n D システムのフィードバック補償による Practical 安定化[†]

徐 粒*・池田 貴俊*・斉藤 制海*・阿部 健一*

Feedback Practical-Stabilization of n D Systems

Li XU*, Takatoshi IKEDA*, Osami SAITO* and Kenichi ABE*

In many practical situations, the independent variables $i_1, \dots, i_n$ of an n D signal $x(i_1, \dots, i_n)$ are bounded spatial variables, except that perhaps one is the unbounded temporal variable. Taking this feature into account, Agathoklis and Bruton developed the concept of practical-BIBO stability for n D discrete systems, and showed that the conventional-BIBO stability conditions are too restrictive for many applications.

This paper deals with the problem of feedback practical-stabilization of n D discrete systems whose input and output signals are unbounded in, at most, one dimension. A constructive algorithm is first presented for solving Bezout equation over the ring of practically-stable rational functions. Then, a necessary and sufficient condition for an n D system to be practically-stabilizable is derived and the parametrization of all n D practically-stabilizing compensators is given. These results make it clear that the n D practical-stabilization problem can be essentially solved by using 1D approaches.

Key Words: practical-BIBO stability, n D systems, feedback, stabilization, Bezout equation

1. はじめに

多次元(n D)システムの重要な応用分野として、画像処理、地震データ処理などがよく挙げられる。一般に、このような分野で扱われる n D 信号 $x(i_1, \dots, i_n)$ は、独立変数 $i_1, \dots, i_n$ のうち、一つだけが時間変数、ほかは空間変数という特徴がある。加えて、時間変数の変域には上限がないのに対し、空間変数はほとんど有界な変域に限定されている¹⁾。1D BIBO 安定の概念の直接的な拡張として得られた n D システムの BIBO 安定性²⁾には、上に述べた特徴が考慮されていない。すなわち、従来の n D システムの BIBO 安定性は、 n 個の独立変数に対して制限条件はなく、すべての変数が同時に無限大になることが許されるとの前提で、定義されたものである。これに対して、Agathoklis 氏ら³⁾は、 n 個の独立変数の中で、一つだけが無限になることができ、それ以外の変数の変域はすべて有界であるとするに基づく Practical-

BIBO 安定性の概念を導入した。さらに、 n D システムの Practical-BIBO 安定の判別が n 個の 1D システムの安定問題に帰着できることを示し、従来の BIBO 安定性は多くの実際の場合に対して厳し過ぎることを明らかにした。

本論文の目的は、 n D システムのフィードバック安定化問題を Practical 安定の視点から考察することである。Practical 安定とは閉ループ伝達関数行列のすべての要素が Practical-BIBO 安定であることである。Practical-BIBO 安定の概念は従来の BIBO 安定の場合を包含するので、BIBO 安定性は満足しないが Practical-BIBO 安定であるシステムが存在する¹⁾。このことは、 n D システムのフィードバック安定化問題への従来のアプローチでは n D フィードバック Practical 安定化問題は解決できないことを意味する。なぜなら、極の個数が無限である難点を回避するために、従来のアプローチでは、与えられたプラントが分離型³⁾でなくても、構成した閉ループ系を分離型にするということをその基本としているからである^{4),5)}。1D 多項式の積に分離できる n D 多項式において、おのおのの 1D 多項式が安定ならば、もとの n D 多項式は必ず n D BIBO 安定であるという性質がある。この性質は従来の BIBO 安定なフィードバック系を設計するのに有用であるが、明らかに

[†] 第 14 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1991・12)

* 豊橋技術科学大学 豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1

* Toyohashi University of Technology, Toyohashi

(Received December 16, 1991)

(Revised April 23, 1992)

(BIBO 安定ではないが) Practical-BIBO 安定であるシステムの設計には役立たない。したがって、より有効かつ簡潔な設計法をみつける必要がある。

本論文では、行列分解アプローチを用いて、 nD システムのフィードバック Practical 安定化補償器の設計法を提案する。それにより、 nD システムの Practical 安定化問題は本質的に $1D$ システムの安定化問題に帰着できる。そこでは簡単な nD 多項式代数演算を除いてほとんど $1D$ の手法で行えることが明らかにされる。以下、まず準備として、 nD システムの Practical-BIBO 安定の定義、条件および従来の BIBO 安定性との比較を行う。つぎに、 nD システムの Practical 安定な有理関数環 H における既約行列分解表現の定義と存在条件を与え、同時に H 上の Bezout 方程式の解法を提案する。そしてこれらの結果を用いて、Practical 安定化補償器の設計およびパラメトリゼーションを行う。最後に、数値とシミュレーション例で提案した方法の有効性を確認する。

