多項式ベクトル空間の最小次数基底の計算法とその応用[†]

加瀬 渡*・田村 捷利**

A Calculation of Minimal Basis in Polynomial Vector Space with Applications

Wataru KASE* and Katsutoshi TAMURA**

Given a transfer function matrix $N(s)D^{-1}(s)$, the problem discussed in this paper is to find an orthogonal matrix pair $[\tilde{N}(s) \ -\tilde{D}(s)]$ to $[D^T(s) \ N^T(s)]^T$. A calculation method of the orthogonal pair is presented where only elementary real matrices operation needs. It is shown that an annihilating matrix of an observability matrix of $N(s)D^{-1}(s)$ provides the orthogonal pair. Some related problems in linear system theory are also discussed.

Key Words: linear multivariable systems, polynomial matrix, minimal basis, canonical realizations, observability indices

1. ま え が き

周波数領域で線形制御系を設計する問題の多くは、与えられた多項式行列に直交する(最小次数)基底を求める問題と解釈することができる。たとえば、多項式行列対の最大共通因子を求める問題や Bezout 恒等式の解法は、直交基底を求める問題として定式化することができる。また、実現理論や逆システムを考える上でも有用なため、これまでに最小次数直交基底に関する研究は数多くなされてきている。文献1)では、主に多項式行列演算を行うことによってこの問題を解いている。また、文献2)では、多項式行列の echelon form を求めることでこの問題が解けることが示されている。文献3)では、Diofantine 方程式の解法に関連して、右分解表現から左既約分解表現を得る方法として最小次数基底が求められている。最近では、与えられた多項式行列に関連した行列ペンシルを用いて数値計算的に安定な計算法が示されて

いる⁴⁾。しかしながら、これらは文献3)を除いてはいずれも大きなサイズの実行列計算が必要であり、計算機向きの方法とはいえない。

本論文では、与えられた多項式行列対の状態空間表現を利用して、多項式基底を計算するための方法を提案する。この方法は、実行列演算を主とするので計算機向きの方法である。本論文で考える問題は、「伝達行列の(既約でない)右分解表現が与えられているときに、その左既約分解を求めよ」という問題と解釈することができる。この問題は、状態空間表現において、可観測な状態とそうでない状態に分離し、可観測な状態に対する伝達行列表現を求めれば解ける。しかしながら、状態を分離する際に可観測部分空間の直交補空間の基底を求める必要がある。これに対して本手法は、可観測部分空間の基底を用いるだけで計算できるので有利である。また、上記のような解釈の下で本論文で考える問題は文献3)と同じであり、実際、文献3)と同様の多項式行列対と正準実現の関係を利用する。しかし、文献3)は、この関係を Diofantine 方程式の解法に応用し、左既約分解表現は Diofantine 方程式の解法を利用して得ることになる。これに対して本論文では、多項式行列対と正準実現の関係を直接、多項式基底を求める問題に応用するので証明手順が簡単である。また、本手法を用いることで本文中に示すように線形制御系の解析、設計において有利な場合がある。

[†] 第35回自動制御連合講演会で発表(1992・10)

* 静岡理科大学理工学部 袋井市豊沢 2200-2

** 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町 7-1

* Faculty of Science and Technology, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi

** Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received January 27, 1993)

(Revised April 19, 1993)

本論文の構成は以下のとおりである。2章で問題の設定を行い、3章で、文献3)で示されている多項式行列対と正準実現の関係から可観測指数の選び方によらずプロパーな最小次数解が得られることを示す。4章では、可観測指数の決め方を特定することで、システム論的に意義のある解が得られることを示す。また、前章の手法を用いた二つの多項式行列の最大共通右因子の計算法を示す。この方法は、与えられた多項式行列対が既約ならば Bezout 恒等式の解法も与えており、容易に Diophantine 方程式の解法に応用することができる。本論文のまとめなどは5章で述べる。なお、本論文で用いる記号は以下のとおりである。

$\mathbf{R}^{m \times p}$: $m \times p$ 実数行列

$\mathbf{R}^{m \times p}[s]$: $m \times p$ 実係数多項式行列の集合

I_p : p 次単位行列

$\partial_{ri}[D(s)]$: 多項式行列 $D(s)$ の i 行目の行次数

$\partial_{ci}[D(s)]$: 多項式行列 $D(s)$ の i 列目の列次数

$$S^{f_i}(s) = \text{block diag} \begin{Bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{\mu_i-1+f_i} \end{Bmatrix}$$

$$S_{f_p}^f(s) = \begin{bmatrix} I_p \\ sI_p \\ \vdots \\ s^f I_p \end{bmatrix}$$

