二次安定化トラッキング制御とその高速位置決め装置への応用

山 本 茂*・西 田 隆 男*・木 村 英 紀*

Quadratic Stabilization Tracking Control and Its Application to a High Speed Positioning Control System

Shigeru YAMAMOTO*, Takao NISHIDA* and Hidenori KIMURA*

This paper considers a tracking problem for a linear system with norm bounded time-varying uncertainties. The aim is to design a controller so that the system is quadratically stable for all allowable uncertainties and its output tracks the reference input which is represented as smoothly differentiable function as closely as possible. A controller having this property is given as a two-degrees of freedom controller. The feedback controller is designed by solving Riccati equations and the feedforward controller is designed as an inverse system of the nominal system. The conditions under which the system asymptotically tracks any constant reference input are considered. The method is applied successfully to a position control system of a mechanical printing machine.

Key Words: quadratic stabilization, robust control, tracking control, high speed position control

1. はじめに

不確かさを含むシステムを制御するロバスト制御の重要性は最近注目を集めている¹⁾。特にロバスト安定化は必要不可欠な設計仕様である。

従来より有界な不確かさを含む状態空間モデルを安定化するフィードバック制御を求める研究が行われてきた。これらの研究は、許容される有界時変な不確かさに対して共通の二次のリアプノフ関数を用いて安定を示すことから二次安定(quadratic stability)理論とよばれている。この理論の最近の主な成果として、PetersenやKhargonekarらによる状態フィードバックを用いた二次安定化問題^{2)~4)}や、Xieらによる出力フィードバックを用いた二次安定化問題⁵⁾がある。Xieらは安定化のみならず外乱抑制も達成するコントローラを求める手段を導いた。

一方、不確かさを含むシステムのトラッキング問題を扱った研究もなされている⁶⁾。これの特徴は、線形フィードバックに非線形フィードバックを付加して所望のト

ラッキング特性を達成するものである。また、二次安定性に基づいた状態フィードバックによるサーボ系の研究もなされている^{8),9)}。

この論文では、目標入力がある種の時間多項式に限定し、有界時変な不確かさをもつ線形システムを対象とした線形フィードバックによるトラッキング問題を扱う。トラッキング特性は制御対象に存在する不確かさにより劣化するが、不確かさがシステムに加わる外乱を生成するとみて、外乱抑制を考慮に入れた線形フィードバックにより、トラッキング特性を改善することを試みる。制御系はフィードフォワード制御とフィードバック制御が組み合わされたものとなる。フィードフォワードコントローラはその出力が不確かさが無い制御対象に入力として与えられたとき、その対象の出力が所望のものとなるように設計される。フィードバックコントローラの設計は、基本的には文献5)で求められた外乱抑制二次安定化手法を用いるが不確かさの記述が異なっており、従来の結果より保守性を減らした新しい方法である。さらに、不確かさの構造と目標値に関して、定常偏差なく追従するための条件を導く。最後に、位置決め制御系へ適用した実験結果を示す。

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘 2-1

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita
(Received April 1, 1992)
(Revised August 7, 1992)

2. 不確かなシステムに対するトラッキング制御

2.1 不確かな制御対象の記述

次式で表現される 1 入力 1 出力 (SISO) の不確かなシステムを考える.

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t))x + (B + \Delta B(t))u \quad (1)$$

$$y = (C + \Delta C(t))x$$

ここで, $x(t)$ は状態, $u(t)$ は入力, $y(t)$ は出力を表わし, $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbf{R}^{1 \times n}$ とする. (A, B) は可制御, (C, A) は可観測とする. $\Delta A(t)$, $\Delta B(t)$, $\Delta C(t)$ はそれぞれ時変な不確かさを表現する実数値行列である. ここでは有界な不確かさに限定し, 適当なサイズをもつ実定数行列 D_A , D_B , D_C , E_A , E_B , E_C と, 有界時変な行列 $F_A(t)$, $F_B(t)$, $F_C(t)$ によって, つぎの式で表現されているものとする.

$$\Delta A(t) = D_A F_A(t) E_A \quad \text{where } F_A(t) \in U$$

$$\Delta B(t) = D_B F_B(t) E_B \quad \text{where } F_B(t) \in U \quad (2)$$

$$\Delta C(t) = D_C F_C(t) E_C \quad \text{where } F_C(t) \in U$$

ただし,

$$U = \{F(t) \in \mathbf{R}^{i \times j} : F(t)^T F(t) \leq I \text{ for all } t, \\ F(\cdot) \text{ の要素は Lebesgue 可測} \} \quad (3)$$