本論文で使用する記号の一部をここで定義しておく。

R : 実数体, C : 複素数体, A^T : 行列 A の転置,
 $R[z_1, \dots, z_n]$: 変数 $z_1, \dots, z_n$ の実係数多項式環,
 $Z_+^n = \{(i_1, \dots, i_n) | i_1, \dots, i_n \text{ は } \infty \text{ を含む正の整数}\}$,
 $Z_+^{+n} = \{(i_1, \dots, i_n) | i_1, \dots, i_n \text{ は } \infty \text{ を含む正の整数で、ただし二つ以上が同時に } \infty \text{ になることができない}\}$

$$\bar{U} = \{z \in C | |z| \leq 1\}$$

$$\bar{U}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in C^n | |z_k| \in \bar{U}, k=1, \dots, n\}$$

$$U^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in C^n | |z_k| < 1, k=1, \dots, n\}$$

$$T^n = \{(z_1, \dots, z_n) \in C^n | |z_k| = 1, k=1, \dots, n\}$$

2. nD システムの Practical-BIBO 安定性

入出力関係がつぎのような nD 畳み込みにより表現される 1 入力 1 出力線形時不変 causal nD 離散システムを考える。

$$y(i_1, \dots, i_n) = \sum_{k_1=0}^{i_1} \dots \sum_{k_n=0}^{i_n} g(i_1 - k_1, \dots, i_n - k_n) u(k_1, \dots, k_n) \quad (1)$$

ただし、 $u(i_1, \dots, i_n)$ は入力、 $y(i_1, \dots, i_n)$ は出力、 $g(i_1, \dots, i_n)$ はインパルス応答である。 nD Z -変換より、このシステムの伝達関数が (2) 式のように求められる。

$$g(z_1, \dots, z_n) = \mathcal{Z}[g(i_1, \dots, i_n)] \\ = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} g(i_1, \dots, i_n) z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n} \quad (2)$$

ただし、 $z_i, i=1, \dots, n$ は単位遅れ演算子である。

(1) 式の nD 離散システムの BIBO 安定の定義はつぎのように与えられている。

【定義 2.1】^{2),6)} (1) 式の nD 離散システムにおいて、あ

る有限の実数 M について、

$$|u(i_1, \dots, i_n)| \leq M < \infty \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in Z_+^n \quad (3)$$

を満たすすべての入力 $u(i_1, \dots, i_n)$ に対し、出力 $y(i_1, \dots, i_n)$ もまた有界、すなわち

$$|y(i_1, \dots, i_n)| \leq L < \infty \quad (4)$$

を満足する有限の実数 L が実在するとき、またそのときに限り、システム (1) は BIBO 安定であるという。

一方、Practical-BIBO 安定はつぎのように定義される。

【定義 2.2】¹⁾ (1) 式の nD 離散システムにおいて、ある有限の実数 M について、

$$|u(i_1, \dots, i_n)| \leq M < \infty \quad \forall (i_1, \dots, i_n) \in Z_+^n \quad (5)$$

を満たすすべての入力 $u(i_1, \dots, i_n)$ に対する出力 $y(i_1, \dots, i_n)$ に関し

$$|y(i_1, \dots, i_n)| \leq L < \infty \quad (6)$$

を満足する有限の実数 L が存在するとき、またそのときに限り、システム (1) は Practical-BIBO 安定であるという。

両者の相違は、従来の BIBO 安定の定義ではすべての独立変数が同時に無限大になることができるのに対し、Practical-BIBO 安定の定義では、二つ以上の独立変数が同時に無限大にならないところにある。

よく知られているように、システムのインパルス応答がつぎの関係式を満たすことが従来の BIBO 安定のための必要十分条件である^{2),6)}。

$$\sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} |g(i_1, i_2, \dots, i_n)| < \infty \quad (7)$$

これに対し、Agathoklis 氏は Practical-BIBO 安定についてつぎの結果を与えた。

《定理 2.1》¹⁾ nD 離散システム (1) が Practical-BIBO 安定であるための必要十分条件は、つぎの n 個の不等式が成立することである。

$$\sum_{i_1=0}^{N_1} \sum_{i_2=0}^{N_2} \dots \sum_{i_k=0}^{N_k} \dots \sum_{i_n=0}^{N_n} |g(i_1, i_2, \dots, i_k, \dots, i_n)| < \infty \\ k=1, 2, \dots, n \quad (8)$$