(A, B, C) : 厳密にプロパーな伝達行列

$N(s)D^{-1}(s)$ の可制御正準実現

$$\mathcal{O}_f = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^f \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^f B & CA^{f-1} B & \cdots & CB \end{bmatrix}$$

$(f \geq 0)$

2. 問題の設定

本論文で考える問題はつぎのとおりである。

与えられた多項式行列 $D(s)$ と $N(s)$ に対して、次式を満足する多項式行列 $\tilde{D}(s)$ と $\tilde{N}(s)$ を、 $\tilde{D}(s)$ が正則で $\det \tilde{D}(s)$ の次数が最小となるように求めよ。

$$[\tilde{N}(s) \quad -\tilde{D}(s)] \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = 0_{m \times p} \quad (1)$$

$$D(s) = D_0 \text{diag} \{s^{\mu_1}, \dots, s^{\mu_p}\} + \text{低次項} \in \mathbf{R}^{p \times p}[s]$$

$$N(s) \in \mathbf{R}^{m \times p}[s]$$

$$\tilde{D}(s) \in \mathbf{R}^{m \times m}[s], \tilde{N}(s) \in \mathbf{R}^{m \times p}[s]$$

上記の問題を満たす $\tilde{D}(s), \tilde{N}(s)$ を $D(s), N(s)$ の最小次数左零化行列と呼び、 $[\tilde{N}(s) \quad -\tilde{D}(s)]$ を $\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}$ の最小次数零化基底と呼ぶ。この問題を解くために、つぎの仮定を設ける。

(1) $D(s)$ は正則

(2) $\mu_i \geq 1$ ($D(s)$ の列次数は1以上)

(3) $N(s)D^{-1}(s)$ は厳密にプロパー

仮定(2), (3)は後に緩和される。また、一般性を失うことなく、 $D(s)$ は列プロパーとする。ここでは、 $D(s)$ と $N(s)$ の既約性を仮定していないことに注意する。

3. 最小次数基底の計算法

仮定(1)~(3)より、以下を満たす $N(s)D^{-1}(s)$ の可制御正準実現 (A, B, C) がただちに得られる⁵⁾。

$$sx(s) = Ax(s) + Bu(s) \quad (2)$$

$$y(s) = Cx(s)$$

$$A \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}, B \in \mathbf{R}^{n_1 \times p}, C \in \mathbf{R}^{m \times n_1},$$

$$n_1 := \mu_1 + \cdots + \mu_p$$

ここで、 c_i を C の i 行目を表わすものとする。

次式を満たす部分状態 $\eta(s)$ を導入する。

$$x(s) = S^0(s)\eta(s)$$

$$D(s)\eta(s) = u(s) \quad (3)$$

$$y(s) = N(s)\eta(s)$$

(2), (3)式を $y(s), sy(s), \dots, s^\nu y(s)$ に対して用いると

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^\nu N(s) \end{bmatrix} \eta(s)$$

$$= \mathcal{O}_\nu x(s) + \mathbf{T}_{\nu-1} \begin{bmatrix} D(s) \\ sD(s) \\ \vdots \\ s^{\nu-1}D(s) \end{bmatrix} \eta(s) \quad (4)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} D(s) \\ sD(s) \\ \vdots \\ s^{\nu-1}D(s) \end{bmatrix} = S_{f_p}^{\nu-1}(s)D(s),$$

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ sN(s) \\ \vdots \\ s^\nu N(s) \end{bmatrix} = S_{f_m}^\nu(s)N(s) \quad (5)$$

であるから、(4)式は

$$S_{f_m}^\nu(s)N(s)\eta(s)$$

$$= \mathcal{O}_\nu x(s) + T_{\nu-1} S_{\nu-1}^{-1}(s) D(s) \eta(s) \quad (6)$$

となる。さらに、

$$\tilde{D} \mathcal{O}_\nu = 0 \quad (7)$$

を満たす行列 $\tilde{D} \in \mathbf{R}^{m \times m(\nu+1)}$ を考えて、(6)式の両辺に左から $\tilde{D}$ を乗じて、

$$\tilde{D} S_{\nu-1}^{-1}(s) N(s) = \tilde{D} T_{\nu-1} S_{\nu-1}^{-1}(s) D(s) \quad (8)$$