2.2 目標入力

追従させたい目標値 $r(t)$ は, (i) ある時間 T 以降一定値を保ち, (ii) すべての時間において少なくとも k 階微分可能な時間 t の多項式で与えられるものとする. ただし, k は対象のノミナルな伝達関数の分母と分子の次数差である. たとえば, 4 章で扱うメカニカルな対象に対しては, r は次式で表わされる.

$$r(t) = \omega_{\max} T_a \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t}{T_a} \right)^4 + \left(\frac{t}{T_a} \right)^3 \right\} \\ \text{if } 0 \leq t \leq T_a \quad (4a)$$

$$r(t) = \omega_{\max} T_a \left\{ \left(\frac{t}{T_a} \right) - \frac{1}{2} \right\} \quad \text{if } T_a \leq t \leq T - T_b \\ (4b)$$

$$r(t) = \omega_{\max} T_b \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{t - T + T_b}{T_b} \right)^4 - \left(\frac{t - T + T_b}{T_b} \right)^3 \right. \\ \left. + \left(\frac{t - T + T_b}{T_b} \right) - \frac{1}{2} \right\} + r_{\text{end}} \\ \text{if } T - T_b \leq t \leq T \quad (4c)$$

$$r(t) = r_{\text{end}} \quad \text{if } t \geq T \quad (4d)$$

この (4) 式は初期位置 0 のところから目標最終位置 r_{end} へ時間 T で移動させる場合の目標軌道の例を示している. $\omega_{\max}$ は最高速度を, T_a , T_b はそれぞれ加速時間, 減速時間の長さを表わす. これらの値は

$$\frac{r_{\text{end}}}{\omega_{\max}} = T - \frac{1}{2} (T_a + T_b) \quad (4e)$$

なる関係が成り立つように選ばれる.

Fig. 1 Control System

2.3 制御目的

設計目的はノミナルなシステム ($\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$) に対して出力 y が目標入力 r に完全に一致し, 不確かさが存在する場合でも, 誤差 $y - r$ をできるかぎり減少させることにある.

この目的を達成するため, 制御入力 u として次式で表わされるものを考える.

$$u = u_r + C_{FB}(s)(y - r) \quad (5)$$

ここで, u_r はフィードフォワード入力, $C_{FB}(s)$ はフィードバックコントローラを表わす. 制御系の構成を Fig. 1 に示す.

2.4 フィードフォワード入力

フィードフォワード入力 u_r は与えられた目標入力 r からフィードフォワードコントローラ $C_{FF}(s)$ によって

$$u_r = C_{FF}(s)r \quad (6)$$

でつくられるものとする. $C_{FF}(s)$ の選び方としては, ノミナルな対象 (伝達関数を $G(s)$ とする) の入力として u_r が与えられたとき出力が r となるようにする.

すなわち

$$r = G(s)u_r \quad (7)$$

が成り立つようにする. これは明らかに

$$C_{FF}(s) = G(s)^{-1} \quad (8)$$

である. ここで注意しなくてはならないことは $G(s)^{-1}$ の分子多項式の次数が分母多項式の次数よりも大きいことで, それにより目標入力 r が制約される. たとえば

$$C_{FF}(s) = \frac{s^2 + 1}{s} \quad (9)$$

である場合, r が少なくとも 1 階微分可能であれば u_r は有界となる.

ノミナルな対象の入力に u_r が与えられたときは

$$\dot{x}_r = Ax_r + Bu_r \quad (10)$$

$$r = Cx_r$$

なる関係が成り立っている.

2.5 フィードバックコントローラ

フィードバックコントローラ $C_{FB}(s)$ は対象にパラメータ変動がある場合でも出力が目標に追従するように設計されるもので, 次式で表わされる線形時不変な真にプロパなコントローラである.

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}(y - r) \quad (11)$$

$$u = \hat{C}\hat{x}$$

対象の状態 x の目標軌道 x_r からの偏差を

$$\tilde{x} = x - x_r \quad (12)$$

とする。偏差系は

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (A + \Delta A)\tilde{x} + (B + \Delta B)(u - u_r) + [B_w \ 0]w \\ y - r &= (C + \Delta C)\tilde{x} + [0 \ D_c]w \end{aligned} \quad (13)$$

ただし

$$B_w = [D_A \ D_B], \quad w = \begin{bmatrix} F_A E_A x_r \\ F_B E_B u_r \\ F_C E_C x_r \end{bmatrix} \quad (14)$$

