状態や入力に制限を有する線形離散時間系における 最大許容初期状態集合[†]

吉田 和 信*・川 辺 尚 志*・西 村 行 雄**
米 澤 洋**

Maximal Sets of Admissible Initial States in Linear Discrete-Time Systems with State and Control Constraints

Kazunobu YOSHIDA*, Hisashi KAWABE*,
Yukio NISHIMURA** and Yoh YONEZAWA**

In linear systems with state and control constraints, an initial state is admissible if the subsequent motion of the system satisfies the constraints. The set of all possible such initial conditions is the maximal set of admissible initial states, denoted by S^* , which has important applications in the analysis and design of closed-loop systems with such constraints. A linear discrete-time time-invariant control system, $x(t+1)=Ax(t)$, with constraints of the type, $y(t)=Cx(t)\in Y$, is considered.

A new method for constructing the set S^* has been given on the basis of the results obtained by Yoshida et al. in 1985. The investigation in the dual space has led to an efficient algorithm where the dual set of S^* , i. e. R^* , is considered instead of S^* . Both S^* and R^* are convex polyhedrons that the vertices of one set can express the other set. The properties of R^* and its characterization are studied. The algorithm for constructing the set R^* can be summarized as follows: Let $R(0)$ be the convex combination obtained from the column vectors of C^T . Apply A^T to the vertices of $R(0)$ to obtain new vectors and take convex combination of these vectors and $R(0)$ to make $R(1)$. In much the same way as this, proceed to generate $R(2)$, $R(3)$, $\dots$. If the new vector is not a vertex of the set, stop the subsequent application of A^T to the vector. The set $R(j)$ is a monotonically nondecreasing set and its limit is R^* .

Since this algorithm removes the vectors unnecessary for constructing R^* at each stage and uses an efficient LP obtained from the study in the dual space, the calculation amount can be saved considerably as compared with the one proposed by Gilbert and Tan in 1991.

Key Words: linear discrete-time system, state and control constraints, admissible initial state, convex polyhedron, linear programming

1. はじめに

状態や入力に制限を有する制御系の解析・設計を考えると、本質的な状態集合がある。すなわち、制御軌道のすべてが、与えられた制限条件を満足するような初期状態集合である。そのような集合の最大のものを、最大

許容初期状態集合と呼び S^* で表わす。すなわち、 S^* は、線形系

$$x(t+1)=Ax(t)$$

に対して、制限条件を

$$y(t)=Cx(t)\in Y\subset R^r, y(t)\in R^r$$

とすると、

$$S^*\triangleq\{x(0): y(t)\in Y, \forall t\geq 0\}$$

で定義される。連続時間系に対しても同様に定義できる。出力 $y(t)$ は、状態の一部や入力(定ゲイン状態フィードバック制御)を表わす。 A は、制御系のシステム行列である。

すでにこの集合は、1960年代なかごろに Wonham と Johnson が与えた入力制限下での2次形式評価最小化

[†] 第36回システム制御情報学会研究発表講演会で発表(1992・5)

* 広島工業大学 広島市佐伯区三宅 2-1-1

** 広島大学工学部 東広島市鏡山 1-4-1

* Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima

** Faculty of Engineering, Hiroshima University, Higashi-hiroshima

(Received November 30, 1992)

(Revised April 5, 1993)

制御の設計法^{1),2)}に見られる。実際、通常の線形制御系設計法で得られた制御則 $u(t)=Fx(t)$ が、状態や入力の制限下で、適用可能な初期状態集合を明らかにすることは基本的な問題であるので、 S^* の構成問題は古くから意識されていたと思われる³⁾。

いま

$$S(0) \triangleq \{x(0): y(0) \in Y\}$$

とすると、 S^* は $S(0)$ の最大 A 不変 ($x \in S^*$ ならば $Ax \in S^*$) 部分集合である。 S^* を近代的に求める方法が二つある。一つは、リアプノフ方程式から得られる正定行列によって $S(0)$ に内接する楕円体を構成する方法⁴⁾であり、もう一つは、 $S(0)$ の中で凸多面体を作り、 A 不変条件 (positively invariant condition) を調べる方法である^{5),6)}。いずれも、一般に、非常に保守的な近似しか与えない。

集合 S^* を利用した制御則には、つぎのようなものが考案されている。すなわち、許容ゲインによる線形制御⁷⁾、可変ゲイン状態フィードバック制御^{8),9)}、飽和制御¹⁰⁾、2次形式評価最小化制御^{11),2)}、スカラゲイン調整制御¹¹⁾ などである。このように、 S^* は、種々のシンセシス問題で利用されるし、閉ループ制御での計算が必要とされる場合もあるので¹¹⁾、より効率的な構成アルゴリズムが望まれている。