なる表現を得る。したがって、

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &:= \tilde{D} S_{\nu-1}^{-1}(s), \\ \tilde{N}(s) &:= \tilde{D} T_{\nu-1} S_{\nu-1}^{-1}(s) \end{aligned} \quad (9)$$

とすれば、 $[\tilde{N}(s) - \tilde{D}(s)]$ は、(1)式を満たす。すなわち、2章で設定された問題は、(9)式の $\tilde{D}(s)$ が正則かつ $\det \tilde{D}(s)$ の次数が最小となるように、 $\mathcal{O}_\nu$ の非自明な左零化行列 $\tilde{D}$ を求める問題に帰着される。このような $\tilde{D}$ を求めるために、適当な順列行列 V を用いて $\mathcal{O}_\nu$ の行を以下のように交換する。

$$V \mathcal{O}_\nu = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{O}} \\ \tilde{\mathcal{O}}^* \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここで、 $\tilde{\mathcal{O}}$ を $\mathcal{O}_\nu$ から線形独立な行を抜き出した行列として以下のように定義する。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}} &= \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_1 A^{\nu_1-1} \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m A^{\nu_m-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times n_1}, \\ \tilde{\mathcal{O}}^* &= \begin{bmatrix} c_1 A^{\nu_1} \\ \vdots \\ c_m A^{\nu_m} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n_1}, \\ \mathcal{O}^* &\in \mathbf{R}^{(m\nu-n) \times n_1} \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ はシステム(2)の可観測指数であり、 $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = n \leq n_1$ が成立する。可観測指数の定義から、次式を満たすような定数行列 $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ が存在する。

$$\tilde{\mathcal{O}} = A \tilde{\mathcal{O}} \quad (12)$$

この行列を用いて、 $\tilde{D}$ を以下のように与える。

$$\tilde{D} = [-A \quad I_m \quad 0_{m \times (m\nu-n)}] V \quad (13)$$

【定理1】 (13)式で与えられる行列 $\tilde{D}$ を用いた多項式行列

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= \tilde{D} S_{\nu-1}^{-1}(s) = \text{diag} \{s^{\nu_i}\} - A S^{\nu_i-\mu_i}(s) \\ \tilde{N}(s) &= \tilde{D} T_{\nu-1} S_{\nu-1}^{-1}(s) \end{aligned} \quad (14)$$

は(1)式を満たす $\det \tilde{D}(s)$ の次数が最小の非自明解であり、 $\tilde{D}(s)$ は列プロパーである。

(証明) (14)式で与えられる多項式行列は、(1)式を満たすことは、先に述べたとおりである。ここでは、 $\tilde{D}(s)$

の次数最小性と列プロパー性を示す。(13)、(14)式より、

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &= [-A \quad I_m \quad 0_{m \times (m\nu-n)}] V S_{\nu-1}^{-1}(s) \\ &= [-A \quad I_m \quad 0_{m \times (m\nu-n)}] \begin{bmatrix} S^{\nu_i-\mu_i}(s) \\ \text{diag} \{s^{\nu_i}\} \\ \times \end{bmatrix} \\ &= \text{diag} \{s^{\nu_i}\} - A S^{\nu_i-\mu_i}(s) \end{aligned} \quad (15)$$

であり、明らかに列プロパー行列である。また、

$$\det \tilde{D}(s) = s^n + \text{低次項} \quad (16)$$

なので、 $\det \tilde{D}(s)$ の次数は最小である。□

文献3)では、 $D(s), N(s), F(s)$ が与えられたとき、Diophantine 方程式

$$D_c(s) D(s) + N_c(s) N(s) = F(s) \quad (17)$$

の解多項式行列 $D_c(s), N_c(s)$ を(6)式を利用して得る方法が利用して示されている。この方法では、 $F(s)=0$ としただけでは左零化行列を得ることはできず、 $F(s) = \text{diag} \{s^{\nu_i}\} N(s)$ として Diophantine 方程式を解き、それらを用いて $\tilde{D}(s), \tilde{N}(s)$ を求める方法が示されている。したがって、本論文は文献3)と比べて、(i)同じ(6)式から出発しても、最小次数左零化行列を得るまでの過程が本論文のほうが簡潔、(ii) $\mathcal{O}_\nu$ の線形独立行の選び方によっては、次章で示すような線形システムの解析、設計に有用な計算法を得ることができる、という点で優れていると考える。