ただし、 $N_1, N_2, \dots, N_{k-1}, N_{k+1}, \dots, N_n$ はすべて有限の整数である。

nD 離散システム (1) の伝達関数 $g(z_1, \dots, z_n)$ はつぎのように nD causal 有理関数で表わすことができる。

$$g(z_1, \dots, z_n) = \frac{n(z_1, \dots, z_n)}{d(z_1, \dots, z_n)} \quad (9)$$

ただし、 $n, d \in R[z_1, \dots, z_n]$, $d(0, \dots, 0) \neq 0$ 。Practical-BIBO 安定と伝達関数の特異点の関係は、定理 2.2 より明らかにされている。

《定理 2.2》¹⁾ nD 離散システム (9) が Practical-BIBO 安定であるための必要十分条件は

$$d(0, \dots, 0, z_k, 0, \dots, 0) \neq 0$$

$$\forall z_k \in \bar{U}, k=1, 2, \dots, n \quad (10)$$

であることである。

nD システム(9)が、 T^2 ($n=2$ の場合⁷⁾), または $\bar{U}^n - U^n$ ($n>2$ の場合⁸⁾) において第二種の特異点 (non-essential singularity of the second kind⁹⁾) をもたないならば、BIBO 安定であるための必要十分条件は、

$$d(z_1, \dots, z_n) \neq 0 \quad \forall (z_1, \dots, z_n) \in \bar{U}^n \quad (11)$$

であることが知られている。

条件(10)と(11)を比較すれば、(10)のほうがずっと緩いことがわかる。逆にみれば、従来の BIBO 安定の定義は、多くの実際の場合に対して厳しすぎるともいえる。また、定理 2.2 より、nD システムの Practical-BIBO 安定性のテストは条件(10)の n 個の 1D 多項式の安定性を別々に判定すればよいことも明らかであろう。

3. nD システムの Practical 安定な有理関数環上の既約行列分解表現

まず、nD causal 有理関数環 G と、nD Practical 安定な有理関数環 H をつぎのように定義する。

$$G = \{n/d \mid n, d \in R[z_1, \dots, z_n], d(0, \dots, 0) \neq 0\}$$

$$H = \{n/d \in G \mid d(0, \dots, 0, z_k, 0, \dots, 0) \neq 0 \quad \forall z_k \in \bar{U}, k=1, 2, \dots, n\}$$

また、

$$I = \{h \in H \mid h^{-1} \in G\}$$

$$J = \{h \in H \mid h^{-1} \in H\}$$

とする。 $M(*)$ で集合 $*$ の要素で構成された行列の集合を表わす。 $M(H)$ の行列について、それが正方で、しかもその行列式が $I(J)$ に属すれば、 G -unimodular (H -unimodular) であるという。 $P \in M(G)$ に対し、 $P = N_p D_p^{-1}$ なる $N_p \in M(H)$ と G -unimodular である D_p が存在するとき、 $N_p D_p^{-1}$ を P の ($\{G, H, I, J\}$ における) 右行列分解表現という。

【定義 3.1】 右行列分解表現 $N_p D_p^{-1}$ に対して、Bezout 方程式(12)を満たす $U, V \in M(H)$ が存在するとき、またそのときに限り、 N_p と D_p は H において右既約であるといい、 $N_p D_p^{-1}$ を H 上の右既約行列分解表現という。

$$UD_p + VN_p = I \quad (12)$$

以上の定義は、左についても同様に行われる。任意の $P \in M(G)$ には、 $N_p, D_p \in M(R[z_1, \dots, z_n]) \subset M(H)$ なる右行列分解表現 $P = N_p D_p^{-1}$ が必ず存在するが、それが H において右既約とは限らない。それで、本論文の基本的な結果として、 P の H 上の(右)既約行列分解表現の存在条件を与える。以下、一般性を失わずに、 $N_p, D_p \in M(R[z_1, \dots, z_n])$ と仮定する。また、 $\mathcal{J}_k$ で行列

$$[D_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) \quad N_p(0, \dots, z_k, \dots, 0)]^T$$

のすべての最大次数の小行列式より生成されたイデアル

を表わす。 $\mathcal{V}(\mathcal{J}_k)$ で $\mathcal{J}_k$ の algebraic variety, つまり、それらの最大次数の小行列式の最大共通因子の零点の集合を表わす。ただし、 $k=1, 2, \dots, n$. すると、つぎの結果が得られる。

《定理 3.1》 $N_p, D_p \in M(R[z_1, \dots, z_n])$ なる右行列分解表現 $N_p D_p^{-1}$ に対して、 D_p と N_p が H において右既約である必要十分条件は

$$\mathcal{V}(\mathcal{J}_k) \cap \bar{U} = \emptyset, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (13)$$

であることである。

(証明) 方程式(12)の可解性は、明らかに、つぎの nD 多項式行列方程式を満たす X, Y, Φ が存在することと等価である。

$$XD_p + YN_p = \Phi \quad (14)$$

ただし、 $X, Y, \Phi \in M(R[z_1, \dots, z_n])$, かつ $\det \Phi \in J$.

