リレー要素を併用した出力フィードバックによるモデル出力追従制御*

岩井 善太*・足立 克己*・水本 郁朗*

Model Output Following Control Using Output Feedback with Relay Element

Zenta Iwai*, Katsumi Adachi* and Ikurou Mizumoto*

In this paper, we consider a problem of a model output following control based on output feedback. It is shown that, if the plant satisfies the so-called ASPR condition, the model output control system can be constructed by using constant output feedback. It is also derived that the addition of relay element improves tracking performance.

Key Words: output feedback, model output following control, parallel feedforward compensator, positive realness

1. 緒 言

出力フィードバック制御は、その制御系構成がきわめて簡単なことから、これまで特に安定化という観点を中心に多く検討されてきた制御手法である^{1),2)}。リレー要素を併用する方法では、状態フィードバックによる方式ではあるが、モデル追従制御についての考察も行われている³⁾。しかし、上述したように、これまでの出力フィードバック制御手法は、制御系の安定化を意図して検討されており、モデル出力追従制御を考えたものではない。本報告は、この点を考慮し、出力フィードバックに基づくモデル出力追従制御系の設計法について考察を行ったものである。ここでは、まず、プラントモデルが既知、かつ、定ゲイン出力フィードバックにより強正実化可能 (ASPR: almost strictly positive real) である場合に対し、リレー要素を付加した出力フィードバックによりモデル出力追従制御系の構成できることを述べ、かつ、その安定性および追従特性の向上について検討する。つぎに、プラントが ASPR であるという条件を緩和するための並列フィードフォワード補償の導入^{5),6)}について考察し、最後に、数値シミュレーションにより提案手法の有効性の検証を行う。

2. 問題設定および制御系構成

つぎの可制御・可観測な n 次 1 入出力系を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) + b_1 g(t, x) \quad (2.1 a)$$

$$y(t) = c^T x(t) \quad (2.1 b)$$

ここに、 $x \in R^n$, $u \in R$, $y \in R$, $g \in R$ は、それぞれ、プラントの状態ベクトル、制御入力、出力および外乱であり、 A , b , b_1 , c はそれぞれ適切な次数の既知定数行列およびベクトルである。つぎに、プラントが追従すべき漸近安定な n_m 次 1 入出力規範モデルを

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + b_m u_m(t) \quad (2.2 a)$$

$$y_m(t) = c_m^T x_m(t) \quad (2.2 b)$$

と与える。ここに、モデルの次数 n_m はプラントの次数 n に無関係に与えるものとする。

さて、プラント (2.1) および規範モデル (2.2) は以下の仮定を満足しているものとする。

〔仮定 1〕 (a) プラント (2.1) において、 $g(t, x) \equiv 0$ とおいた線形系の伝達関数を $G(s)$ とするとき、 $G(s)$ は、(i) 最小位相、(ii) 相対次数が 1、(iii) 最高位係数が正、なる条件を満足している。

(b) (2.1) 式の線形部および (2.2) 式は、Broussard⁴⁾ のモデル出力追従条件を満足する。すなわち、

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & \Omega_4 \end{bmatrix} = I \quad (2.3)$$

を満足する Ω_i , $i=1, \dots, 4$ が存在し、 Ω_1 の固有値の逆数はモデル A_m の固有値と一致しない。

(c) $u_m(t)$ はその微分値 $\dot{u}_m(t)$ を入力とする線形安定系の出力が有界となる規範入力。

(d) 外乱 $g(t, x)$ に対し、

$$|g(t, x)| \leq \rho_0 + \rho_1 \|x(t)\| \quad (2.4)$$

なる既知定数 ρ_0 , ρ_1 が存在する。

このとき、目的は、出力追従誤差を

$$e_y(t) = y(t) - y_m(t) \quad (2.5)$$

とすると、 $e_y(t)$ を微小に抑えるような制御系を出力

† 第 46 期日本機械学会九州支部総会講演会で一部発表 (1993・3)