さて、2章で述べた仮定(2)および(3)を緩和することを考えよう。 $D(s)$ は正則なので、 $D(s)G(s)$ の列次数を1以上とする正則多項式行列 $G(s)$ が存在する。したがって、仮定(2)が満たされないときには、このような $G(s)$ を見つけて上記の手法を多項式行列対 $D(s)G(s), N(s)G(s)$ に対して適用すればよい。また、 $N(s)D^{-1}(s)$ が厳密にプロパーでないときには、文献6)に示されている方法によって

$$N(s) = Q(s) D(s) + R(s) \quad (18)$$

を満たす多項式行列 $Q(s), R(s)$ を容易に求めることができる。ここで、 $R(s)D^{-1}(s)$ は厳密にプロパーである。このとき、多項式行列対 $D(s), R(s)$ に対して上記の手法によって $\tilde{D}(s), \tilde{N}(s)$ を求めると、

$$\begin{aligned} 0_{m \times p} &= [\tilde{N}(s) - \tilde{D}(s)] \begin{bmatrix} D(s) \\ R(s) \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{N}(s) - \tilde{D}(s)] \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) - Q(s) D(s) \end{bmatrix} \\ &= [\tilde{N}(s) + \tilde{D}(s) Q(s) - \tilde{D}(s)] \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

が成り立つ。すなわち、 $[D^T(s) \ N^T(s)]^T$ の最小次数基底は $[\tilde{N}(s) + \tilde{D}(s) Q(s) - \tilde{D}(s)]$ と与えられる。ただし、こ

の場合は必ずしも $\tilde{D}^{-1}(s)[\tilde{N}(s)+\tilde{D}(s)Q(s)]$ はプロパーではない。また、 $N(s)D^{-1}(s)$ がプロパーな場合には、上記の手順を若干修正することで最小次数基底を得ることができる(付録参照)。

〔例題1〕

$$D(s)=\begin{bmatrix} s^2-s-2 & s^2+4s+3 \\ 0 & s^3-s \end{bmatrix},$$

$$N(s)=\begin{bmatrix} s^2-s-2 & 3s^2+6s+3 \\ s-2 & s^3-3s \end{bmatrix}$$

のとき、正則な最小次数の $\tilde{D}(s)$, $\tilde{N}(s)+\tilde{D}(s)Q(s)$ を求めよう。この場合、

$$Q(s)=I_2, \quad R(s)=\begin{bmatrix} 0 & 2s^2+2s \\ s-2 & -2s \end{bmatrix}$$

となる。 $D(s)$ は列プロパーであるから $R(s)D^{-1}(s)$ の可制御正準実現は容易に

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

と得られる。ここで、

$$\mathcal{O}_2=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{O}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_2A \end{bmatrix}$$

$$T_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ CB & 0 \\ CAB & CB \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1A-c_1=0, \quad c_2A^2+3c_1+c_2A=0$$

である。したがって、

$$\tilde{D}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}T_1=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、求める直交基底は

$$\tilde{D}(s)=\begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ 3 & s^2+s \end{bmatrix},$$

$$\tilde{N}(s)=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ s & -3 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{N}(s)+\tilde{D}(s)Q(s)=\begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ s+3 & s^2+s-3 \end{bmatrix}$$

で表わされる。◇

4. 線形システム論への応用

前章では特に可観測指数の選び方については言及しなかったが、本章ではこの指数の選び方によって線形システム理論において興味深い解が得られることを示す。

《系1.1(Scheme I)》 $\mathcal{O}_\nu$ の線形独立行を $c_1, \dots, c_1A^{\nu_1-1}, c_2, \dots, c_mA^{\nu_m-1}$ と選ぶ。つまり、 $c_1A^{\nu_1}$ は、 $c_1, \dots, c_1A^{\nu_1-1}$ の線形結合で、 $c_2A^{\nu_2}$ は、 $c_1, \dots, c_2A^{\nu_2-1}$ の線形結合で表わせるように可観測指数を決めるものとする。このとき、(14)式で与えられる $\tilde{D}(s)$ は、対角要素がモニク多項式である左下三角多項式行列(列エルミート多項式行列)である。

(証明) ν_i の選び方から、(12)式で与えられる A は以下のような構造をしている。

$$A=\begin{bmatrix} \times \cdots \times & 0 \cdots 0 & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \cdots 0 \\ \times \cdots \times & \times \cdots \times & 0 \cdots 0 & \cdots & 0 \cdots 0 \\ \times \cdots \times & \times \cdots \times & \times \cdots \times & \cdots & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \times \cdots \times & \times \cdots \times & \times \cdots \times & \cdots & \times \cdots \times \end{bmatrix}$$