必要性：Cauchy-Binet 定理より、 $z_k^0 \in \mathcal{V}(\mathcal{J}_k)$ は

$$\begin{aligned} \det \Phi(0, \dots, z_k, \dots, 0) \\ = \det \left\{ \begin{bmatrix} X(0, \dots, z_k, \dots, 0) & Y(0, \dots, z_k, \dots, 0) \\ D_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) & N_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

の零点でもある。よって、 $z_k^0 \in \bar{U}$ ならば、 $\det \Phi \notin J$, つまり、方程式(14)は成立しない。

十分性：条件(13)が成り立つとすると、1D の手法で、 $R[z_k]$ においてつぎの 1D 多項式行列方程式の解を求めることができる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} \tilde{X}_k(z_k) D_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) \\ + \tilde{Y}_k(z_k) N_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) = \tilde{\Phi}_k(z_k) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、

$$\det \tilde{\Phi}_k(z_k) \neq 0 \quad \forall z_k \in \bar{U}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (17)$$

これらの方程式の一般解は、つぎのように表わされる。

$$\begin{cases} \bar{X}_k(z_k) = \tilde{X}_k(z_k) + R_k(z_k) \tilde{N}_k(z_k) \\ \bar{Y}_k(z_k) = \tilde{Y}_k(z_k) - R_k(z_k) \tilde{D}_k(z_k) \end{cases} \quad (18)$$

ただし、 $R_k(z_k)$ は z_k に関する任意の 1D 多項式行列であり、 $\tilde{D}_k(z_k), \tilde{N}_k(z_k)$ は次式を満足し、しかも、 $R[z_k]$ において左既約である。

$$\begin{aligned} \tilde{D}_k^{-1}(z_k) \tilde{N}_k(z_k) \\ = N_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) D_p^{-1}(0, \dots, z_k, \dots, 0) \end{aligned} \quad (19)$$

$E_k(z_k)$ を $D_p(0, \dots, z_k, \dots, 0)$ と $N_p(0, \dots, z_k, \dots, 0)$ の最大右共通因子行列とすれば、

$$\det D_p(0, \dots, z_k, \dots, 0) = \det \tilde{D}_k(z_k) \det E_k(z_k) \quad (20)$$

が成り立つ。また、 $\det D_p \in I$, つまり、 $\det D_p(0, \dots, 0) \neq 0$ なので、

$$\det \tilde{D}_k(0) \neq 0 \quad (21)$$

である。したがって、

$$R_k(z_k) = \tilde{Y}_k(0) \tilde{D}_k^{-1}(0) \triangleq R_k \in R \quad (22)$$

$$H_{yu} = \begin{bmatrix} D_p \Delta^{-1} N_{c1} & -I + D_p \Delta^{-1} D_c & D_p \Delta^{-1} N_{c2} \\ N_p \Delta^{-1} N_{c1} & N_p \Delta^{-1} D_c & N_p \Delta^{-1} N_{c2} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = N_{c2} N_p + D_c D_p \quad (45)$$

このとき、 $\det \Delta \neq 0$ 、かつ $H_{yu} \in \mathbf{M}(\mathbf{H})$ ならば、Fig. 1 のフィードバックシステムが Practical 安定であるという。また、 $H_{yu} \in \mathbf{M}(\mathbf{H})$ なる $C \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ が存在すれば、 P は Practical 可安定であるといい、 C をこのシステムの Practical 安定化補償器という。

[命題 4.1] Fig. 1 のフィードバックシステムが Practical 安定であるための必要十分条件は、 Δ が $\mathbf{H}$ -unimodular であることである。

(証明) 十分性は明らか。必要性は、文献 11)、12) と同じ方法で、 $\mathbf{H}$ において、 D_p, N_p が右既約、 D_c, N_{c2} が左既約であるという仮定条件を用いれば、証明できる。□