* 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto

(Received January 18, 1993)

(Revised March 22, 1993)

フィードバックにより構成することである。

(注意 1) 仮定 1 (a) を満足するプラントは ASPR となる。すなわち、 $k \geq k_0$ なる全ての k に対し、

$$W(s) = G(s)/(1 + kG(s)) \quad (2.6)$$

が SPR (強正実) となる定数 k_0 が存在する¹⁾。□

(注意 2) $A_c = A - kbc^T$ とするとき、 $W(s)$ が SPR であることから、

$$A_c^T P + PA_c = -Q \quad (2.7a)$$

$$Pb = c \quad (2.7b)$$

を満足する正定対称行列 P, Q が存在する。□

さて、仮定 1 (b) の成立のもとで (2.1) 式において $g(t, x) = 0$ とした線形部と (2.2) 式との間で、完全追従 $e_y(t) = 0, t \geq 0$ を達成する最適入力 $u^*(t)$ およびそのときの最適状態 $x^*(t)$ は、

$$x^*(t) = S_1 x_m(t) + S_2 u_m(t) + s_x(t) \quad (2.8a)$$

$$u^*(t) = S_3 x_m(t) + S_4 u_m(t) + s_u(t) \quad (2.8b)$$

と表わされる⁴⁾。ここに、 $S_i, i=1, \dots, 4$ はそれぞれ適切な次数の行列、ベクトルおよびスカラーであり、 $s_x(t), s_u(t)$ は仮定 1 (c) のもとで有界となる時間関数⁶⁾である。しかし、この理想入力により構成された制御系は、開ループ系となるので、この場合、制御系の安定性は必ずしも保証されない。そこで、仮定 1 を満足するプラント (2.1) に対し、制御入力を以下のように構成する。

$$u(t) = -ke_y(t) - \gamma \operatorname{sgn} e_y(t), \gamma > 0 \quad (2.9)$$

ここに、 k は注意 1 で述べた $W(s)$ を強正実とするフィードバックゲインである。

このとき、(2.9) 式を用いた制御系の安定性に関し、以下の定理が成立する。

《定理 1》 仮定 1 を満足するプラント (2.1) および規範モデル (2.2) を考える。このとき、(2.9) 式において、

$$\gamma > \gamma^* + \rho_0 + \rho_1 \gamma_x^* \quad (2.10)$$

$$\gamma^* = \max_t |u^*(t)|, \gamma_x^* = \max_t \|x^*(t)\|$$

と与えると、

$$\lambda_{\min}[Q] - 2\rho_1 \|b_1\| \|P\| = \lambda_0 > 0 \quad (2.11)$$

なる条件の成立のもとで、(2.9) 式を適用した制御系内の全信号の一樣有界性が保証され、さらに、実状態と理想状態との状態誤差を $e_x(t) = x(t) - x^*(t)$ とし、正定値関数

$$V(t) = e_x(t)^T P e_x(t) \quad (2.12)$$

を考えると、 $e_x(t)$ は、残余領域 (residual region)

$$D = \{e_x : V(e_x) \leq \beta_1/q_1\} \quad (2.13)$$

に少なくとも $\exp(-q_1 t)$ の速さで収束する。ここに、

$$q_1 = \lambda_0 / (2\lambda_{\max}[P]) \quad (2.14)$$

$$\beta_1 = 2(\rho_0 + \rho_1 \gamma_x^*)^2 \beta_m / \lambda_0 \quad (2.15)$$

$$\beta_m = \min \{\|b_1 - b\| \|P\|, \|b_1\| \|P\|\} \quad (2.16)$$

である。また、 P および Q は、(2.7) 式を満足する正定対

称行列である。

(証明) (2.1) 式において、 $g(t, x) = 0, t \geq 0$ で完全追従が達成された理想状態と実状態との誤差方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= A_c e_x(t) - b(u^*(t) + \gamma \operatorname{sgn} e_y(t)) \\ &\quad + b_1 g(t, x) \end{aligned} \quad (2.17a)$$