$\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3 \quad \cdots \quad \nu_m$

これより、(14)式で与えられる $\tilde{D}(s)$ は、

$$\tilde{D}(s)=\begin{bmatrix} s^{\nu_1}+\cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \times & s^{\nu_2}+\cdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ \times & \cdots & \times s^{\nu_m}+\cdots \end{bmatrix}$$

である。□

《系1.2》 $N(s)=I_p$ のとき、(14)式で与えられる $\tilde{N}(s)$ はユニモジュラ行列である。

(証明) (1)式より、 $\tilde{N}(s)D(s)=\tilde{D}(s)$ であるから

$$\det \tilde{N}(s) \det D(s) = \det \tilde{D}(s)$$

が成り立つ。これより、

$$\deg \det D(s) \leq \deg \det \tilde{D}(s)$$

一方、(2)式の n_1 の定義と、可観測指数の定義から、

$$\deg \det \tilde{D}(s) = n \leq n_1 = \deg \det D(s),$$

以上から $n=n_1$ であり、 $\deg \det \tilde{N}(s)=0$ である。□

文献3)のように $\mathcal{O}_\nu$ の線形独立行を1行目から順に選ぶ(Scheme II とする)と、(14)式で与えられる $\tilde{D}(s)$ は、列プロパーかつ行プロパーな多項式行列であることも示することができる。系1, 2より、 $N(s)=I_p$ のとき

Scheme I は、正則列プロパー多項式行列 $D(s)$ から、基本行操作 $\tilde{N}(s)$ を用いて列エルミート多項式行列 $\tilde{D}(s)$ を得るための手順を与えていることがわかる。一方、Scheme II は、正則列プロパー多項式行列 $D(s)$ から、基本行操作 $\tilde{N}(s)$ を用いて行プロパー多項式行列 $\tilde{D}(s)$ を得るための手順を与えている。これらは正則列プロパーという仮定が満たされている多項式行列では、従来示されている手法^{2),5)}よりも簡単で、計算機上でも実行しやすい。

《定理 2》 $N(s)D^{-1}(s)$ は厳密にプロパーであるとする。多項式行列対 $D(s)$, $\begin{bmatrix} N(s) \\ I_p \end{bmatrix}$ の最小次数左零化基底を Scheme I によって求め、それを

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) & -\tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{N}_2(s) & -\tilde{D}_{21}(s) & \tilde{D}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1(s) &\in \mathbf{R}^{m \times p}[s], & \tilde{D}_{11}(s) &\in \mathbf{R}^{m \times m}[s], \\ \tilde{N}_2(s) &\in \mathbf{R}^{p \times p}[s], & \tilde{D}_{21}(s) &\in \mathbf{R}^{p \times m}[s], \\ \tilde{D}_{22}(s) &\in \mathbf{R}^{p \times p}[s] \end{aligned}$$

とする。このとき、以下が成り立つ。

- (1) $\tilde{D}_{11}(s), \tilde{N}_1(s)$ は、 $D(s), N(s)$ の最小次数零化基底である。
- (2) $\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) & -\tilde{D}_{11}(s) \\ \tilde{N}_2(s) & -\tilde{D}_{21}(s) \end{bmatrix}$ はユニモジュラ行列である。
- (3) $\tilde{D}_{22}(s)$ は、 $D(s)$ と $N(s)$ の最大共通右因子である。
- (4) $D(s)$ と $N(s)$ が互いに右素のとき、 $\tilde{D}_{22}(s) = I_p$ である。またこのとき、 $\partial_{ci}[\tilde{D}_{21}(s)] \leq \nu_i - 1$, $\partial_{ci}[\tilde{N}_2(s)] \leq \nu_i - 2$ である。

(証明)

- (1) Scheme I の手順から明らか。
- (2) 最小次数零化基底であることから

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{D}_{21}(s) & \tilde{D}_{22}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) \\ \tilde{N}_2(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N(s) \\ I_p \end{bmatrix} D^{-1}(s) \end{aligned} \quad (21)$$

