助定理 3.2 を利用して、リカッチ方程式

$$PA + A^T P + \alpha PBB^T P + C^T C = O$$

の、 $0 \leq \alpha \leq 1$ の範囲における解の存在について述べる。

つぎの補助定理 3.3 は帰納法的証明法を用いている。

すなわち題意の成立を仮定し、 $P_+(\alpha)$ の連続性とその端

点 ($\alpha=0$) における解の存在から, $P_+(\alpha)$ の存在を $0 \leq \alpha \leq 1$ まで保証するものである.

《補助定理3.3》 $Re \lambda(A) < 0$ とし, また, $\{A, B\}$ 可安定, $\{C, A\}$ 可観測と仮定する. また,

$$\max_{v \in V} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - v^T(t)v(t) dt \leq 0 \quad (3.22 \text{ a})$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = 0 \quad (3.22 \text{ b})$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.22 \text{ c})$$

を仮定する. このとき, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対して,

$$PA + A^T P + \alpha PBB^T P + C^T C = 0 \quad (3.23)$$

の

$$Re \lambda(A + \alpha BB^T P_+(\alpha)) < 0 \quad (3.24)$$

を満たす正定解 $P_+(\alpha) > 0$ が存在する.

(証明) リカッチ方程式(3.23)の α に関する導関数は,

$$\frac{dP_+(\alpha)}{d\alpha} [A + \alpha BB^T P_+(\alpha)] + [A^T + \alpha P_+(\alpha) BB^T]$$

$$\frac{dP_+(\alpha)}{d\alpha} + P_+(\alpha) BB^T P_+(\alpha) = 0$$

を満たす. リアプノフ方程式の性質(文献5)定理13-1(iii))より, $Re \lambda(A + \alpha BB^T P_+(\alpha)) < 0$ であるような α に対しては, $dP_+(\alpha)/d\alpha \geq 0$ である. したがって, $Re \lambda(A + \alpha BB^T P_+(\alpha)) < 0$ となるような $P_+(\alpha)$ が $0 \leq \alpha < 1$ の α において存在するならば, その点において $P_+(\alpha)$ は, α が増加するにつれて非減少である.

$\alpha=0$ のとき, (3.23)式は

$$P_+(0)A + A^T P_+(0) + C^T C = 0$$

となる. この式は $Re \lambda(A + 0 \cdot BB^T P_+(0)) = Re \lambda(A) < 0$ を満たし, かつリアプノフ方程式の形をしているので, $\{C, A\}$ 可観測のときリアプノフ方程式の性質(文献5)定理13-1(vi))より

$$P_+(0) = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{At} dt > 0$$

となり, 正定解 $P_+(0) > 0$ をもつ. ここで, $P_+(0)$ から十分小さな $\alpha > 0$ だけ移動させることを考えると, $P_+(\alpha)$ の連続性と α に対する非減少性から, (3.24)式を満たすリカッチ方程式(3.23)の正定解 $P_+(\alpha)$ が存在する.

補助定理3.2より, (3.8)式すなわち(3.22)式のもとで十分小さな $\alpha \geq 0$ に対して

$$P_+(\alpha) \leq \frac{1}{1-\alpha} P_0$$

が成り立ち, さらにこの式は

$$P_+(\alpha) \leq \frac{1}{1-\alpha} P_0, 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.25)$$

となるので(3.22)式のもとで $P_+(\alpha)$ は $0 \leq \alpha < 1$ において上限をもつ. このことと, $P_+(\alpha)$ の α に対する連続性, 非減少性から, $P_+(\alpha)$ は $0 \leq \alpha < 1$ で存在するというように拡張できる.

つぎに, $\alpha=1$ のときの $P_+(\alpha)$ の存在について述べる.

(3.25)式では, $\alpha=1$ のとき, $P_+(\alpha)$ の上限は ∞ となる可能性があるため, $P_+(1)$ の存在は必ずしもいえない. $P_+(\alpha)$ は α の増加につれて非減少なので, $P_+(\alpha)$ の上限が存在すれば, $\lim_{\alpha \rightarrow 1} P_+(\alpha)$ が存在し, $P_+(\alpha)$ の連続性から $P_+(1)$ の存在がいえる.