《定理 4.1》 nD プラント $P = N_p D_p^{-1} \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ が causal コントローラによって Practical 可安定であるための必要十分条件は D_p と N_p が $\mathbf{H}$ において右既約であることである。

(証明) D_p と N_p が $\mathbf{H}$ において右既約であるとする、定理 3.1 の十分性の証明で示された方法で、方程式 (12) を満たす $U, V \in \mathbf{M}(\mathbf{H})$ が求められる。しかも、(39)、(34)、(31)、(38) 式より

$$\det U(0, \dots, 0) = 0 \quad (51)$$

よって、 $C = U^{-1}V \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ 。したがって、単位行列 I が $\mathbf{H}$ -unimodular であることと命題 4.1 より、十分性が成り立つ。

逆に、命題 4.1 によって、 $C = X^{-1}Y = X^{-1}[Y_1 \ Y_2] \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ が P の Practical 安定化補償器であれば、

$$XD_p + Y_2 N_p = \Phi \quad (52)$$

が成立する。ただし、 Φ は $\mathbf{H}$ -unimodular である。(52) 式は左から Φ^{-1} をかけると、

$$(\Phi^{-1}X)D_p + (\Phi^{-1}Y_2)N_p = I \quad (53)$$

となり、 D_p と N_p が $\mathbf{H}$ において右既約であることを示している。□

以上の結果に基づいて、Practical 安定化補償器のパラメトリゼーションはつぎのようにできる。

《定理 4.2》 $N_p D_p^{-1}$ と $\tilde{D}_p^{-1} \tilde{N}_p$ をそれぞれプラント $P \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ の $\mathbf{H}$ 上の右と左既約行列分解表現とする。また、 $U, V \in \mathbf{M}(\mathbf{H})$ が方程式 $UD_p + VN_p = I$ を満足するとする。このとき、 P のすべての Practical 安定化補償器 $C \in \mathbf{M}(\mathbf{G})$ のクラスはつぎのように与えられる。

$$C \in \{(U + S\tilde{N}_p)^{-1}[Q \ V - S\tilde{D}_p]\}$$

$$Q, S \in \mathbf{M}(\mathbf{H}), \det(U + S\tilde{N}_p) \in \mathbf{I} \quad (54)$$

なお、このとき、 u から y までの Practical 安定な伝達関数は

$$\begin{bmatrix} D_p Q & D_p(U + S\tilde{N}_p) - I & D_p(V - S\tilde{D}_p) \\ N_p Q & N_p(U + S\tilde{N}_p) & N_p(V - S\tilde{D}_p) \end{bmatrix} \quad (55)$$

となっている。

(証明) 十分性は明らか。必要性は文献 13)、4) と同じ方法で、定理 3.1 と定理 4.1 の結果を用いて証明できる。□

5. 数値とシミュレーション例

ここで、数値とシミュレーション例をとおして、提案した設計法の有効性を確認する。

[例 5.1] 伝達関数行列がつぎのような $\mathbf{R}[z_1, z_2]$ における右因子既約 (factor coprime)⁹⁾ 行列分解表現で表わされる 2D MIMO システムを考える。

$$P(z_1, z_2) = N_p(z_1, z_2) D_p^{-1}(z_1, z_2)$$

ただし、

$$D_p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} \frac{(2z_1-1)(2z_1-5)}{16} & -\frac{(2z_2-1)(2z_1-5)z_2}{2} \\ 0 & 2(6z_1+8z_2-7) \end{bmatrix}$$

$$N_p(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} \frac{(2z_1-1)z_2}{16} & \frac{8z_1-2z_2^2+z_2^2-4}{2} \\ \frac{(2z_1-5)^2}{16} & -\frac{(4z_1z_2-2z_1-18z_2-3)z_2}{2} \end{bmatrix}$$

文献 5) の方法で、 $(z_1, z_2) = (1/2, 1/2) \in \bar{U}$ が行列 $[D_p^T(z_1, z_2) \ N_p^T(z_1, z_2)]^T$ のすべての 2×2 小行列式の共通零点であることがわかる。したがって、 P は従来の BIBO 安定の意味では不可安定である^{4b)}。

一方、 $D_p(z_1, 0)$ と $N_p(z_1, 0)$ の最大右共通因子行列 $G(z_1)$ は

$$G(z_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2z_1-5) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であることから、 $\mathcal{V}(\mathcal{J}_1) \cap \bar{U} = \{5/2\} \cap \bar{U} = \emptyset$ が導かれる。また、 $D_p(0, z_2)$ と $N_p(0, z_2)$ が $\mathbf{R}[z_2]$ において既約、つまり、 $\mathcal{V}(\mathcal{J}_2) = \emptyset$ であることも容易に確認できる。したがって、定理 4.1 と定理 3.1 によって、 P は Practical 可安定である。