$y(t)=c^T x(t) \in R$, $Y=[-1, 1]$ の場合について、1985年に S^* 構成アルゴリズムが示された^{8),9)}。この場合 S^* は、凸多面体となる。この方法は

$$y(t)=z(t)^T x(0), \quad z(t)=(A^T)^t c$$

としたとき、 z 空間 (双対空間) で、 S^* の双対集合の端点を効率的に計算するものである。 A が漸近安定であるとき、有限ステップで端点計算が終了することが明らかにされた。また、端点計算のための線形計画問題も示された。そして、1991年に Gilbert と Tan によって、 $y(t) \in R^r$ 、およびより一般的な Y に対する、 S^* 構成アルゴリズムが提案された¹²⁾。Gilbert らの方法は、 x 空間 (原空間) における計算に基づいたものであり、アルゴリズムの計算効率に関する考察はほとんどなされていない。また、 Y が一般的であることと原空間における構成法であることが、計算効率改善の検討を困難にしている。

本論文では、文献 8) の考えに基づいて、非対称な振幅制限を有するスカラ出力系および多出力系に対する S^* 構成法を示す。ここで提案されるアルゴリズムは、 S^* の双対集合を構成するとき、 unnecessary な端点計算をできるだけ避けるようにしたものである。また、Bitosoris によって提案された凸多面体の A 不変条件^{5),6)} と本方法との関係を明らかにし、 A 不変条件の幾何学的解釈および簡便な判定方法を与える。

本論文の構成はつぎのとおりである。第2章では、 S^* 構成問題を定式化する。第3章では、まず、 S^* の双対集合 R^* を定義し、 R^* の端点によって、 S^* が表現できることを示す。そして、有限ステップで、すべての端点が計算できることを確認する。また、計算効率化のための R^* 端点の性質を述べ、端点計算アルゴリズムを与える。第4章では、双対空間での考察に基づいて得られた端点判定法である線形計画問題を示す。第5章では、凸多面体の A 不変条件の幾何学的解釈および本方法との関係について述べる。第6章では、2次系に対する集合 S^* および R^* の計算例を示す。定理の証明は、付録で示される。

2. 問題の記述

つぎの多出力離散時間線形系を考える。

$$x(t+1)=Ax(t), \quad t=0, 1, \dots \quad (1)$$

$$y(t)=Cx(t), \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_r^T \end{bmatrix} \quad (2)$$

$x \in R^n$, $y \in R^r$ である。 A は漸近安定と仮定する。出力にはつぎの振幅制限があるとする。

$$y_i(t) \in Y_i = [-\rho_i^{-1}, \sigma_i^{-1}], \quad \rho_i > 0, \sigma_i > 0, i=1 \sim r \quad (3)$$

このとき、集合 S^* は、つぎで定義される。

$$S^* \triangleq \{x(0): y_i(t) \in Y_i, i=1 \sim r, \forall t \geq 0\} \quad (4)$$

S^* は、また、 $y_i(t)=c_i^T A^t x(0)$ を考慮すれば、つぎのように表現できる。

$$S^* = \{x(0): \sigma_i z(c_i, t)^T x(0) \leq 1, \\ -\rho_i z(c_i, t)^T x(0) \leq 1, i=1 \sim r, \forall t \geq 0\} \quad (5)$$

ただし

$$z(c_i, t)^T = c_i^T A^t \quad (6)$$

である。(5)式から S^* は凸多面体であることがわかる。この集合の構成方法を求めることが問題である。

3. 集合 S^* の構成法

3.1 S^* の双対空間における表現

議論の簡明さのために、まずスカラ出力系の場合を考える。

$$y(t)=c^T x(t) \in R \quad (7)$$

$$y(t) \in Y = [-\rho^{-1}, \sigma^{-1}], \quad \rho > 0, \sigma > 0 \quad (8)$$

について、つぎの集合を定義する。 $z(c, t)$ は単に $z(t)$ と書く。

$$S(j) \triangleq \bigcap_{t=0}^j \{x: \sigma z(t)^T x \leq 1, -\rho z(t)^T x \leq 1\} \quad (9)$$

$$R(j) \triangleq \mathcal{H}\{\sigma z(t), -\rho z(t), t=0 \sim j\}$$

$$= \{z: z = \sum_{t=0}^j \{\alpha(t)\sigma z(t) - \beta(t)\rho z(t)\},$$

$$\alpha(t), \beta(t) \geq 0, \sum_{t=0}^j (\alpha(t) + \beta(t)) = 1\} \quad (10)$$

$\mathcal{H}(\cdot)$ は、ベクトル集合 $\{\cdot\}$ の凸結合を意味する。 $R(j)$ は、原点を含む凸集合であるので、係数

$$\sum_{t=0}^j (\alpha(t) + \beta(t)) \leq 1 \quad (11)$$

としてもよい。

《定理 1》 $S(j)$ と $R(j)$ との間にはつぎの関係がある。

$$S(j) = \{x: x^T z \leq 1, \forall z \in R(j)\} \quad (12)$$

$$R(j) = \{z: x^T z \leq 1, \forall x \in S(j)\} \quad (13) \square$$

この関係のため、 $S(j)$ と $R(j)$ を互いの双対集合と呼ぶ。 $S(j)$ は、単調非増加集合列でこの下限が S^* である。また、 $R(j)$ は、単調非減少集合列でこの上限を R^* で表わす。これらの集合の定義から、 S^* は A 不変であり、 R^* は A^T 不変である。すなわち