補助定理3.2の証明において, $\alpha=1$ のとき(3.21)式は $x_0^T P_+(1) x_0 \leq \rho^2 + 2\rho\beta$ となる. ここで $t \rightarrow \infty$ のとき帰納法の仮定として(3.10)式つまり $Re \lambda(A + \alpha BB^T P_+(\alpha)) < 0$ を用いれば $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$ であり, $Re \lambda(A) < 0$ より $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1(t) = 0$ だから(3.15)式より $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2(t) = 0$ となる. よって ρ と β は有界となる. したがって $x_0^T P_+(1) x_0$ は有界となる. よって $P_+(1)$ も上に有界である. したがって $P_+(1)$ は, 上限をもつ. このことと, $P_+(\alpha)$ の連続性からその存在は $0 \leq \alpha \leq 1$ まで拡張できる. したがって(3.24)式を満たすリカッチ方程式(3.23)の正定解 $P_+(1)$ が存在する. ■

以上の補助定理を用いて, H^∞ ノルム制約問題の必要十分条件を与える. すなわち, $\|T_{vz}\|_\infty \leq \gamma$ と等価な条件が下記の定理で与えられる.

《定理3.1》 $\{A, B\}$ 可安定, $\{C, A\}$ 可観測と仮定する.

このとき下記の [I], [II] は等価である.

[I]

$$\max_{v \in V} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt \leq 0$$

$$(i.e. \|T_{vz}\|_\infty \leq \gamma) \quad (3.26 \text{ a})$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), x(0) = 0 \quad (3.26 \text{ b})$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.26 \text{ c})$$

とする最大解 $v = v^*$ が存在し, かつ

$$Re \lambda(A) < 0 \quad (3.27)$$

である.

[II] リカッチ代数方程式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C = 0 \quad (3.28)$$

の

$$Re \lambda(A + \gamma^{-2} BB^T P) < 0 \quad (3.29)$$

を満たす正定解 $P > 0$ が存在する.

このとき, (3.26 a)式を満たす最大解は次式で与えられる.

$$v^*(t) = \gamma^{-2} B^T P x(t) \quad (3.30)$$

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I]: 補助定理3.1において, $R = \gamma^2 I$ とすると, $J[v; x_0, \infty]$ は(3.30)式のとき最大値 $J[v^*; x_0, \infty] = x_0^T P x_0$ をとる. ここで $x_0 = 0$ であることを考慮すると, この式は $J[v^*; 0, \infty] = 0$ となり, (3.26)式を満たす.

また, リカッチ方程式 (3.28) は

$$PA + A^T P + \begin{pmatrix} \gamma^{-1} B^T P \\ C \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma^{-1} B^T P \\ C \end{pmatrix} = 0$$

と表わすことができ, $\{C, A\}$ の可観測性から $\begin{Bmatrix} C \\ \gamma^{-1} B^T P \end{Bmatrix}$, A も可観測となる. よって $\begin{Bmatrix} C \\ \gamma^{-1} B^T P \end{Bmatrix}$, A 可観測, $P > 0$ よりリアプノフ方程式の性質 (文献 5) 定理 13-1 の注意(vi)' から, $\operatorname{Re} \lambda(A) < 0$ がいえる. よって, [II] $\Rightarrow$ [I] が示された.

[I] $\Rightarrow$ [II]: [I] $\Rightarrow$ [II] を示すためにまず [I] $\Rightarrow$ [II]' を示す.

[II]': $0 \leq \alpha \leq \gamma^{-2}$ に対して

$$PA + A^T P + \alpha PBB^T P + C^T C = 0 \quad (3.31)$$

の

$$\operatorname{Re} \lambda(A + \alpha BB^T P) < 0 \quad (3.32)$$

を満たす正定解 $P_+(a) > 0$ が存在する.