$$e_y(t) = y(t) - y_m(t) = y(t) - y^*(t) = c^T e_x(t) \quad (2.17b)$$

と表わすことができる。このとき、正定値関数 $V(t)$ の (2.17) 式に沿っての微分は、(2.4), (2.7), (2.10) および (2.11) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &\leq -\lambda_0 \|e_x(t)\|^2 + 2(\rho_0 + \rho_1 \gamma_x^*) \|b_1 - b\| \\ &\quad \times \|P\| \|e_x(t)\| \\ &\leq -1/2\lambda_0 \|e_x(t)\|^2 \\ &\quad + \frac{2(\rho_0 + \rho_1 \gamma_x^*)^2 \|b_1 - b\|^2 \|P\|^2}{\lambda_0} \end{aligned} \quad (2.18)$$

と評価できる。また、(2.10) 式より、明らかに $\gamma > \gamma^*$ であることから、同様にして、

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -1/2\lambda_0 \|e_x(t)\|^2 + \frac{2(\rho_0 + \rho_1 \gamma_x^*)^2 \|b_1\|^2 \|P\|^2}{\lambda_0} \quad (2.19)$$

とも評価できる。結局、(2.12), (2.18) および (2.19) 式より、

$$\frac{dV(t)}{dt} \leq -q_1 V(t) + \beta_1 \quad (2.20)$$

を得る。すなわち、

$$V(t) \leq \{V(0) - \beta_1/q_1\} \exp(-q_1 t) + \beta_1/q_1 \quad (2.21)$$

が成立することから $\|e_x(t)\|$ は一樣有界であり、残余領域 D に $\exp(-q_1 t)$ の速さで収束する。さらに、 $e_x(t)$ が一樣有界であることから、 $e_y(t), u(t)$ の一樣有界性も明らかである。□ □

3. 並列フィードフォワード補償による適用範囲の拡大

前章において、制御系の基本的構成およびその安定性の解析を行ったが、このとき問題となるのが、仮定 1 (a) を満足するプラントに適用が限定されているという点である。この問題を解決する一つの手法に並列フィードフォワード補償 (PFC) の導入がある^{5), 6)}。この手法は、仮定 1 (a) を満足しない非 ASPR なプラント $G(s)$ に対し、PFC $F(s)$ を導入することで ASPR 化された拡張系：

$$G_a(s) = G(s) + F(s) \quad (3.1)$$

を構成し、この拡張系 $G_a(s)$ を新たな対称プラントと考えるというものである。このとき、 $F(s)$ が“微小”であれば $G_a(s)$ に対して前述した制御系を構成しても、 $G(s)$ に対し制御を施したと同様の効果が期待できる。このような PFC の構成問題は、すでに適応制御系構成問題に関連していくつか提案されている^{5), 6)} が、特に、文献 (6)

では, プラント $G(s)$ に対する (i) 最小位相, (ii) 相対次数の上界値 γ_p が既知, (iii) 最高位係数 $k_p(>0)$ および $|G(j0)|$ の下界値が既知, なる仮定のもとで上述の PFC の具体的かつ組織的な構成法が示されている. この設計法による PFC を用いるとき, 本制御手法の安定性は, つぎのようにして前章と同様に示すことができる.