となるので、フィードバックコントローラ(11)とフィードフォワードコントローラ(8)をもつ制御則(5)を制御対象(1)に施したときの閉ループ偏差系は、偏差 $z = y - r$ を制御量としてつぎのようにまとめることができる。

$$\dot{x}_c = (A_c + \Delta A_c)x_c + B_c w \quad (15)$$

$$z = C_c x_c$$

ただし、

$$\begin{aligned} x_c &= \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x} \end{bmatrix}, \\ A_c &= \begin{bmatrix} A & B\hat{C} \\ \hat{B}C & \hat{A} \end{bmatrix}, \quad B_c = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ 0 & \hat{B}D_c \end{bmatrix}, \quad C_c = [C \ 0], \\ \Delta A_c &= \begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B\hat{C} \\ \hat{B}\Delta C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

このとき、われわれの考えるトラッキング問題はつぎのように定義される。

【定義1】 与えられた正の定数 γ に対し、閉ループ偏差システム(15)が以下の条件を満たす線形時不変な出力フィードバックコントローラ(11)が存在するとき、システム(1)は出力 γ トラッキング可能であるという。

(i) $w=0$ のとき、次式を満足する行列 $X>0$ と定数 $\alpha>0$ がすべての許容される不確かさ $\Delta A_c(t)$ に対し存在する。

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_c) &= x_c^T \{ (A_c + \Delta A_c)^T X + X(A_c + \Delta A_c) \} x_c \\ &< -\alpha x_c^T x_c \end{aligned} \quad (17)$$

(ii) $x_c(0)=0$ のとき、すべての許容される不確かさ $\Delta A_c(t)$ と $0 \neq w \in L_2[0, \infty)$ に対し

$$\|y - r\|_2 < \gamma \|w\|_2 \quad (18)$$

が成り立つ。ただし、 $\|\cdot\|_2$ は $L_2[0, \infty)$ ノルムである。

(注意1) 定義1の条件(i)は閉ループ偏差システムが2次安定であることを意味しており、(17)式が満足されるとき、 $V(x_c) = x_c^T X x_c$ はリアプノフ関数となり平衡点 $x_c=0$ の漸近安定性が保証される。条件(ii)は外乱の偏差への影響を γ 以下に抑えることを意味している。

(注意2) 定義1は文献5)における γ 外乱抑制2次安定化の定義を閉ループ偏差系に対して定義し直したものである。

つぎに示す定理1は w が $L_2[0, \infty)$ に属する条件を与える。その前につぎの仮定をおく。

[仮定1]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+1$$

《定理1》 つぎの条件が満足されるとき、 w は $L_2[0, \infty)$ に属する。

$$(i) \quad \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \\ E_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

(ii) x_r, u_r は有界である。

(iii) $\dot{x}_r(t)=0$ ($t \geq T$) となる有限な時間 $T>0$ が存在する。

(定理1の証明) まず、 $t \geq T$ で $w(t)=0$ となることを示す。 $t \geq T$ で $\dot{x}_r(t)=0$ であるから、

$$\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix}$$

が成り立つ。仮定1を用いて

$$\begin{bmatrix} x_r \\ u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

となる。外乱 w は

$$w = \begin{bmatrix} F_A & 0 & 0 \\ 0 & F_B & 0 \\ 0 & 0 & F_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \\ E_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

となるので、条件(i)が成り立てば、 $t \geq T$ において、いかなるモデル変動に対しても、 $w(t)=0$ となる。 $t < T$ のときも、(8)式から(ii)が成り立てば、 $F_A, F_B, F_C \in U$ であるので、 $w(t)$ は(14)式の形から有界な値をもつ。したがって $w(t)$ は $L_2[0, \infty)$ に属する。

定理1の結果のもとでつぎの定理2が示される。

《定理2》 定理1の条件が満足されるとき、次式を満足する正定行列 $P>0, S>0, Q_p>0, Q_s>0$ と定数 $\alpha_a>0, \alpha_b>0, \alpha_c>0$ が存在すれば、システム(1)は出力 γ トラッキング可能である。

$$\begin{aligned} A^T P + PA - PBR_B^{-1}B^T P + \gamma^{-2}PB_w B_w^T P \\ + PDD^T P + C^T C + E^T E + Q_p = 0 \end{aligned} \quad (20 a)$$

$$\begin{aligned} SA^T + AS - SC^T R_c^{-1}CS + SC^T CS \\ + SE^T ES + \gamma^{-2}B_w B_w^T + DD^T + Q_s = 0 \end{aligned} \quad (20 b)$$

$$S^{-1} - P > 0 \quad (20 c)$$

ただし

$$DD^T := \alpha_a^{-2} D_A D_A^T + \alpha_b^{-2} D_B D_B^T \quad (20 d)$$

$$E^T E := \alpha_a^2 E_A^T E_A + \alpha_c^2 E_C^T E_C \quad (20 e)$$

$$R_B := \alpha_b^2 E_B^T E_B + \Phi_B \quad (20 f)$$

Φ_B は $R_B > 0$ とする任意の半正定行列。

$E_B=0$ のときは任意の正定行列。

$$R_c := (\alpha_c^{-2} + \gamma^{-2}) D_c D_c^T + \Phi_c \quad (20 g)$$

Φ_c は $R_c > 0$ とする任意の半正定行列.