[I] $\Rightarrow$ [II]' の証明は, 補助定理 3.2 と 3.3 の一部を修正すればできる. 補助定理 3.2 の証明の (3.19) 式は, (3.26 a) 式より

$$\gamma^2 \int_0^\infty v^*(t)^T v(t)^* dt \geq \int_0^\infty z_2^T(t) z_2(t) dt = \beta^2$$

と書きかえられる. したがって, 以下同様にして (3.32) 式を満たすリカッチ方程式 (3.31) の正定解 $P_+(a)$ と, リアプノフ方程式 (3.11) の正定解 P_0 との間につきの関係が得られる.

$$P_+(a) \leq \frac{\gamma^{-2}}{\gamma^{-2} - \alpha} P_0, \quad 0 \leq \alpha < \gamma^{-2}$$

また, $0 \leq \alpha \leq \gamma^{-2}$ に対する (3.32) 式を満たすリカッチ方程式 (3.31) の正定解の存在性は, 補助定理 3.3 の $\alpha = 1$ を $\alpha = \gamma^{-2}$ とおきかえることによって示される.

[I] $\Rightarrow$ [II] の証明は [I] $\Rightarrow$ [II]' における $\alpha = \gamma^{-2}$ のときのことをいっているので, たしかに (3.29) 式を満たすリカッチ方程式 (3.28) の正定解 P は存在する. (3.30) 式は補助定理 3.1 より明らか. ■

定理 3.1 は, H^∞ ノルム制約問題 (3.3) の等価な表現として, リカッチ方程式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C = 0$$

が $\operatorname{Re} \lambda(A + \gamma^{-2} BB^T P) < 0$ を満たす正定解をもつといっている. これに対して, Zhou-Khargonekar⁹⁾ は定理 3.1 より弱い仮定のもとで (3.3) 式と等価な表現としてリカッチ不等式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C < 0 \quad (3.33)$$

が正定解 P をもつといっている.

本節では H^∞ ノルム制約条件と等価なリカッチ不等式について述べる. まずつぎの補助定理が成り立つ.

《補助定理 3.4》 つぎの [I], [II] は等価である.

$$[I] \quad PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C < 0 \quad (3.34)$$

が正定解 P をもつ.

[II] ある正数 $\varepsilon > 0$ が存在して

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C + \varepsilon I = 0 \quad (3.35)$$

を満たす正定解 P が存在する. ただし I は単位行列である.

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I]: 明らか.

[I] $\Rightarrow$ [II]: はある正数 ε と正定行列 Q を用いて

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C + \varepsilon Q = 0$$

と書き表わせる. このとき任意の $\tilde{Q} > 0$ に対して

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C + \tilde{\varepsilon} \tilde{Q} = 0$$

が $\tilde{\varepsilon} \in (0, \varepsilon^*)$ で正定解 P をもつような ε^* が存在することを Petersen⁹⁾ の Thm 2.1 と同じようにして証明できる. $\tilde{Q}$ を I にとれば (3.35) 式をうる. ■

つぎの定理は, H^∞ ノルム制約条件と同等な LQ-max 問題とリカッチ不等式との関係を述べている.

《定理 3.2》 $\{A, B\}$ 可安定と仮定する. このとき下記の [I], [II] は等価である.

[I]

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt < 0$$

$$(i.e. \|T_{vz}\|_\infty < \gamma) \quad (3.36 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv(t), \quad x(0) = 0 \quad (3.36 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (3.36 c)$$

かつ

$$\operatorname{Re} \lambda(A) < 0 \quad (3.37)$$

である.

[II] リカッチ不等式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C < 0 \quad (3.38)$$

が正定解 $P > 0$ をもつ.

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I]:

$$J[v; x_0, t_1] \triangleq \int_0^{t_1} x^T(t) C^T C x(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt$$

とおき, 平方完成¹⁾を施すと,

$$\begin{aligned} J[v; x_0, t_1] &= x^T(0) P x(0) - x^T(t_1) P x(t_1) \\ &\quad + \int_0^{t_1} x^T(t) (A^T P + PA \\ &\quad + \gamma^{-2} PBB^T P + C^T C) x(t) \\ &\quad - \gamma^2 \|v(t) - \gamma^{-2} B^T P x(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (3.39)$$

(3.39) 式において, P が (3.38) 式を満たす実対称行列とすると,

$$\begin{aligned} J[v; x_0, t_1] &\leq x_0^T P x_0 - x^T(t_1) P x(t_1) \\ &\quad - \gamma^2 \int_0^{t_1} \|v(t) - \gamma^{-2} B^T P x(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (3.40)$$