$$Ax \in S^*, \forall x \in S^* \quad (14)$$

$$A^T z \in R^*, \forall z \in R^* \quad (15)$$

定理 1 から、つぎの系を得る。

《系 1》 $R(j)$ の端点を $e_1^j, e_2^j, \dots, e_{p(j)}^j$ とすると

$$R(j) = \mathcal{H}\{e_1^j, e_2^j, \dots, e_{p(j)}^j\} \quad (16)$$

$$S(j) = \{x: (e_i^j)^T x \leq 1, i=1 \sim p(j)\} \quad (17)$$

が成立する。 $\square$

R^* の端点を $e_1^*, e_2^*, \dots, e_{p^*}^*$ とすると、系 1 から

$$R^* = \mathcal{H}\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_{p^*}^*\} \quad (18)$$

$$S^* = \{x: (e_i^*)^T x \leq 1, i=1 \sim p^*\} \quad (19)$$

したがって、 R^* の端点が S^* を記述するために必要かつ十分である。以下では、 R^* 端点の経済的計算法について述べる。

3.2 集合 R^* の構成法

《定理 2》^(注 1) 問題の仮定が成立すれば、すなわち、 A は漸近安定、 Y は有界で $0 \in \text{Int } Y$ (Y の内部) ならば、つぎの j^* が存在する。

$$S^* = S(j^*) \quad (20)$$

$$R^* = R(j^*) \quad (21)$$

$$j^* = \min \{j: R(j+1) = R(j)\}$$

$$= \min \{j: \sigma z(j+1) \in R(j), -\rho z(j+1) \in R(j)\} \quad (22) \square$$

すなわち、ひとたび $\sigma z(j+1)$ および $-\rho z(j+1)$ が $R(j)$ の元となれば、その後のこれらの軌道は、 $R(j)$ を出

ることはない。このとき $R(j)$ は最大となり、 R^* は有限ステップで確定する。

スカラ出力系の場合、一般性を失うことなく

$$\sigma \geq \rho \quad (23)$$

と仮定すると、つぎの二つの定理が成立し、端点計算の効率化に利用される。

《定理 3》 $\sigma z(j+1) \in R(j)$ ならば $-\rho z(j+1) \in R(j)$ である。 $\square$

《定理 4》 $\sigma z(t)$, $t=0 \sim j^*$ は、 R^* の端点である。 $\square$

実際、

$$R(j+1) = \mathcal{H}\{R(j), A^T R(j)\} \quad (24)$$

より、各段階で必要とされるベクトルは $R(j)$ の端点のみであることがわかる。よって、(22) 式中の条件のうち先に成立したほうから軌道計算を打ち切ることができる。定理 3 から $-\rho z(j+1) \in R(j)$ が先に成立する。すなわち

$$j_2 \triangleq \min \{j: -\rho z(j+1) \in R(j)\} \quad (25)$$

とすると

$$j_2 \leq j^* \quad (26)$$

である。以上から

$$R^* = \mathcal{H}\{\sigma z(t_1), t_1=0 \sim j^*, -\rho z(t_2), t_2=0 \sim j_2\} \quad (27)$$

がわかる。 $-\rho z(t_2)$, $t_2=0 \sim j_2$ は R^* の端点になるとは限らない。これらの点が端点か否かは、 R^* を構成した後、調べる必要がある。

以上の議論に基づいて、つぎのアルゴリズムを得る。

《スカラ出力系に対する R^* 構成アルゴリズム》

i) $j=0$ とする。

ii) $-\rho z(j+1) \in R(j)$ ならば $j_2=j$ とおき iii) へ行く。そうでなければ、 $j \leftarrow j+1$ とし、ii) を繰り返す。

iii) $\sigma z(j+1) \in \mathcal{H}\{\sigma z(t_1), t_1=0 \sim j, -\rho z(t_2), t_2=0 \sim j_2\} (=R(j))$ ならば $j^*=j$ とおき iv) へ行く。そうでなければ、 $j \leftarrow j+1$ とし iii) を繰り返す。

iv) $R^* = \mathcal{H}\{\sigma z(t_1), t_1=0 \sim j^*, -\rho z(t_2), t_2=0 \sim j_2\}$ が求める双対集合である。 $\square$

さらに、ステップ v) として、 $-\rho z(t_2)$, $t_2=0 \sim j_2$ が R^* の端点か否かを判定し、端点のみを残す計算を行えば、必要十分なベクトル集合が得られ、 S^* を閉ループ制御で用いる際に便利である。 $-\rho z(t_2)$, $t_2=0 \sim j_2^*$ ($0 \leq j_2^* \leq j_2$) が R^* の端点であることが判明すれば、 R^* の最もコンパクトな表現

$$R^* = \mathcal{H}\{\sigma z(t_1), t_1=0 \sim j^*, -\rho z(t_2), t_2=0 \sim j_2^*\} \quad (28)$$