$D_c = 0$ のときは任意の正定行列.

このとき, 出力フィードバックコントローラの一つはこれらの値を用いて,

$$\hat{A} = A + B\hat{C} - \hat{B}C + (DD^T + \gamma^{-2}B_w B_w^T)P - (S^{-1} - P)^{-1}Q_P \quad (21a)$$

$$\hat{B} = (S^{-1} - P)^{-1}C^T R_c^{-1} \quad (21b)$$

$$\hat{C} = -R_B^{-1}B^T P \quad (21c)$$

で与えられる.

(注意 3) 文献 5) ではより一般的な場合の必要十分条件を導いている. その不確かさは

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} F(t) [E_1 \ E_2]$$

なる形で表現されている. われわれの扱う不確かさ (2) は上の部分集合になるので, 文献 5) の結果を直接適用することもできるが, その結果は保守的なものとなりやすい. 定理 2 はその欠点を補うものである.

(定理 2 の証明) 定理 2 の条件を満足する解が存在したとする. 文献 5) の補題 2.2 は, 閉ループ偏差系 (15) に関し

$$(A_c + \Delta A_c(t))^T X + X(A_c + \Delta A_c(t)) + \gamma^{-2} X B_c B_c^T X + C_c^T C_c < 0 \quad (22)$$

を満たす正定行列 X が存在すれば, システム (1) は出力 γ トラッキング可能であることを示している. よって, (22) 式を示せば十分である.

(20) 式の正定解 P , S を用いてつぎの行列 X を定義する.

$$X = \begin{bmatrix} S^{-1} & -S^{-1} + P \\ -S^{-1} + P & S^{-1} - P \end{bmatrix} \quad (23)$$

この行列が正定行列であることは, つぎの正則行列

$$T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & I \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\bar{X} = T^{-T} X T^{-1} = \begin{bmatrix} P & -P \\ -P & S^{-1} \end{bmatrix} \quad (24)$$

のように変換することで, (20c) の条件を用いれば, $\bar{X}$ が正定行列であることからわかる. したがって, このように定義した X が (22) 式を満たすことを以下に示す. まず (22) 式左辺を

$$L = (A_c + \Delta A_c(t))^T X + X(A_c + \Delta A_c(t)) + \gamma^{-2} X B_c B_c^T X + C_c^T C_c \quad (25)$$

で定義する. この式の $\Delta A_c(t)$ に関する計算は, 文献 4) の Fact (A.1) と各 F の最大特異値が 1 以下であることを用いて,

$$X \Delta A_c + \Delta A_c^T X$$

$$\begin{aligned} &= X \begin{bmatrix} D_A F_A E_A & D_B F_B E_B \hat{C} \\ \hat{B} D_c F_c E_c & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} D_A F_A E_A & D_B F_B E_B \hat{C} \\ \hat{B} D_c F_c E_c & 0 \end{bmatrix}^T X \\ &\leq X \begin{bmatrix} \alpha_A^2 D_A D_A^T + \alpha_B^2 D_B D_B^T & 0 \\ 0 & \alpha_c^2 \hat{B} D_c D_c^T \hat{B}^T \end{bmatrix} X \\ &\quad + \begin{bmatrix} \alpha_A^2 E_A^T E_A + \alpha_c^2 E_c^T E_c & 0 \\ 0 & \alpha_B^2 \hat{C}^T E_B^T E_B \hat{C} \end{bmatrix} \\ &\leq X \begin{bmatrix} DD^T & 0 \\ 0 & \hat{B}(\alpha_c^2 D_c D_c^T + \Phi_c) \hat{B}^T \end{bmatrix} X \\ &\quad + \begin{bmatrix} E^T E & 0 \\ 0 & \hat{C}^T(\alpha_B^2 E_B^T E_B + \Phi_B) \hat{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. つぎに $\bar{A}_c$, $\bar{B}_c$, $\bar{C}_c$, $\bar{D}_c$, $\bar{E}_c$ を先の正則行列 T を用いてつぎのように定義する.