P の Practical 安定化補償器はつぎの手順で構成できる。まず、方程式 (16) の解がつぎのように求められる。

$$\tilde{X}_1(z_1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad \tilde{Y}_1(z_1) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ \frac{8}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\Phi}_1(z_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2z_1-5) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}(2z_2^3 - z_2^2 + 4) & 0 \\ -\frac{1}{10}z_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_2(z_2) = \begin{bmatrix} 4z_2(2z_2 - 1) & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\Phi}_2(z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで, 明らかに, $\det \bar{\Phi}_1(z) = (2z - 5)/2 \neq 0$, $\det \bar{\Phi}_2(z) = 1 \neq 0$, $\forall z \in \bar{U}$.

つぎに, (19)式を満たす $\bar{D}_1, \bar{N}_1$ と $\bar{D}_2, \bar{N}_2$ を求める.

$$\bar{D}_1(z_1) = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}(6z_1 - 7) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}(2z_1 - 1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_1(z_1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{4}(2z_1 - 1) \\ -\frac{1}{4}(2z_1 - 5) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{D}_2(z_2) = \begin{bmatrix} -(8z_2 - 7) & 0 \\ (8z_2 - 7)z_2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\bar{N}_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}(8z_2 - 7)z_2 & 1 \\ -\frac{1}{5}(8z_2^3 - 7z_2^2 + 25) & 0 \end{bmatrix}$$

そして, $\det \bar{D}_1(0) = -21/16 \neq 0$, $\det \bar{D}_2(0) = -7 \neq 0$ であるので, (22)式の $R_k, k=1, 2$, は

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -\frac{1}{14} & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{14} & 0 \end{bmatrix}$$

と設定できる. これらの結果を(18)式に代入すると,

$$\bar{X}_1(z_1) = \begin{bmatrix} 4(z_1 - 2) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{28}(3z_1 + 2) \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_1(z_1) = \begin{bmatrix} 0 & -4z_1 \\ \frac{9}{28}z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{X}_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{4}{5}(2z_2^3 - z_2^2 + 4) & 0 \\ -\frac{4}{35}z_2^2 & -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$\bar{Y}_2(z_2) = \begin{bmatrix} 4z_2(2z_2 - 1) & 0 \\ -\frac{4}{7}z_2 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる.

$\det \bar{X}_1(0) = 4/7 \neq 0$, $\det \bar{X}_2(0) = -8/35 \neq 0$ であるから, $\bar{X}_1^{-1}(0)$ と $\bar{X}_2^{-1}(0)$ が存在する. したがって, 方程式(27)の解はつぎのように求められる.

$$X_1(z_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(2 - z_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3z_1 + 2) \end{bmatrix}$$

$$Y_1(z_1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}z_1 \\ -\frac{9}{2}z_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1(z_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{16}(2z_1 - 5) & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$$

$$X_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2z_2^3 - z_2^2 + 4) & 0 \\ \frac{8}{5}z_2^2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4}z_2(2z_2 - 1) & 0 \\ 8z_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2(z_2) = \begin{bmatrix} \frac{5}{16} & 0 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$$

明らかに, $X_1(0) = I, X_2(0) = I$ なので, (28)式より,

$$X'_1(z_1) = X_1(z_1) - I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}z_1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}z_1 \end{bmatrix}$$

$$X'_2(z_2) = X_2(z_2) - I = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(2z_2 - 1)z_2^2 & 0 \\ \frac{8}{5}z_2^2 & 0 \end{bmatrix}$$

しかも, $X'_1(0) = 0, X'_2(0) = 0$.

(34), (35)式より, 方程式(14)の解は

$$X(z_1, z_2) = X'_1(z_1) + X'_2(z_2) + I$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(2z_1 - 2z_2^3 + z_2^2 - 4) & 0 \\ \frac{8}{5}z_2^2 & \frac{1}{2}(3z_1 + 2) \end{bmatrix}$$

$$Y(z_1, z_2) = Y_1(z_1) + Y_2(z_2)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{5}{4}z_2(2z_2 - 1) & \frac{1}{2}z_1 \\ -\frac{1}{2}(9z_1 - 16z_2) & 0 \end{bmatrix}$$