を得る。もちろん、 $-\rho z(0) \in \text{Int } R^*$ の場合、

$$R^* = \mathcal{H}\{\sigma z(t_1), t_1=0 \sim j^*\} \quad (29)$$

(注 1) この定理は Gilbert ら (1991) によっても示されているが、対称な制限条件の場合に対してすでにわれわれが 1985 年に示している⁹⁾。これは、1985 年の結果の一般化である。また、 (c^T, A) が可観測か否かにかかわらず、修正なしで適用できるという利点をもつ。

である。 S^* は R^* 端点によって (19) 式で表わされる。

つぎに、ベクトル c が変わっても、 ρ/σ が一定であれば、 R^* にはある不変性があることを示そう。いま、 R^* を $R^*(c, \sigma, \rho)$ と記す。

《定理 5》 (c^T, A) が可観測ならば、任意の $d \in R^n$ に対して

$$c^T T = d^T \quad (30)$$

$$TA = AT \quad (31)$$

を満足する行列 T が存在し、さらに $\rho/\sigma = \rho'/\sigma'$ ならば

$$R^*(d, \sigma', \rho') = \frac{\sigma'}{\sigma} T^T R^*(c, \sigma, \rho) \quad (32)$$

が成立する。□

すなわち、 $R^*(d)$ は $R^*(c)$ の線形写像であり、 $R^*(c)$ の端点に T^T を作用させて得られるベクトルの凸結合をとることにより構成される。 (d^T, A) が可観測ならばこれらのベクトルも $R^*(d)$ の端点となる。定理 5 は R^* 構成アルゴリズムには利用されないが、スカラ出力系において $R^*(c, \sigma, \rho)$ が既知のとき $R^*(d, \sigma', \rho')$ を求める必要がある場合に利用価値がある。

3.3 多出力系への拡張

スカラ出力系の場合の議論に基づき、 r 次元出力 y に対する R^* の構成法を考えよう。 y_i に対する集合 $S_i(j)$ 、 $R_i(j)$ 、 S^* 、 R^* が 3.1 節と同様に定義できる。また

$$S(j) \triangleq \bigcap_{i=1}^r S_i(j) \quad (33)$$

$$R(j) \triangleq \mathcal{K}\{R_i(j), i=1 \sim r\} \quad (34)$$

と再定義すれば、定理 2 が適用され、

$$S^* = S(j^*), \quad R^* = R(j^*) \quad (35)$$

$$j^* = \min \{j: R(j+1) = R(j)\} \quad (36)$$

となる。以下に、 R^* 端点の一効率の計算方法を示す。

$R(0)$ の端点を $e_1^0, e_2^0, \dots, e_{p(0)}^0$ とし、集合 E_0 を次式で定義する。

$$E_0 \triangleq \{e_1^0, e_2^0, \dots, e_{p(0)}^0\} \quad (37)$$

このとき $R(0)$ は

$$R(0) = \mathcal{K}\{E_0\} \quad (38)$$

と表わすことができる。また

$$A^T E_0 \triangleq \{A^T e_1^0, A^T e_2^0, \dots, A^T e_{p(0)}^0\} \quad (39)$$

を定義すると、 $R(1)$ は

$$R(1) = \mathcal{K}\{E_0, A^T E_0\} \quad (40)$$

となる。 $A^T E_0$ から $R(1)$ の端点でないベクトルを除いた集合を E_1 とすると

$$R(1) = \mathcal{K}\{E_0, E_1\} \quad (41)$$

が成り立つ。同様に、 $j \geq 1$ に対して、 $A^T E_{j-1}$ から $R(j)$ の端点でないベクトルを除いた集合を E_j とすると、次式を得る。

$$R^* = R(j^*) = \mathcal{K}\{E_0, E_1, \dots, E_{j^*}\} \quad (42)$$

ここで

$$\begin{aligned} j^* &= \min \{j: R(j+1) = R(j)\} \\ &= \min \{j: E_{j+1} = \emptyset\} \end{aligned} \quad (43)$$

最後に、 R^* の端点のみを残す計算を行って

$$R^* = \mathcal{K}\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_{p^*}^*\} \quad (44)$$

を得る。以上をアルゴリズムの形式にまとめておく。

《多出力系に対する R^* 構成アルゴリズム》

i) $R(0) = \mathcal{K}\{E_0\}$, $j=0$ とおく。

ii) $R(j+1) = \mathcal{K}\{E_0, \dots, E_{j+1}\}$ を構成する。 $E_{j+1} = \emptyset$ ならば $j^* = j$ とおき $R^* = R(j^*)$ を得てステップ iii) へ行く。 $E_{j+1} \neq \emptyset$ ならば $j \leftarrow j+1$ とし、ステップ ii) を繰り返す。

iii) R^* の端点のみを残す計算を行って $R^* = \mathcal{K}\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_{p^*}^*\}$ を得る。□

この方法は、計算不要なベクトルを各段階で除いているので、計算量の節約ができ、スカラ出力系のアルゴリズムを特定の c_i について適用し、 R^* をつぎつぎ構成して最後に端点のみ残すという計算方法よりも、かなり効率的である。このことは、数値例で例証される。