\$P\$ は正定なので,

$$J[v; x_0, t_1] \leq x_0^T P x_0 - \gamma^2 \int_0^{t_1} \|v(t) - \gamma^{-2} B^T P x(t)\|^2 dt$$

となる. これは任意の \$t_1\$ について成り立つので, \$t_1 \rightarrow \infty\$ とすると

$$J[v; x_0, \infty] \leq x_0^T P x_0 - \gamma^2 \int_0^\infty \|v(t) - \gamma^{-2} B^T P x(t)\|^2 dt \quad (3.41)$$

(3.41) 式の右辺は,

$$v(t) = v^*(t) = \gamma^{-2} B^T P x(t) \quad (3.42)$$

のとき, 最大値 \$x_0^T P x_0\$ をとる. ここで \$x(0) = x_0 = 0\$ を考慮すると (3.36 b) 式と (3.42) 式から \$v(t) = v^*(t) = 0\$, \$\forall t \in [0, \infty)\$ となり, \$v(t) \neq 0\$ の条件に反する. よって \$v(t)\$ は (3.42) 式をとれないので,

$$\int_0^\infty \|v(t) - \gamma^{-2} B^T P x(t)\|^2 dt > 0$$

となる. (3.41) 式においてふたたび \$x_0 = 0\$ を考慮すると,

$$J[v; 0, \infty] < 0, v(t) \neq 0$$

が成り立つ.

また (3.38) 式は補助定理 3.4 よりつぎのように書ける.

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C + \varepsilon I = 0$$

さらに

$$PA + A^T P + \begin{pmatrix} \gamma^{-1} B^T P \\ C \\ \sqrt{\varepsilon} I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \gamma^{-1} B^T P \\ C \\ \sqrt{\varepsilon} I \end{pmatrix} = 0$$

と書き表わすことができる. ここで

$$\begin{Bmatrix} \gamma^{-1} B^T P \\ C \\ \sqrt{\varepsilon} I \end{Bmatrix}, A \text{ 可観測, } P > 0$$

なので, リアプノフ方程式の性質 (文献 5) の定理 13-1 の注意 (vi)' から \$Re \lambda(A) < 0\$ が成り立つ.

[I] \$\Rightarrow\$ [II]:

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt < 0$$

のとき, 非常に小さな \$\delta > 0\$ に対して

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - (\gamma - \delta)^2 v^T(t) v(t) dt \leq 0 \quad (3.43)$$

が成り立つ. このとき明らかに \$\gamma \geq \delta > 0\$ であるので,

$$(\gamma - \delta)^2 = \gamma^2 - \gamma\delta - \delta(\gamma - \delta) \leq \gamma^2 - \gamma\delta$$

である. したがって (3.43) 式を満たせば,

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - (\gamma^2 - \gamma\delta) v^T(t) v(t) dt \leq 0 \quad (3.44)$$

を必ず満たす. よって, (3.36 a) 式のかわりに (3.44) 式を

用いて証明を進めていく.

$$v(t) \neq 0 \text{ より明らかに } \int_0^\infty v^T(t) B^T B v(t) dt > 0 \text{ である}$$

から, (3.36 b) 式より

$$\int_0^\infty \dot{x}^T(t) \dot{x}(t) - 2\dot{x}^T(t) A x(t) + x^T(t) A^T A x(t) dt > 0$$

が成り立つ. ゆえに次式を満たすような \$\varepsilon\$ が存在する.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^T(t) (1 - \varepsilon) A^T A x(t) dt \\ & \geq \int_0^\infty -\dot{x}^T(t) \dot{x}(t) + 2\dot{x}^T(t) A x(t) dt \end{aligned}$$

ふたたび (3.36 b) 式を用いると

$$\int_0^\infty v^T(t) B^T B v(t) dt - \int_0^\infty x^T(t) \varepsilon A^T A x(t) dt \geq 0$$