が成立し、 $D(s)$ と $\begin{bmatrix} N(s) \\ I_p \end{bmatrix}$ は互いに右素であるから、次式を満たす定数 $a \neq 0$ が存在する。

$$\det \tilde{D}_{11}(s) \det \tilde{D}_{22}(s) = a \det D(s) \quad (22)$$

ところで、

$$\begin{aligned} U(s) &:= \begin{bmatrix} \tilde{N}_2(s) & -\tilde{D}_{21}(s) \\ \tilde{N}_1(s) & -\tilde{D}_{11}(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_{22}(s) & -\tilde{D}_{21}(s) \\ 0 & -\tilde{D}_{11}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) & 0 \\ N(s) & I_m \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

と表わせるので、 $\det U(s) = -a$ であり、このことは $U(s)$ がユニモジュラ行列であることを意味する。

- (3) $G(s)$ を $D(s)$ と $N(s)$ の最大共通右因子を表わ

すとする。ここで、 $D(s)$ の正則性から $G(s)$ は正則多項式行列である。さて、次式を満たすユニモジュラ行列 $V(s)$ が存在することが知られている^{2),5)}。

$$V(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

(23)式より、

$$U(s) \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_{22}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

なので、

$$\begin{aligned} &U(s) V^{-1}(s) \begin{bmatrix} G(s) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ U_{21}(s) & U_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G(s) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{D}_{22}(s) \\ 0 \end{bmatrix} \\ &U_{11}(s) \in \mathbf{R}^{p \times p}[s], \quad U_{12}(s) \in \mathbf{R}^{p \times m}[s], \\ &U_{21}(s) \in \mathbf{R}^{m \times p}[s], \quad U_{22}(s) \in \mathbf{R}^{m \times m}[s] \end{aligned} \quad (26)$$

これより、

$$U_{11}(s)G(s) = \tilde{D}_{22}(s), \quad U_{21}(s)G(s) = 0_{m \times p} \quad (27)$$

$G(s)$ は正則なので、 $U_{21}(s) = 0$ でなければならない。したがって、

$$\begin{aligned} \det U(s) V^{-1}(s) &= \det \begin{bmatrix} U_{11}(s) & U_{12}(s) \\ 0 & U_{22}(s) \end{bmatrix} \\ &= \det U_{11}(s) \det U_{22}(s) \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、 $U(s), V(s)$ は共にユニモジュラ行列であるので $U(s)V^{-1}(s)$ もユニモジュラ行列である。すなわち、 $U_{11}(s), U_{22}(s)$ は共にユニモジュラ行列でなければならない。このことと(27)式から、 $\tilde{D}_{22}(s)$ は $D(s)$ と $N(s)$ の最大共通右因子である。

- (4) $D(s)$ と $N(s)$ が互いに右素のときは、 $\nu_{m+1} = \dots = \nu_{m+p} = 0$ となるから、 $\tilde{D}_{22}(s) = I_p$ である。このとき、 $\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{D}_{21}(s) & \tilde{D}_{22}(s) \end{bmatrix}$ は列エルミート多項式行列であるから、

$$\partial_{ci}[\tilde{D}_{21}(s)] < \partial_{ci}[\tilde{D}_{11}(s)] = \nu_i$$

が成り立つ。また、これより $\partial_{ci}[\tilde{D}_{21}(s)] \leq \nu_i - 1$ なので、

$$\begin{aligned} \partial_{ci}[\tilde{N}_2(s)] &= \partial_{ci}[\tilde{D}_{21}(s)N(s)D^{-1}(s) \text{ の } \\ &\quad \text{多項式行列部分}] \\ &\leq \partial_{ci}[\tilde{D}_{21}(s)] - 1 \\ &\leq \nu_i - 2 \end{aligned}$$

である。□

この定理は、最小次数零化基底を求める計算法を用いて、 $D(s)$ と $N(s)$ の最大共通右因子を求めることができ、しかも $D(s)$ と $N(s)$ が互いに右素の場合には Bezout 恒等式の解を与える方法を示している。しかも Bezout 恒等式の一つの解と同時に最小次数基底が求め

られているので、任意の解を表現するのに好都合な手法である。この定理による最大共通右因子とそれに付随するユニモジュラ行列の計算法は、文献7)に示されているものよりもはるかに簡単である。

先と同様に、 $N(s)D^{-1}(s)$ が厳密にプロパーでない場合でも、(19)式で定義される多項式行列 $R(s)$ を用いることで $D(s)$ と $N(s)$ の最大共通右因子を求めることができる、つまり、