4. 端点の効率的な判定法

上記の R^* 構成法では、あるベクトル $z \in R^n$ が凸多面体 $\mathcal{K}\{z_i, i=1 \sim m\}$ の端点か否かの判定を繰り返し行う必要がある。このための効率的な判定法はつぎの定理で与えられる。

《定理 6》⁸⁾ 線形計画問題(LP)

$$\text{maximize } g = y_1 + y_2 + \dots + y_m \quad (45)$$

$$\text{subject to } Dy = 0, y_i \geq 0 \quad (46)$$

ただし

$$D = [d_1, d_2, \dots, d_m] \quad (47)$$

$$d_i = z_i - z, i=1 \sim m \quad (48)$$

$$y = [y_1, y_2, \dots, y_m]^T \quad (49)$$

の最適値を g^* とする。 g^* は 0 または ∞ である。このとき $g^* = 0$ ならば、 z は $\mathcal{K}\{z_i, i=1 \sim m\}$ の端点である。すなわち、

$$z \in \mathcal{K}\{z_i, i=1 \sim m\} \quad \text{if } g^* = 0 \quad (50)$$

$g^* = \infty$ ならば端点ではない。すなわち

$$z \in \mathcal{K}\{z_i, i=1 \sim m\} \quad \text{if } g^* = \infty \quad (51)$$

ただし $z \neq z_i, i=1 \sim m$ とする。□

(50) 式の条件は、 z と $\mathcal{K}\{z_i, i=1 \sim m\}$ を分離する超平面が存在すること、すなわち $z^T h < z_i^T h, i=1 \sim m$ あるいは、これらの式をまとめて $D^T h < 0$ を満足する $h \in R^n$ が存在することに等しい¹⁸⁾。このことと定理 6 との等価性は文献 8) に示されている。定理 6 の LP を解くほうが $D^T h < 0$ の可解性を調べるよりも効率的である (LP 標準

形になおした場合の制限条件行列の要素数比でいえば $n/(2n+m)$).

5. 凸多面体の A 不変条件

$t=0$ における集合

$$S(0)=\{x(0): y_i(0) \in Y_i, i=1 \sim r\} \\ =\{x(0): (e_i^0)^T x(0) \leq 1, i=1 \sim p(0)\} \quad (52)$$

は

$$Ax \in S(0), \quad \forall x \in S(0) \quad (53)$$

であるとき A 不変(positively invariant⁵⁾)であるという。(53)式は、 $S^*=S(0)$ を意味しており、 $S(0)$ が最大許容初期状態集合となる特殊な場合である。(53)式の条件は、3章の議論から、 $S(0)$ の双対集合 $R(0)$ が A^T 不変であることに等しい。この条件は、端点のみ考えれば十分であるから

$$A^T e_i^0 \in R(0), \quad i=1, 2, \dots, p(0) \quad (54)$$

となる。 $S(0)$ の A 不変性は(54)式によって、容易に判定される。 $R(0)$ の形状にも依存するが、凸多面体に A^T を作用させた像が元の凸多面体の部分集合となる A のクラスはかなり限定される。よって、この条件がいかに成立しがたい条件であるかが理解できる。

(54)式は、Bitsoris(1988)の示した A 不変条件に等しい。ここで、Bitsorisの条件に幾何学的解釈を与えることができる。

《定理7》(Bitsoris)⁵⁾ つぎの $F(p(0) \times n)$, $H(p(0) \times p(0))$, $w(p(0) \times 1)$ 行列を定義する。

$$F = \begin{bmatrix} (e_1^0)^T \\ (e_2^0)^T \\ \vdots \\ (e_{p(0)}^0)^T \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} h_1^T \\ h_2^T \\ \vdots \\ h_{p(0)}^T \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$S(0)$ が A 不変であるための必要十分条件は、つぎの条件を満たす行列 H が存在することである。

$$FA - HF = 0, \quad h_{ij} \geq 0 \quad (56)$$

$$(H - I)w \leq 0 \quad (57)$$

ただし、 h_{ij} は H 行列の (i, j) 要素である。すなわち、(56)、(57)式を書き換えれば、つぎの $h_i \in R^{p(0)}$, $i=1 \sim p(0)$ が存在する条件となる。

$$A^T e_i^0 = F^T h_i = \sum_{j=1}^{p(0)} h_{ij} e_j^0, \quad h_{ij} \geq 0, \quad i=1 \sim p(0) \quad (58)$$

$$\sum_{j=1}^{p(0)} h_{ij} \leq 1 \quad (59) \square$$

(58)式右辺は、 $e_1^0 \sim e_{p(0)}^0$ の凸結合である。よって、(56)、(57)式の条件は $A^T e_i^0 \in R(0)$, $i=1, 2, \dots, p(0)$ にほかならない。

6. 数 値 例

2 次系の集合 R^* および S^* の例を示そう。連続時間制御対象

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (60)$$

をサンプリング周期 $T=0.2s$ で離散化(ゼロ次ホールド等価化)したつぎの系を考える。

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.2 \end{bmatrix} u(t) \quad (61)$$