一方, 明らかに \$B^T B < \varphi I\$, \$\varepsilon A^T A > \nu I\$ を満たすような正数 \$\varphi, \nu\$ が存在するから, これらを上式に代入すると

$$\varphi \int_0^\infty v^T(t) v(t) dt - \nu \int_0^\infty x^T(t) x(t) dt \geq 0$$

ここで \$\mu \triangleq \varphi/\nu\$ とおけば

$$\frac{1}{\mu} \int_0^\infty x^T(t) x(t) dt \leq \int_0^\infty v^T(t) v(t) dt$$

をうる. この式と (3.44) 式より

$$\begin{aligned} & \max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty x^T(t) C^T C x(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt \\ & + \frac{\gamma\delta}{\mu} \int_0^\infty x^T(t) x(t) dt \leq 0 \\ & \therefore \max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty x^T(t) \left(C^T C + \frac{\gamma\delta}{\mu} I \right) x(t) \\ & - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt \leq 0 \end{aligned}$$

となる. よってつぎが成り立つ.

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty \tilde{z}^T(t) \tilde{z}(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt \leq 0 \quad (3.45 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B v(t), x(0) = 0 \quad (3.45 b)$$

$$\tilde{z}(t) \triangleq \tilde{C} x(t) = \begin{pmatrix} C \\ \sqrt{\frac{\gamma\delta}{\mu}} I \end{pmatrix} x(t) \quad (3.45 c)$$

このシステムは, \$\{A, B\}\$ 可安定, \$\{\tilde{C}, A\}\$ 可観測のシステムである. したがって, 定理 3.1 より, \$Re \lambda(A) < 0\$ かつ (3.45) 式が成り立つとき,

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B B^T P + \tilde{C}^T \tilde{C} = 0$$

かつ \$Re \lambda(A + \gamma^{-2} B B^T P) < 0\$ を満たす正定解 \$P\$ をもつ. この式は

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C + \frac{\gamma\delta}{\mu} I = 0$$

であり, よって

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B B^T P + C^T C < 0$$

を満たす正定解 \$P\$ が存在する. ■

4. H^∞ 制御のリカッチ不等式による必要十分条件

状態フィードバックによる H^∞ 制御の必要十分条件として、2 種類のプラントに対して以下の二つの定理が成り立つ。プラントに対しては可安定性のみが仮定されている。

《定理 4.1》 システム(2.1)を考える。ただし $\{A, B_1\}$ と $\{A, B_2\}$ は可安定であり、 $D^T C = 0, D^T D = I$ と仮定する。このとき、下記の [I], [II] は等価である。

[I]

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt < 0$$

$$(i.e. \|T_{vz}\|_\infty < \gamma) \quad (4.1 a)$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = 0 \quad (4.1 b)$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (4.1 c)$$

かつ

$$Re \lambda(A + B_1 K) < 0 \quad (4.2)$$

を満たす状態フィードバック制御 $u(t) = Kx(t)$ が存在する。

[II] リカッチ不等式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P - P B_1 B_1^T P + C^T C < 0 \quad (4.3)$$

が正定解 $P > O$ をもつ。

さらに [II] が満たされるととき問題(4.1)のコントローラは正定解 P を用いて

$$u(t) = Kx(t), K = -B_1^T P \quad (4.4)$$

で与えられる。

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I] : リカッチ不等式(4.3)は

$$P(A - B_1 B_1^T P) + (A - B_1 B_1^T P)^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P + C^T C + P B_1 B_1^T P < 0$$

と変形できる。これに(4.4)式を代入し、 $D^T C = 0, C^T C = I$ を用いると、

$$P(A + B_1 K) + (A + B_1 K)^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P + C^T C + K^T K = P(A + B_1 K) + (A + B_1 K)^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P + (C + DK)^T (C + DK) < 0$$