$$\bar{A}_c = T A_c T^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{A} + \hat{B}C & -\hat{B}C \\ \hat{A} + \hat{B}C - A - B\hat{C} & A - B\hat{C} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_c = T B_c = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B} D_c \\ -B_w & \hat{B} D_c \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_c = C_c T^{-1} = [C \ -C]$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_c &= T \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & \hat{B}(\alpha_c^2 D_c D_c^T + \Phi_c)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}(\alpha_c^2 D_c D_c^T + \Phi_c)^{\frac{1}{2}} \\ -D & \hat{B}(\alpha_c^2 D_c D_c^T + \Phi_c)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_c &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & (\alpha_B^2 E_B^T E_B + \Phi_B)^{\frac{1}{2}} \hat{C} \end{bmatrix} T^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} E & -E \\ -D & (\alpha_B^2 E_B^T E_B + \Phi_B)^{\frac{1}{2}} \hat{C} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

これらの定義と先の不等式より次式が成り立つ.

$$L \leq T \{ \bar{A}_c^T \bar{X} + \bar{X} \bar{A}_c + \bar{X} \bar{D}_c \bar{D}_c^T \bar{X} + \bar{E}_c^T \bar{E}_c + \gamma^{-2} \bar{X} \bar{B}_c \bar{B}_c^T \bar{X} + \bar{C}_c^T \bar{C}_c \} T$$

上式の $\{ \}$ の中の (2, 1) ブロックを (21) 式を用いてまとめると,

$$\begin{aligned} &(S^{-1} - P)(\hat{A} + \hat{B}C) - S^{-1}(A + B\hat{C}) - A^T P \\ &\quad - S^{-1}DD^T P - E^T E - \gamma^{-2}S^{-1}B_w B_w^T P - C^T C \\ &= (S^{-1} - P)\{A + B\hat{C} - \hat{B}C + DD^T P + \gamma^{-2}B_w B_w^T P \\ &\quad - (S^{-1} - P)^{-1}Q_P + \hat{B}C\} - S^{-1}(A + B\hat{C}) \\ &\quad - A^T P - S^{-1}DD^T P - E^T E \\ &\quad - \gamma^{-2}S^{-1}B_w B_w^T P - C^T C \\ &= -P(A + B\hat{C}) - PDD^T P - Q_P - A^T P \\ &\quad - E^T E - \gamma^{-2}PB_w B_w^T P - C^T C = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

同様に, (1, 1) ブロックと (2, 2) ブロックは, (21) 式および (20a) 式と (20b) 式を用いて,

$$\begin{aligned} &P(A + B\hat{C}) + (A + B\hat{C})^T P + PDD^T P + E^T E \\ &\quad + \hat{C}^T E_B^T E_B \hat{C} + \gamma^{-2}PB_w B_w^T P - C^T C \\ &= PA + A^T P + PDD^T P + E^T E + \hat{C}^T E_B^T E_B \hat{C} \\ &\quad + PB\hat{C} + \hat{C}^T B^T P + \gamma^{-2}PB_w B_w^T P - C^T C \end{aligned}$$

$$= -Q_P \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & S^{-1}A - (S^{-1} - P)\bar{B}C + A^T S^{-1} - C^T \bar{B}(S^{-1} - P) \\ & + S^{-1}DD^T S^{-1} + (S^{-1} - P) \\ & \times \bar{B}\{(\gamma^{-2} + \alpha_c^{-2})D_c D_c^T + \Phi_c\}\bar{B}^T(S^{-1} - P) \\ & + E^T E + \gamma^{-2} S^{-1} B_w B_w^T S^{-1} + C^T C \\ & = S^{-1}A + A^T S^{-1} + S^{-1}DD^T S^{-1} - 2C^T R_c^{-1}C \\ & + C^T R_c^{-1}R_c R_c^{-1}C \\ & + E^T E + \gamma^{-2} S^{-1} B_w B_w^T S^{-1} + C^T C \\ & = -S^{-1}Q_S S^{-1} \quad (28) \end{aligned}$$

したがって、

$$L \leq -T^T \begin{bmatrix} Q_P & 0 \\ 0 & S^{-1}Q_S S^{-1} \end{bmatrix} T < 0 \quad (29)$$

となり、定理が証明された。

3. 定常特性の検討

この章は定理1の(i)の条件に關しての考察である。この条件は目標値の終値が一定となると、 γ トラッキングコントローラで閉ループを構成した場合、外乱 w が定常でゼロとなる条件である。外乱 w が定常でゼロとなれば、閉ループ系が2次安定となることから、定常偏差は漸近的にゼロとなり、ロバストなサーボが実現可能となる。以下に外乱 w が定常でゼロとなる条件を導く。

(13)式の偏差系を簡単のためにつぎのように書き換える。($\bar{x}$ を x に、 $[B_w \ 0]$ を B_1 に、 $y - r$ を y になどなど)