ここで与えた安定化離散時間制御はつぎのとおりである。

$$u(t) = f^T x(t) \quad (62)$$

$$f^T = (-0.3232, -0.6768) \quad (63)$$

制限条件は

$$\begin{aligned} -2 \leq x_1(t) \leq 0.2, \quad -2 \leq x_2(t) \leq 0.2 \\ -1 \leq u(t) \leq 0.1 \end{aligned} \quad (64)$$

とする。すなわち

$$\begin{aligned} c_1 &= (1, 0)^T, \quad \rho_1 = 0.5, \quad \sigma_1 = 5 \\ c_2 &= (0, 1)^T, \quad \rho_2 = 0.5, \quad \sigma_2 = 5 \\ c_3 &= f, \quad \rho_3 = 1, \quad \sigma_3 = 10 \end{aligned} \quad (65)$$

A 行列は閉ループ系のシステム行列

$$A = \begin{bmatrix} 0.9935 & 0.1865 \\ -0.0647 & 0.8645 \end{bmatrix} \quad (66)$$

となる。定理6のLPの解法にはシンプレックス法を用いた。よって、(50)、(51)式の判定は通常のシンプレックス規範で処理できる。この制御系に対するそれぞれの領域 R^* および S^* (添え字 1, 2, 3 で示す)を Fig. 1(a), (b) に示す。

R^* は、いずれも 44 個の端点をもつ(定理5から、この数は等しい)。また、三つの制限条件に対する領域 R^* および S^* を Fig. 2(a), (b) に示す。 R^* は、わずか 20 個の端点から構成されることに注意されたい。本数値例の場合、LP で取り扱う制限条件行列 D のサイズは最大 2×20 である。

なお(63)式の安定化フィードバックゲインは、初期状態集合 $\{x(0): |x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1\}$, 制限条件 $|u| \leq 1$ の下で、 $t_f = 4s$ における状態の終端ノルムを最小化する最適ゲインであり、文献7)の方法によって得られたものである。

7. おわりに

状態や入力に振幅制限を有する線形離散時間系に対する最大許容初期状態集合 S^* の構成法について考察した。 S^* を直接求めるのではなく、 S^* の双対集合 R^* を構成するという双対空間における議論が、効率的な構成ア

ルゴリズムを導いた。 S^* と R^* は、凸多面体であり、一方の端点で他方の集合が表現できる。

連続時間系の S^* は、ここでは、考察しなかったが、サンプリング周期を小さくすれば、離散系の S^* でいくらかでもよい近似が可能である^{8),12)}。

本論文で示した R^* の考察は、 S^* の効率的構成法だけでなく制限条件付き線形制御系設計問題の解法にも応用される⁷⁾。実際、 R^* を用いる設計法は、 A 不変凸多面体を用いる一連の設計法^{(4)~(7)}に比べ、より小さな評価を達成するゲインを与える。

参考文献

- 1) W. M. Wonham and C. D. Johnson: Optimal Bang-bang Control with Quadratic Performance Index, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, **86**, 107/115

- (1964)
- 2) C. D. Johnson and W. M. Wonham: On a Problem of Letov in Optimal Control, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, **87**, 81/89 (1965)
- 3) H. Kiendl: Calculation of the Maximum Absolute Values of Dynamical Variables in Linear Control Systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-27**-1, 86/89 (1982)
- 4) P. Gutman and P. Hagander: A New Design of Constrained Controllers for Linear Systems, IEEE Trans., **AC-30**-1, 22/33 (1985)
- 5) G. Bitsoris: On the Positive Invariance of Polyhedral Sets for Discrete-time Systems, Systems & Control Letters, **11**, 243/248 (1988)
- 6) G. Bitsoris: Positively Invariant Polyhedral Sets of Discrete-time Linear Systems, INT. J. Control, **47**-6, 1713/1726 (1988)
- 7) 吉田, 西村, 米澤, 川辺: 状態や入力に制限がある場合の線

(a) Sets R_1^* , R_2^* and R_3^*

(a) Set R^* obtained as the convex combination of R_1^* , R_2^* and R_3^*

(b) Sets S_1^* , S_2^* and S_3^*

(b) Set S^* obtained as the intersection of S_1^* , S_2^* and S_3^*

Fig. 1

Fig. 2

形制御系の設計, 第 31 回 SICE 学術講演会予稿集, 19/20(1992)