このとき、定理 3.2 より $Re \lambda(A + B_1 K) < 0$, かつ

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt < 0 \quad (4.5 a)$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 K)x(t) + B_2 v(t), x(0) = 0 \quad (4.5 b)$$

$$z(t) = (C + DK)x(t) \quad (4.5 c)$$

が得られる。ここで(4.4)式を用いると(4.5)式より(4.1)式が得られ、[II] $\Rightarrow$ [I] が示された。

[I] $\Rightarrow$ [II] : (4.1), (4.2)式を満たす K が存在すると

し、それを K_0 とする。このとき、 $Re \lambda(A + B_1 K_0) < 0$ かつ

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt < 0$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = 0$$

$$z(t) = Cx(t) + Du(t)$$

を満たす $u(t) = K_0 x(t)$ が存在する。

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt < 0 \quad (4.6 a)$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 K_0)x(t) + B_2 v(t), x_0 = 0 \quad (4.6 b)$$

$$z(t) = (C + DK_0)x(t) \quad (4.6 c)$$

と変形できる。(4.6)式に定理 3.2 を適用すると、

$$P_0(A + B_1 K_0) + (A + B_1 K_0)^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 + (C + DK_0)^T (C + DK_0) < 0$$

となる $P_0 > O$ が存在する。この式を変形すると

$$\begin{aligned} P_0 A + P_0 B_1 K_0 + A^T P_0 + K_0^T B_1^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 \\ + C^T C + C^T D K_0 + K_0^T D^T C + K_0^T D^T D^T K_0 \\ = P_0 A + A^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 - P_0 B_1 B_1^T P_0 \\ + C^T C + (K_0 + B_1^T P_0)^T (K_0 + B_1^T P_0) < 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで

$$(K_0 + B_1^T P_0)^T (K_0 + B_1^T P_0) \geq 0$$

であるので、(4.7)式は

$$P_0 A + A^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 - P_0 B_1 B_1^T P_0 + C^T C < 0 \quad (4.8)$$

を満たしている。したがって、(4.8)式を満たす $P_0 > O$ が存在するので [II] が成り立つ。

《定理 4.2》 システム(2.1)式を考える。ただし $\{A, B_1\}$ と $\{A, B_2\}$ は可安定であり、 $D = O$ と仮定する。このとき、下記の [I], [II] は等価である。

[I]

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t)z(t) - \gamma^2 v^T(t)v(t) dt < 0$$

$$(i.e. \|T_{vz}\|_\infty < \gamma) \quad (4.9 a)$$

subj.to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = 0 \quad (4.9 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (4.9 c)$$

かつ

$$Re \lambda(A + B_1 K) < 0 \quad (4.10)$$

を満たす状態フィードバック制御 $u(t) = Kx(t)$ が存在する。

[II] リカッチ不等式

$$PA + A^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P - \frac{1}{\epsilon} P B_1 B_1^T P + C^T C < 0 \quad (4.11)$$

が十分小さな $\epsilon > 0$ に対して正定解 $P > O$ をもつ。

さらに[II]が満たされるとき問題(4.9)のコントローラは正定解 P を用いて

$$u(t) = Kx(t), K = -\frac{1}{2\varepsilon} B_1^T P \quad (4.12)$$

で与えられる。

(証明) [II] $\Rightarrow$ [I]：リカッチ不等式(4.11)は

$$P\left(A - \frac{1}{2\varepsilon} B_1 B_1^T P\right) + \left(A - \frac{1}{2\varepsilon} B_1 B_1^T P\right)^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P + C^T C < 0$$

と変形できる。これに(4.12)式を代入して

$$P(A + B_1 K) + (A + B_1 K)^T P + \gamma^{-2} P B_2 B_2^T P + C^T C < 0$$

となる。このとき、定理 3.2 より $\operatorname{Re} \lambda(A + B_1 K) < 0$ かつ

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt < 0 \quad (4.13 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 K)x(t) + B_2 v(0), x(0) = 0 \quad (4.13 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (4.13 c)$$

が得られる。ここで(4.12)式を用いると(4.13)式より(4.9)式が得られ、[II] $\Rightarrow$ [I]が証明された。

[I] $\Rightarrow$ [II]：(4.9)、(4.10)式を満たす K が存在するとし、それを K_0 と表わす。このとき、 $\operatorname{Re} \lambda(A + B_1 K) < 0$ かつ