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) - \tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{N}_2(s) - \tilde{D}_{21}(s) - \tilde{D}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) \\ R(s) \\ I_p \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \tilde{N}_1 + \tilde{D}_{11}Q - \tilde{D}_{11} & 0 \\ \tilde{N}_2 + \tilde{D}_{21}Q - \tilde{D}_{21} - \tilde{D}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \\ I_p \end{bmatrix}$$

であり、 $\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) - \tilde{D}_{11}(s) \\ \tilde{N}_2(s) - \tilde{D}_{21}(s) \end{bmatrix}$ はユニモジュラ行列であるの

で、 $\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) + \tilde{D}_{11}(s)Q(s) - \tilde{D}_{11}(s) \\ \tilde{N}_2(s) + \tilde{D}_{21}(s)Q(s) - \tilde{D}_{21}(s) \end{bmatrix}$ もそうである。以下、定理2の証明と同様で、 $D(s)$ 、 $N(s)$ の最大共通右因子も $\tilde{D}_{22}(s)$ である。

〔例題2〕 先の $D(s)$ 、 $N(s)$ の最大共通右因子を求めよう。ここで改めて

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とする。このとき、

$$\begin{bmatrix} c_3A \\ c_3A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

なので、

$$c_3A^2 - c_1 - c_2 - c_2A - 2c_3 - c_3A = 0,$$

$$c_4 + c_1/2 - c_2/6 + c_2A/3 - c_3 + c_3A/2 = 0$$

と表わせるので

$$\tilde{D}_{21}(s) = \begin{bmatrix} -1 & -s-1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3}s - \frac{1}{6} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{D}_{22}(s) = \begin{bmatrix} s^2 - s - 2 & 0 \\ \frac{1}{2}s - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

であり、

$$D(s)\tilde{D}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(s+1) & s^2 + 4s + 3 \\ -\frac{1}{2}s(s-1) & s^3 - s \end{bmatrix}$$

$$N(s)\tilde{D}_{22}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(3s+1) & 3(s+1)^2 \\ -\frac{1}{2}(s^2 - s - 2) & s^3 - 3s \end{bmatrix}$$

また、

$$\tilde{N}_2(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

なので、

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & -s+1 & 0 \\ s & -3 & -3 & -s^2-s \\ 0 & 0 & 1 & s+1 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}s + \frac{1}{6} \end{bmatrix} = 1$$

である。◇

《系2.1》 $F(s) \in \mathbf{R}^{q \times p}[s]$ とする。 $D(s)$ と $N(s)$ は互いに右素で、 $\begin{bmatrix} N(s) \\ F(s) \end{bmatrix} D^{-1}(s)$ は厳密にプロパーであると仮定する。このとき、Diophantine 方程式

$$X(s)N(s) + Y(s)D(s) = F(s) \quad (29)$$

の解多項式行列 $X(s) \in \mathbf{R}^{q \times m}[s]$ 、 $Y(s) \in \mathbf{R}^{q \times p}[s]$ は、Scheme I によって求められる多項式行列対 $D(s)$ 、

$\begin{bmatrix} N(s) \\ F(s) \end{bmatrix}$ の最小次数左零化基底

$$\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) & -\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{D}_{21}(s) & I_q \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (30)$$

の一部すなわち、 $X(s) = -\tilde{D}_{21}(s)$ 、 $Y(s) = \tilde{N}_2(s)$ として得られる。

(証明) Scheme I による $\begin{bmatrix} D(s) \\ N(s) \\ F(s) \end{bmatrix}$ の最小次数左基底

を $\begin{bmatrix} \tilde{N}_1(s) & -\begin{bmatrix} \tilde{D}_{11}(s) & 0 \\ \tilde{D}_{21}(s) & \tilde{D}_{22}(s) \end{bmatrix} \end{bmatrix}$ とし、 $\begin{bmatrix} N(s) \\ F(s) \end{bmatrix} D^{-1}(s)$ の可制

御正準実現を (A, B, C) 、

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} N(s) = C_1 S^0(s), \\ F(s) = C_2 S^0(s) \end{matrix}$$

とする。 $D(s)$ と $N(s)$ が互いに右素なので、 $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_1A \\ \vdots \\ c_1A^{v-1} \end{bmatrix}$

はフル列ランクをもち、定理2(4)と同様に

$$\nu_{m+1} = \dots = \nu_{m+q} = 0$$

となる。したがって、 $\tilde{D}_{22}(s) = I_q$ であり、(30)式の第2ブロック行と(29)式を比較して

$$X(s) = -\tilde{D}_{21}(s), \quad Y(s) = \tilde{N}_2(s)$$

である。□

制御系の設計において表われる Diophantine 方程式では、必ずしも $F(s)D^{-1}(s)$ がプロパーであるとは限らないので、その意味では上記の Diophantine 方程式は特殊なものであることに注意が必要である。