と構成される. また, (36)式より, $\Phi(z_1, z_2)$ は

$$\Phi(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(z_1, z_2) & \Phi_{12}(z_1, z_2) \\ \Phi_{21}(z_1, z_2) & \Phi_{22}(z_1, z_2) \end{bmatrix}$$

である. ただし,

$$\Phi_{11}(z_1, z_2) = \frac{4z_2^3z_1^2 - 2z_2^3z_1 - 2z_2^2z_1^2 + z_2^2z_1 - 4z_1 + 10}{32}$$

$$\Phi_{12}(z_1, z_2) = -\frac{z_1z_2(4z_2^4 - 4z_2^3 + z_2^2 - 40z_2 + 8)}{4}$$

$$\Phi_{21}(z_1, z_2) = \frac{z_1z_2(2z_1 - 1)(32z_2 - 45)}{160}$$

$$\Phi_{22}(z_1, z_2) = -\frac{z_1z_2(64z_2^3 - 122z_2^2 + 45z_2 - 1120) + 280}{20}$$

ここで, $\Phi(z_1, 0) = \Phi_1(z_1)$, $\Phi(0, z_2) = \Phi_2(z_2)$ であることが

簡単に確認できる。

最後に、(39)式より、 $U(z_1, z_2)$, $V(z_1, z_2)$ を求め、定理 4.2 によって P の Practical 安定化補償器のクラスを構成すればよい。

[例 5.2] 例 5.1 で与えられたプラントと設計した閉ループ系を考える。(55)式の閉ループ系の伝達関数行列において、 $Q=q^{-1}(z_1, z_2)I \in M(H)$ 、ただし

$$q(z_1, z_2) = 3 + z_1 + z_2 - 1.08z_1z_2$$

とおくと、システムの入力 u_1 から出力 y_2 までの伝達関数行列 $H_{y_2u_1}$ はつぎのようにになっている。

$$H_{y_2u_1} = N_p Q = q^{-1} N_p \triangleq \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$$

ただし、簡単のため h_{12} のシミュレーションだけを行うので、ここでは h_{12} のみを示す。

$$h_{12}(z_1, z_2) = \frac{8z_1 - 2z_1^3 + z_2^2 - 4}{2(3 + z_1 + z_2 - 1.08z_1z_2)}$$

文献 2) の方法で、 $q(z_1, z_2)$ が $\bar{U}^2$ に零点をもち、BIBO 安定ではないことが判断できる。ところが、定理 2.2 によって、 $q(z_1, z_2)$ は Practical 安定であることがわかる。

$h_{12}(z_1, z_2)$ のインパルス応答についてのシミュレーション結果を Fig. 2 に示す。Fig. 2 の結果より、インパルス応答がおおよそ座標平面の対角線に沿って振動していく様子がわかる。実は、このように振動があればそれが必ずおおよそ対角線に沿うことは Practical 安定なインパルス応答の特徴といえる。つまり、このとき、たとえば z_1 軸にある有限の値で切り取った場合、 z_2 軸の方向において、インパルス応答は、ステップ数が十分大きくなるにつれて、必ず零へ収束する。しかも、 z_1 と z_2 の位置を置き換えて考えても成り立つ。しかし、 z_1 と z_2 が同時に無限大になる場合を考えると、インパルス応答は必ずしも零に収束しない。これは、従来の BIBO 安定性の観点からみると、このシステムが不安定である結論と矛盾していないことが明らかである。

また、同じ分母 $q(z_1, z_2)$ を用い、ただし分子を

$$b(z_1, z_2) = 1 + 2z_1 + z_1^2 + 2z_2 + z_2^2 + 4z_1z_2 + 2z_1z_2^2 + 2z_1^2z_2 + z_1^2z_2^2$$

とするときの伝達関数 $b(z_1, z_2)/q(z_1, z_2)$ のインパルス応答を Fig. 3 に示す。この結果から、従来の BIBO 安定性を満たさないが、かなりよい動的性能をもつ Practical 安定なシステムが存在することが確認できる。これは文献 7) で指摘された 2D システムのインパルス応答が零に収束してもそのシステムが必ずしも BIBO 安定とならないことを示しているとも思われる。この点では、1D の場合と大きく違うので、注意が必要である。また、Fig. 3 の結果を Fig. 2 と比べてみると、システム伝達関数の零点は、そのシステムの動的性能に対して相当の影響を与

Fig. 2 Impulse response of $h_{12}(z_1, z_2)$

Fig. 3 Impulse response of $b(z_1, z_2)/q(z_1, z_2)$

えていることもわかる。言い換えれば、満足な動的性能をもつ nD システムを設計するには、(Practical または従来の BIBO) 安定化だけではまだ不十分であるといえよう。