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= (A + D_A F_A(t) E_A) \bar{x} + (B + D_B F_B(t) E_B) u + B_1 w \\ y &= (C + D_C F_C(t) E_C) \bar{x} + B_2 w \quad (30) \end{aligned}$$

は正則変換 T により

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= (\bar{A} + \bar{D}_A F_A(t) \bar{E}_A) \xi + (\bar{B} + \bar{D}_B F_B(t) \bar{E}_B) u + \bar{B}_1 w \\ y &= (\bar{C} + \bar{D}_C F_C(t) \bar{E}_C) \xi + \bar{B}_2 w \quad (31) \end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\begin{aligned} \bar{A} &= T^{-1}AT, \quad \bar{D}_A = T^{-1}D_A, \quad \bar{E}_A = E_A T, \quad \bar{B}_1 = T^{-1}B_1, \\ \bar{B} &= T^{-1}B, \quad \bar{D}_B = T^{-1}D_B, \quad \bar{E}_B = E_B, \\ \bar{C} &= CT, \quad \bar{D}_C = D_C, \quad \bar{E}_C = E_C T, \quad (32) \end{aligned}$$

今、変換後のノミナルシステムが

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\bar{C} = [c_0 \cdots \cdots c_{n-1}]$$

である場合を考える。このときのノミナル伝達関数は

$$G(s) = b \frac{c_{n-1}s^{n-1} + \cdots + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0} \quad (34)$$

である。このシステムに対し、仮定1が成り立つとすれば、このシステムは原点に零点をもたない。すなわち、 $c_0 \neq 0$ である。このとき定理1の(i)の条件を計算する

と、

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \\ E_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \\ E_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ & \quad \times \left\{ \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \bar{E}_A & 0 \\ 0 & \bar{E}_B \\ \bar{E}_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \bar{E}_A & 0 \\ 0 & \bar{E}_B \\ \bar{E}_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & b \\ c_0 & \cdots & \cdots & \cdots & c_{n-1} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \bar{E}_A & 0 \\ 0 & \bar{E}_B \\ \bar{E}_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{-1} & & & & \\ & 0 & & & \\ & & * & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \\ & & & & & a_0 b^{-1} c_0^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ r \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \bar{E}_A & 0 \\ 0 & \bar{E}_B \\ \bar{E}_C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^{-1} r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_0 b^{-1} c_0^{-1} r \end{bmatrix} \quad (35) \end{aligned}$$

となる。このことから

《定理3》 定常値で外乱 w が零となるには

$$(a) \quad \bar{E}_A(1) = 0$$

$$(b) \quad \bar{E}_B a_0 = 0$$

$$(c) \quad \bar{E}_C(1) = 0$$

が成り立つことが必要十分である。ただし、 $\bar{E}_A(1)$ と $\bar{E}_C(1)$ はそれぞれ $\bar{E}_A$ と $\bar{E}_C$ の1列目を意味する。

さらに、システムがどのようなパラメータ変動に対しても原点に固有値をもつ場合(すなわち $a_0 = 0$)、つぎのことが成り立つ。

系1. システムが変動しても原点に固有値をもつならば、定常値で外乱 w が零となるには

$$(a) \quad \bar{E}_A(1) = 0$$

$$(b) \quad \bar{E}_C(1) = 0$$

が成り立つことが必要十分である。ただし、 $\bar{E}_A(1)$ と $\bar{E}_C(1)$ はそれぞれ $\bar{E}_A$ と $\bar{E}_C$ の1列目を意味する。

定理1の(i)の条件が満足されない場合の補償とし

て、実現が

$$\begin{aligned}\dot{x}_I &= b_I u \\ y &= c_I x_I\end{aligned}\quad (36)$$

となる積分器を (31) 式の出力の後に付加することを考える。このとき拡大系は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_I \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & b_I \bar{C} \\ 0 & \bar{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_I \\ \xi \end{bmatrix} + \bar{D}_A \bar{F}_A \bar{E}_A \begin{bmatrix} x_I \\ \xi \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{D}_B \end{bmatrix} F_B(t) \bar{E}_B \Big\} u + \begin{bmatrix} b_I B_2 \\ \bar{B}_1 \end{bmatrix} w \quad (37) \\ y &= [c_I \ 0] \begin{bmatrix} x_I \\ \xi \end{bmatrix}\end{aligned}$$

となる。ただし、

$$\bar{D}_A = \begin{bmatrix} b_I \bar{D}_C & 0 \\ 0 & \bar{D}_A \end{bmatrix}, \quad \bar{F}_A = \begin{bmatrix} F_C & 0 \\ 0 & F_A \end{bmatrix}, \quad \bar{E}_A = \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}_C \\ 0 & \bar{E}_A \end{bmatrix}$$