- 8) 吉田, 西村, 米澤: 操作量に制限がある線形系に対する可変ゲインフィードバック制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, 21-7, 677/683(1985)
- 9) K. Yoshida, N. Nishimura and Y. Yonezawa: Variable Gain Feedback Control for Linear Sampled-data Systems with Bounded Control, C-TAT, 2-2, 313/323 (1986)
- 10) 吉田, 西村, 米澤: 操作量制限がある線形離散時間系に対する可変ゲイン飽和コントローラの設計, 計測自動制御学会論文集, 24-4, 420/422 (1988)
- 11) P. Kapasouris, M. Athans and G. Stein: Design of Feedback Control Systems for Stable Plants with Saturating Actuators, IEEE Proc. of the 27th Conference on Decision and Control, 469/479 (1988)
- 12) E. G. Gilbert and K. T. Tan: Linear Systems with State and Control Constraints: The Theory and Application of Maximal Output Admissible Sets, IEEE Trans., AC-36-9, 1008/1020 (1991)
- 13) 吉田, 西村, 米澤: 状態や入力に制限がある場合の許容初期状態集合, 第 36 回システム制御情報学会研究発表講演会, 401/402 (1992)
- 14) M. Vassilaki, J. C. Henneft and G. Bitsoris: Feedback Control of Linear Discrete-time Systems under State and Control Constraints, INT. J. Control, 47-6, 1727/1735 (1988)
- 15) A. Benzaouia and C. Burgat: Regulator Problem for Linear Discrete-Time Systems with Non-symmetrical Constrained Control, INT. J. Control, 48-6, 2441/2451 (1988)
- 16) D. Mehdi and A. Benzaouia: State Feedback Control of Linear Discrete-Time Systems under Non-symmetrical State and Control Constraints, INT. J. Control, 50-1, 193/201 (1989)
- 17) G. Bitsoris and M. Vassilaki: Optimization Approach to the Linear Constrained Regulation Problem for Discrete-time Systems, INT. J. Systems SCI., 22-10, 1953/1960 (1991)
- 18) 久志本茂: 最適化問題の基礎, 60/60, 森北出版(1979)

《付 録》

〈付録 1〉 定理 1 の証明

まず, (12) 式を示そう. $x_0 \in S(j)$ とする. このとき

$$\alpha z(t)^T x_0 \leq 1, -\rho z(t)^T x_0 \leq 1, t=0 \sim j \quad (\text{A.1})$$

であるので $\forall z \in R(j)$ に対して

$$\begin{aligned} z^T x_0 &= \sum_{t=0}^j \{ \alpha(t) \alpha z(t)^T x_0 - \beta(t) \rho z(t)^T x_0 \} \\ &\leq \sum_{t=0}^j (\alpha(t) + \beta(t)) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

よって

$$x_0 \in \{x: z^T x \leq 1, \forall z \in R(j)\} \quad (\text{A.3})$$

である.

逆に, $x_0 \in \{x: z^T x \leq 1, \forall z \in R(j)\}$ とする. このとき, $\forall z \in R(j)$ に対して,

$$\begin{aligned} z^T x_0 &= \sum_{t=0}^j \{ \alpha(t) \alpha z(t)^T x_0 - \beta(t) \rho z(t)^T x_0 \} \\ &\leq 1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

が成立するので, 特定の $\alpha(t)$ または $\beta(t)$ のみ 1 とおき, ほかはすべて零とすることによって

$$\alpha z(t)^T x_0 \leq 1, -\rho z(t)^T x_0 \leq 1, t=0 \sim j \quad (\text{A.5})$$

すなわち,

$$x_0 \in S(j) \quad (\text{A.6})$$

を得る.

つぎに, (13) 式を示す. $z_0 \in R(j)$ とすると, 凸結合の係数条件を満足する $\alpha(t), \beta(t)$ を用いて

$$z_0 = \sum_{t=0}^j \{ \alpha(t) \alpha z(t) - \beta(t) \rho z(t) \} \quad (\text{A.7})$$

$\forall z \in S(j)$ について, $\alpha z(t)^T x \leq 1, -\rho z(t)^T x \leq 1, t=0 \sim j$ なので $x^T z_0 \leq 1$ である. よって, $z_0 \in \{z: x^T z \leq 1, \forall x \in S(j)\}$ がいえる.

こんどは, $z_0 \in \{z: x^T z \leq 1, \forall x \in S(j)\}$ とし, $z_0 \in R(j)$ と仮定しよう. $Z = \text{Span} \{z(t), t=0 \sim j\}$ とし $Z^\perp$ を Z の直交補空間とする. このとき $z_0 \in Z$ である. なぜなら $z_0 \in Z$ であるとする. $z_0 = z_1 + z_2, z_1 \in Z, z_2 \in Z^\perp$ と分解できるが, $x = \eta z_2, \eta > 1/\|z_2\|^2$ とおけば, $x^T \alpha z(t) = 0, -x^T \rho z(t) = 0, t=0 \sim j$ すなわち $x \in S(j)$ かつ $x^T z_0 = \eta z_2^T z_2 > 1$ となり, これは $z_0 \in \{z: x^T z \leq 1, \forall x \in S(j)\}$ という仮定に反するからである. $z_0 \in R(j)$ と仮定したので, 凸集合の分離超平面定理¹⁸⁾ から

$$z_0^T h > \alpha z(t)^T h, z_0^T h > -\rho z(t)^T h, t=0 \sim j \quad (\text{A.8})$$

なる $h \in R^n$ が存在する. そして

$$\xi = \max \{ \alpha z(t)^T h, -\rho z(t)^T h, t=0 \sim j \} > 0 \quad (\text{A.9})$$