5. あとがき

本論文では、多項式ベクトル空間の最小次数直交基底の一計算法を提案した。この計算法は、与えられた多項式行列対の可制御正準実現に実行列の基本的な演算を施すことで実行できるので、計算機向きの方法であると考ええる。また、直交基底の次数は、この可制御実現の可観測指数で与えられることも示した。本論文の定理 1 で得られる結果は文献 3) の Theorem 3 と同じであるが、証明法は本論文のほうが簡潔であり、最小次数基底を求める問題を実行列の零化行列を求める問題に変換している点が異なる。零化行列の選び方の自由度を利用して、得られる直交基底の一部が行プロパーかつ列プロパーであるように、また左下三角列エルミート多項式行列であるように決めることもできることを示した。特に、エルミート多項式行列を得る手法をそのまま線形制御システムの解析において重要である二つの多項式行列の最大共通右因子や Bezout 恒等式、Diophantine 方程式の解法に用いることができる。本論文で考えた Diophantine 方程式は特殊なものであり、一般的な Diophantine 方程式の解法や多項式行列表現を用いた全ての安定化補償器のパラメトリゼーションについては稿を改めて述べたい⁸⁾。

参 考 文 献

- 1) G. D. Forney, Jr.: Minimal Bases of Rational Vector Spaces with Applications to Multivariable Linear Systems, SIAM J. Control and Optimization, **13**, 493/520 (1975)
- 2) T. Kailath: Linear Systems, Prentice-Hall (1980)
- 3) W. A. Wolovich and P. J. Antsaklis: The Canonical Diophantine Equations with Applications, SIAM J. Control and Optimization, **22**, 777/787 (1984)
- 4) Th. G. J. Beelen and G. W. Veltkamp: Numerical Computation of a Coprime Factorization of a Transfer Function Matrix, Systems and Control Letters, **9**, 281/288 (1987)
- 5) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag (1974)
- 6) W. A. Wolovich: A Division Algorithm for Polynomial Matrices, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-29-7**, 656/658 (1984)
- 7) F. -R. Chang, L. S. Shieh and J. M. Navarro: A Simple Division Method for Solving Diophantine Equations and Associated Problems, Int. J. Systems Science, **17**,

953/968 (1986)

- 8) 加瀬, 田村: Diophantine 方程式の一解法と線形制御系設計への応用, 第 15 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 33/36 (1992)

《付 録》

$N(s)D^{-1}(s)$ がプロパーの場合, その可制御正準実現は以下ようになる。

$$\begin{aligned} sx(s) &= Ax(s) + Bu(s) \\ y(s) &= Cx(s) + Du(s) \end{aligned} \quad (31)$$

この場合, (6) に対応する式は以下ようになる。

$$S_m^{\nu}(s)N(s)\eta(s) = \mathcal{O}_{\nu}x(s) + \mathcal{T}_{\nu-1}S_p^{\nu}(s)D(s)\eta(s) \quad (32)$$

ただし,

$$\mathcal{T}_{\nu-1} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ CB & D & 0 & \cdots & 0 \\ CAB & CB & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ CA^{\nu-1}B & CA^{\nu-2}B & CA^{\nu-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

である。結局, $N(s)D^{-1}(s)$ がプロパーの場合には, $T_{\nu-1}$ を $\mathcal{T}_{\nu-1}$ に置き換えて, (13) 式の $\tilde{D}$ を用いて,

$$\begin{aligned} \tilde{D}(s) &:= \tilde{D}S_m^{\nu}(s) = \text{diag}\{s^{\nu_i}\} - AS^{\nu_r-\mu}(s), \\ \tilde{N}(s) &:= \tilde{D}\mathcal{T}_{\nu-1}S_p^{\nu}(s) \end{aligned} \quad (33)$$

とすればよい。

[著 者 紹 介]

加 瀬 渡 (正会員)

1990 年, 上智大学大学院機械工学専攻博士課程修了(工学博士)。同年名古屋大学工学部助手。91 年静岡理科大学機械工学科講師, 現在に至る。適応制御, システム理論の研究に従事。システム制御情報学会の会員。

田 村 捷 利 (正会員)

(Vol. 29, No. 10 参照)