偏差系に加わる定常時の外乱は

$$\begin{aligned}w &= \begin{bmatrix} \bar{F}_A & 0 \\ 0 & F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{E}_A & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 0 & b_I c_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_I c_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_0 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} & b \\ c_I & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_C & 0 & 0 \\ 0 & F_A & 0 \\ 0 & 0 & F_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [0 \ \bar{E}_C] & 0 \\ [0 \ \bar{E}_A] & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} & c_I^{-1} \\ & 0 \\ & \vdots \\ & \vdots \\ & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって定理 1 の条件が満たされないような場合は、積分器をフィードバックループの中に挿入し、その拡大系に対しフィードバックコントローラを設計すれば定常偏差を 0 にすることが可能になる。

このことは、制御対象のパラメータが時変に変動しても内部モデル原理が成り立つことを示している。

4. 高速位置決め装置への適用例

提案した制御方法を高速位置決め装置である機械式写植機の文字盤駆動装置に適用する。この写植機の文字盤の位置を高速に制御するのが目的となる。文字盤はボールネジとそれに直結された交流同期モータにより駆動さ

れる。伝達関数は

$$G(s) = \frac{K}{Js^2 + Ds} \quad (39)$$

で表現される。このシステムへの入力モータの電圧で、出力はモータの回転角である (文字盤の位置はモータの回転角によって測定される)。\$K\$ はトルク定数、\$J\$ は負荷のイナーシャ、\$D\$ は負荷の粘性係数である。各パラメータの値は

$$\begin{aligned}J &= 1.76 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2 \\ D &= 3.37 \times 10^{-4} \text{ kgm}^2/\text{s} \\ K &= 2.00 \times 10^{-1} \text{ Nm/V}\end{aligned}$$

である。不確かさを考慮にいたした状態空間モデルは次式である。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + D_A F_A E_A \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} + D_B F_B E_B \Big\} u\end{aligned}\quad (40)$$

$$y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

ただし、\$a = D/J\$、\$b = K/J\$。これら \$a\$、\$b\$ の値にノミナル値の 20% の不確かさがあるとして、

$$D_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$E_A = [0.2a \ 0], \quad E_B = 0.2b$$

目標入力 \$r\$ として 2.2 節に示した関数を用いる。各パラメータは、

$$\begin{aligned}r_{\text{end}} &= 8 \text{ cm} \\ \omega_{\text{max}} &= 3600 \text{ rpm} \\ T &= 210 \text{ msec} \\ T_a = T_b &= 77 \text{ msec}\end{aligned}$$

で与える。このときの \$r\$ を Fig. 2(a) に示す。フィードフォワードコントローラ (10) 式に従って

$$C_{FF}(s) = G(s)^{-1} = \frac{s^2 + as}{b} \quad (42)$$

したがって、フィードフォワード入力 \$u_r\$ は

$$u_r = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} + a \frac{dr}{dt} \right) / b \quad (43)$$

で与えられる。つぎの実験で用いる目標軌道とフィードフォワード入力を Fig. 2(c) に示す。

出力 \$y\$ を目標 \$r\$ に追従させるときの偏差系は

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= (A + D_A F_A E_A) \tilde{x} + (B + D_B F_B E_B) u + B_w w \\ y - r &= C \tilde{x}\end{aligned}\quad (44)$$

ただし、

$$B_w = [D_A \ B_B], \quad w = \begin{bmatrix} F_A E_A x_r \\ F_B E_B u_r \end{bmatrix} \quad (45)$$

となるが、この例題では \$D_A = D_B\$ であるので、

Fig. 2 An example of polynomial trajectory (distance to move = 8 cm, time to move = 210 msec, maximum speed of motor = 3600 rpm)

Fig. 4

$$= \begin{bmatrix} 0.2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & 0 & b \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b^{-1} & ab^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{bmatrix} = 0 \quad (47)$$

となることから、定理1の条件を満たしており、定常偏差がゼロとなるコントローラが得られる。

実験結果を Fig. 3 から Fig. 5 まで示す。Fig. 3 と Fig. 4 はそれぞれ $\gamma=1.0$ と $\gamma=0.3$ で γ トラッキング出力フィードバックコントローラを設計した場合の結果である。それぞれの図の上段(a)はモータに加わる電圧で、下段(b)は位置の偏差($y-r$)をモータエンコーダのパルスで示している。1パルスは0.088度、負荷の変位にすると0.0024 mmに相当する。 γ を小さくした場合、偏差が減少している。実用化には定常偏差が3パルス以内であることが必要であるが、これらのコントローラはそれを満たしている。高速化に関しては $\gamma=1.0$ の場合でも従来の方法に比べ100 msec以上速くなっている。