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt < 0$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 v(t), x(0) = 0$$

$$z(t) = Cx(t)$$

を満たす $u(t) = K_0 x(t)$ が存在する。これは、

$$\max_{v \in V, v \neq 0} \int_0^\infty z^T(t) z(t) - \gamma^2 v^T(t) v(t) dt < 0 \quad (4.14 a)$$

subj. to

$$\dot{x}(t) = (A + B_1 K_0)x(t) + B_2 v(t), x(0) = 0 \quad (4.14 b)$$

$$z(t) = Cx(t) \quad (4.14 c)$$

と変形できる。(4.14)式に定理 3.2 を適用すると、

$$P_0(A + B_1 K_0) + (A + B_1 K_0)^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 + C^T C < 0 \quad (4.15)$$

となる $P_0 > 0$ が存在する。ここで $B_1^T P_0 \xi = 0$ をみたす任意の $\xi \in R^m (\xi \neq 0)$ を、(4.15)式の左から ξ^T 、右から ξ を乗じると、

$$\begin{aligned} \xi^T (P_0 A + P_0 B_1 K_0 + A^T P_0 + K_0 B_1^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 \\ + C^T C) \xi = \xi^T (P_0 A + A^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 \\ + C^T C) \xi < 0 \end{aligned}$$

となる。Finsler の定理(注1)を $\sigma = 1/\varepsilon$ として用いると、

$$P_0 A + A^T P_0 + \gamma^{-2} P_0 B_2 B_2^T P_0 - \frac{1}{\varepsilon} P_0 B_1 B_1^T P_0 + C^T C < 0 \quad (4.16)$$

となる。したがって(4.16)式を満たす $P_0 > 0$ は存在するので[II]が成り立つ。 ■

5. おわりに

2種類の可安定なプラントに対して H^∞ 制御のためのリカッチ不等式の導出を新しい方法で行った。従来、 H^∞ 制御のためのリカッチ不等式の誘導は、基本的にスペクトル分解の理論の変形(Willems⁹⁾)によって H^∞ ノルムとリカッチ方程式の関係づけを行っていた。本論文では、外乱から制御出力への伝達作用素 T_{vz} の一様ノルム $\|T_{vz}\|_\infty$ に対する不等式条件と同等な LQ-max 問題を直接的に解くアプローチによってリカッチ不等式を導出した。このため周波数領域特有のスペクトル分解や、周波数領域と時間領域とを関係づける Parseval の定理を用いる必要はない。結果はよく知られた事柄であるが、時間領域の解析だけに基いた直接的な証明法なので、復素解析の知識をもたない初学者でも容易に理解できる。

参考文献

- 1) R. W. Brockett: Finite Dimensional Linear Systems Chap. 25, New York: Wiley (1970)
- 2) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State space Solutions to Standard H^2 and H^∞ Control Problem, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-34**-8, 831/847(1989)
- 3) B. A. Francis: A Course in H^∞ Control theory, Springer Verlag (1987)
- 4) D. H. Jacobson: Extensions of Linear Quadratic Control, Optimization and Matrix Theory, Academic Press (1977)
- 5) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)
- 6) I.R. Petersen: Disturbance Attenuation and H^∞ Optimization: A Design Method Based on The Algebraic Riccati Equations, IEEE Trans., **AC-32**-5, 427/429(1987)
- 7) 三平, 美多: 状態空間論による H^∞ 制御の解法, 計測と制御, **29**-2, 129/135(1990)
- 8) J. C. Willems: Least Square Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation, IEEE Trans., **AC-16**-6, 621/634(1987)
- 9) K. Zhou and P. P. Khargonekar: An Algebraic Riccati Equation Approach to H^∞ Optimizations, System and Control Letters, **11**-2, 85/91(1988)

[著者紹介]

志水 清孝 (正会員)
(Vol. 28, No. 7 参照)

(注1) [Finsler の定理⁴⁾] A, Q を実対称行列とする。このとき、 $x^T A x = 0$ となるようなすべての x に対して、 $x^T Q x < 0$ が成り立つならば、 $Q - \sigma A < 0$ となるような正数 σ が存在する。

田 村 太 郎

1991 年, 慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業。現在同大学院理工学研究科修士課程。システム制御理論, 数理計画法などの研究に従事。

英 昌 孝

1989 年, 慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業。91 年同大学院理工学研究科修士課程修了。 H_∞ 制御理論, 数理計画法などの研究に従事。

.....