6. 結 び

本論文では、Agathoklis 氏らによって導入された Practical-BIBO 安定の概念に基づいて、 nD システムのフィードバック Practical 安定化問題を考えた。特に、従来の BIBO 可安定ではないが Practical 可安定である nD システムに重点をおいて考察を行った。

最近、学習制御系や multipass プロセスなどを 2D システムモデルでとらえ、それに 2D システムの理論を適用し解析するといった、 nD システム理論の応用として興味深い報告がなされている^{14)~16)}。これらのシステムにみられる共通の特徴としては、繰り返す回数に特に制限はないが、繰り返されるプロセスは有限時間区間に制限されている。したがって、本論文の結果をもとに、これらのシステムに対する統一的な設計法を構成することも可能であろうと考えている。

また、状態空間における nD システムの Practical 安定化補償器設計およびそれと本論文の代数法との関連についても考察を行ったが、つぎの機会に報告する。

参 考 文 献

- 1) P. Agathoklis and L. Bruton: Practical-BIBO Stability of n -Dimensional Discrete Systems, IEE Proc. G. Electron. Circuits & Systems, 6, 236/242 (1983)
- 2) T. S. Huang: Stability of Two-Dimensional Recursive Filters, IEEE Trans., AU-20, 158/163 (1972)
- 3) T. Kaczorek, Two-Dimensional Linear Systems, Ber-

- lin: Springer-Verlag, p. 127 (1985)
- 4) J. P. Guiver and N. K. Bose: Causal and Weakly Causal 2-D filters with Applications in Stabilization, Multidimensional Systems Theory, (ed. N. K. Bose) Dordrecht: Reidel, p. 52 (1985)
 - 5) L. Xu, O. Saito and K. Abe: A Note on Stabilization Algorithms for 2-D Systems, 第13回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 333/336 (1991)
 - 6) E. I. Jury: Stability of multidimensional scalar and matrix polynomials, Proc. IEEE, **66**-Sept., 1018/1047 (1978)
 - 7) D. Goodman: Some Stability Properties of Two-Dimensional Linear Shift-Invariant Digital Filters, IEEE Trans. Circuits and Systems, **CAS-24**, 201/208 (1977)
 - 8) M. N. Swamy, L. M. Roytman and E. I. Plotkin: On Stability Properties of Three- and Higher Dimensional Linear Shift-Invariant Digital Filters, IEEE Trans., **CAS-32**, 888/891 (1985)
 - 9) N. K. Bose: Applied Multidimensional System Theory, Van Nostrand Reinhold (1982)
 - 10) V. Kučera: Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach, Chichester: Wiley (1979)
 - 11) M. Vidyasagar, H. Schneider and B. A. Francis: Algebraic and Topological Aspects of Feedback Stabilization, IEEE Trans., **AC-27**-4, 880/894 (1982)
 - 12) M. Vidyasagar: Control System Synthesis: A Factorization Approach, Cambridge, MA: MIT Press (1985)
 - 13) C. A. Desoer, R. Liu, J. Murray and R. Sacks: Feedback Systems Design: The Fractional Representation Approach to Analysis and Synthesis, IEEE Trans., **AC-25**, 399/412 (1980)
 - 14) F. M. Boland and D. H. Owens: Linear Multipasses: A Two-Dimensional Interpretation, IEE Proc. 127, Pt. **D-5**, 189/193 (1980)
 - 15) Z. Geng, R. Carroll and J. Xie: Two-Dimensional Model and Algorithm Analysis for a Class of Iterative Learning Control Systems, Int. J. Control, **52**-4, 833/862 (1990)
 - 16) 宮里, 大島: 学習制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **23**-6, 576/583 (1987)

[著者紹介]

徐 粒 (学生会員)

1982 年, 中国華中理工大学自動制御系卒業。90 年豊橋技術科学大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了, 同年同大学大学院システム情報工学専攻博士後期課程入学, 現在に至る。多次元線形システム理論, および計算機代数学の多次元制御理論への応用の研究に従事。

池 田 貴 俊 (学生会員)

1992 年, 豊橋技術科学大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了, 同年特許庁入庁, 現在に至る。在学中, 多次元線形システムの安定性に関する研究に従事。

斉 藤 制 海 (正会員)

(Vol. 28, No. 2 参照)

阿 部 健 一 (正会員)

(Vol. 28, No. 2 参照)