Fig. 5 は負荷に2 kg 荷重を付加したとき(負荷のイナーシャ $2.00 \times 10^{-4} \text{ Nms}^2$ 増加)のロバスト性を見る実験である。Fig. 5(a)は最適レギュレータ+オブザーバを用いたコントローラによる結果を、Fig. 5(b)は γ トラッキング出力フィードバックコントローラによる結果を示している。それぞれ実線が荷重を付加する前の応答を、点線が荷重が付加されたときの応答を示している。この実験結果は最適レギュレータ+オブザーバの結果に比べ γ トラッキングコントローラの結果は変動に対し

Fig. 3

$$w = F_A E_A x_r + F_B E_B u_r, \quad B_w = D_A \quad (46)$$

として定理2に従ってフィードバックコントローラを設計する。このとき

$$\begin{bmatrix} E_A & 0 \\ 0 & E_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}$$

(a) Response of the tracking error
(Optimal regulator + Observer)

(b) Response of the tracking error
(γ tracking controller)

Fig. 5

ロバストであることを示している。

5. おわりに

本論文では、トラッキング問題に対する新しい二次安定化制御の手法を提案し、それを高速位置決め制御系の構成に応用した。本方法は高速高精度の制御を実現するため、補間関数を用い 2 点間を滑らかに補間し、それを目標軌道として追従する制御系を構成している。目標軌道と対象のモデルから、あらかじめ必要となる入力（フィードフォワード入力）を計算するので、移動距離が与えられたとき、移動速度や制御入力の制約を加味して、移動に必要な時間を見積もれるという利点がある。さらに、二次安定化フィードバックコントローラを用いているので対象のパラメータ変動に対し安定な制御系が構成できる。目標入力と状態空間モデルにおける不確かさの存在する場所がある条件を満たしているときは、パラメータ変動があっても定常偏差が零となるロバストサーボ系になることも示した。最後に本設計法を機械式写植機に適用し実験によりその有効性が確認された。

最後に本実験に関してご協力くださったリョービ(株)の村上勲氏に心より感謝致します。

参考文献

- 1) 木村英紀：ロバスト制御の現状と実用化への展望，計測と制御，30-8，647/654(1991)
- 2) I. R. Petersen: A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems, Systems & Control

Letters, 8, 351/357 (1987)

- 3) I. R. Petersen: Stabilization of an Uncertain Linear System in which Uncertain Parameters Enter into the Input Matrix, SIAM J. Contr. Optimiz., 26, 1257/1264 (1988)
- 4) P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou: Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H^∞ Control Theory, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-35-3, 356/361 (1990)
- 5) L. Xie, M. Fu and C. E. de Souza: H_∞ control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty via Output Feedback, IEEE Trans., AC-37-8, 1253/1256 (1992)
- 6) M. Corless: Tracking Controllers for Uncertain Systems: Application to Manutec R3 Robot, Trans. of the ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 111, 609/618 (1989)
- 7) W. E. Schmitendorf and B. R. Barmish: Robust Asymptotic Tracking for Linear Systems with Unknown Parameters, Automatica, 22-3, 355/360 (1986)
- 8) 藤井, 辻野, 植松: 二次安定論に基づくロバストサーボ系設計法, システム制御情報学会論文誌, 4-11, 462/472 (1991)
- 9) H. Tsuchida and N. Suda: On Optimal Servosystem with Quadratic Stability, SICE, 27-6, 655/662 (1991)

[著者紹介]

山本 茂 (正会員)

1987 年, 大阪大学基礎工学部制御工学科卒業。89 年大阪大学大学院工学研究科博士前期課程修了。同年より同大学工学部助手。ロバスト制御理論とその応用に関する研究に従事。システム制御情報学会の会員。

西田 隆 男

1991 年, 大阪大学工学部電子制御機械工学科卒業。同年同大学院修士課程入学。現在在学中。位置決め制御に関する研究に従事。

木村 英 紀 (正会員)

1965 年, 東京大学工学部計数工学科卒業。70 年同大学院博士課程修了。同年大阪大学基礎工学部助手。講師, 助教授を経て 88 年より同大学工学部教授。制御理論とその応用に関する研究に従事。72 年および 83 年計測自動制御学会論文賞, 84 年および 90 年 IFAC 論文賞, 85 年 IEEE, CSS 優秀論文賞受賞。本会および IEEE のフェロー。システム制御情報学会, 日本機械学会, 応用数学会などの会員。