いま, PFC に対応する状態方程式を

$$\dot{\mathbf{x}}_f(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}_f(t) + \mathbf{b}_f u(t) \quad (3.2a)$$

$$y_f(t) = \mathbf{c}_f^T \mathbf{x}_f(t) \quad (3.2b)$$

と記述する. ただし, $\mathbf{x}_f \in R^{n-1}$ は状態ベクトル, $y_f(t)$ は PFC 出力である. このとき, 拡張系は (2.1) および (3.1) 式より,

$$\dot{\mathbf{x}}_a(t) = \mathbf{A}_a \mathbf{x}_a(t) + \mathbf{b}_a u(t) + \mathbf{b}_{a1} g(t, \mathbf{x}) \quad (3.3a)$$

$$y_a(t) = \mathbf{c}_a^T \mathbf{x}_a(t) \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix}, \mathbf{b}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{b}_f \end{bmatrix}, \mathbf{b}_{a1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.3c)$$

$$\mathbf{c}_a^T = [\mathbf{c}^T, \mathbf{c}_f^T]^T$$

と表わせる. 上式線形部は明らかに ASPR である. したがって, この拡張系に対し定理 1 が適用できる. また, (3.2) 式の $\mathbf{b}_f$ は任意に微小に与えることができる⁶⁾ ことから, $\mathbf{b}_a, \mathbf{b}_{a1}$ の関係は結局, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}_1$ の関係で決まる.

4. 数値シミュレーション

ここでは, 提案手法の有効性を数値シミュレーションで検証する. 対象とするプラントモデルおよび規範モデルは以下のように記述されているものとする.

$$y(t) = G(s)[u(t) + g(t, \mathbf{x})] \quad (4.1a)$$

$$y_m(t) = G_m(s)[u_m(t)] \quad (4.1b)$$

ただし,

$$G(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 - 4s^2 + s + 6}, G_m(s) = \frac{1}{s + 2} \quad (4.2a)$$

$$g(t, \mathbf{x}) = 0.2 \sin(2\pi t) + [0.4, 0.2, 0.2] \mathbf{x}(t) \cos(\pi t) \quad (4.2b)$$

$u_m(t)$: 周期 10 s, 振幅 1 の矩形波

とされている. $G(s)$ は出力フィードバックゲイン k が $k > 5$ で SPR となる. Fig. 1 は, $k=6, \gamma=4.5$ とした場合であるが, 外乱が存在するにもかかわらず良好な結果が得られている. ただし, ここではリレーのチャタリングを緩和するため, 飽和要素(飽和限界: $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$)を用いている. また, システムの安定性は, 条件 (2.11) の成立のもとで保証されることから, ハイゲインフィードバックのみでもシミュレーションを行ったが十分に外乱を抑えることはできなかった.

5. 結 言

本報告では, 出力モデル追従制御系を出力フィード

(a) Plant and model outputs

(b) Tracking error between plant and model outputs

Fig. 1 Simulation results with $k=6$ and $\gamma=4.5$

バックで構成する手法を提案した. ここでは, 対象プラントが ASPR であればモデル出力追従制御問題として安定化問題を含んだ形式で一般化できることを述べ, さらに, リレー要素を付加することで追従性および外乱ロバスト性を向上させることができることを示した. また, 非 ASPR なプラントに対しても, それが最小位相であれば, 並列フィードフォワード補償を導入することで上述の手法が適用できることも示した.

参 考 文 献

- 1) E. Zeheb: A Sufficient Condition for Output Feedback Stabilization of Uncertain Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-31-11**, 1055/1057 (1986)
- 2) A. Steinberg and M. Corless: Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, IEEE Trans., **AC-30-10**, 1025/1027 (1985)
- 3) 大屋, 西村, 米澤: ある非線形系のモデル追従制御, 計測自動制御学会論文集, **25-2**, 145/151 (1989)
- 4) J. R. Broussard and M. J. O'Brien: Feedforward Control to Track the Output of a Forced Model, IEEE Trans., **AC-25-4**, 851/853 (1980)
- 5) I. Bar-Kana: Parallel Feedforward and Simplified Adaptive control, Int. J. Adaptive Control and Signal Processing, **1**, 95/109 (1987)
- 6) Z. Iwai and I. Mizumoto: Robust and Simple Adaptive Control Systems, Int. J. Control, **55-6**, 1453/1470 (1992)