である. 実際, $\sigma > 0, \rho > 0$ なので, $\xi = 0$ とすると $z(t)^T h = 0, t=0 \sim j$ すなわち, $h \in Z^\perp$ となり, $z_0 \in Z$ なので, $z_0^T h = 0$ となる. これは (A.8) 式に反する. (A.9) 式から, h は $\xi = 1$ となるように選ぶことができ, このとき $\alpha z(t)^T h \leq 1, -\rho z(t)^T h \leq 1, t=0 \sim j$ であるから $h \in S(j)$ である. ところが (A.8) 式より $z_0^T h > 1$ が結論されるが, これは $z_0 \in \{z: x^T z \leq 1, \forall x \in S(j)\}$ なる仮定に反する. よって, $z_0 \in R(j)$ である. $\square$

〈付録 2〉 定理 2 の証明

$R(j)$ に A^T を作用させると, 端点の一つずつ先へ移動するので

$$A^T R(j) = \mathcal{K} \{ \alpha z(t), -\rho z(t), t=1 \sim j+1 \} \quad (\text{A.10})$$

また

$$R(j+1) = \mathcal{K} \{ \alpha z(t), -\rho z(t), t=0 \sim j+1 \} \quad (\text{A.11})$$

であるので, $R(j+1)$ は, $R(j)$ と $A^T R(j)$ の凸結合である. したがって $A^T R(j) \subset R(j)$, すなわち

$$\alpha z(j+1) \in R(j), -\rho z(j+1) \in R(j) \quad (\text{A.12})$$

が成立すれば, $R(j)$ は, A^T 不変となり, その上限に達する.

$R(j), j \geq n-1$ は, 定義から $Z = \text{Span} \{c, A^T c, \dots, (A^T)^{n-1} c\}$ 上の凸多面体であり, $0 \in \text{Int } R(j) \cap Z$ であ

る. $B(r)$ を Z 上の, 0 を中心とする半径 r の球体とすると, $\exists r > 0$ に対して $B(r) \subset R(j)$ である. A は漸近安定であるので $\forall \varepsilon > 0$ に対して $\|(A^T)^N\| < \varepsilon$ となる数 N が存在し, $\varepsilon = \min\{r/\|\sigma z(0)\|, r/\|\rho z(0)\|\}$ と選べば

$$(A^T)^N \sigma z(0) \in B(r), (A^T)^N (-\rho z(0)) \in B(r) \quad (\text{A.13})$$

よって, $j^* \leq N$ がいえた. $\square$

〈付録3〉 定理3の証明

$\sigma z(j+1) \in R(j)$ ならば, $\sigma z(j+1)$ は $\sigma z(t)$, $-\rho z(t)$, $t=0 \sim j$ の凸結合で表わされる. すなわち

$$\begin{aligned} \sigma z(j+1) &= \sum_{t=0}^j \{\alpha(t) \sigma z(t) - \beta(t) \rho z(t)\}, \\ \alpha(t), \beta(t) &\geq 0, \sum_{t=0}^j (\alpha(t) + \beta(t)) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

が成立する. この両辺に $-\rho/\sigma$ を掛けると

$$\begin{aligned} -\rho z(j+1) &= \sum_{t=0}^j \{-\alpha(t) \rho z(t) + \beta(t) (\rho/\sigma)^2 \\ &\quad \cdot \sigma z(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

となる. $(\rho/\sigma)^2 \leq 1$ であるから, 係数 and は 1 以下となり, $-\rho z(j+1)$ も $\sigma z(t)$, $-\rho z(t)$, $t=0 \sim j$ の凸結合で表わされることがわかる. すなわち, $-\rho z(j+1) \in R(j)$ がいえた. $\square$

〈付録4〉 定理4の証明

まず, $\sigma z(j^*)$ は, R^* の端点であることを示そう. $R(j^*-1) \neq R^*$ であるので, $\sigma z(j^*) \in R(j^*-1)$, $-\rho z(j^*) \in R(j^*-1)$ のいずれか一方かまたは, 両方が成立する. もし, $\sigma z(j^*) \in R(j^*-1)$ ならば, 定理3から $-\rho z(j^*) \in R(j^*-1)$ となり, $R(j^*-1) \neq R^*$ に反する. したがって,

$$\sigma z(j^*) \in R(j^*-1) \quad (\text{A.16})$$

である. この場合でも, もし $\sigma z(j^*) \in \mathcal{H}\{R(j^*-1), -\rho z(j^*)\}$ が成立するならば, $\sigma z(j^*)$ は R^* の端点とならない. この式が成り立つとすれば, $\sigma z(j^*)$ は, $\sigma z(t)$, $-\rho z(t)$, $t=0 \sim j^*-1$, および $-\rho z(j^*)$ の凸結合で表わされる. すなわち

$$\begin{aligned} \sigma z(j^*) &= \sum_{t=0}^{j^*-1} \{\alpha(t) \sigma z(t) - \beta(t) \rho z(t)\} \\ &\quad - \beta(j^*) \rho z(j^*) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

これから

$$\begin{aligned} (1 + \beta(j^*) \rho/\sigma) \sigma z(j^*) &= \sum_{t=0}^{j^*-1} \{\alpha(t) \sigma z(t) \\ &\quad - \beta(t) \rho z(t)\} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

すなわち, $(1 + \beta(j^*) \rho/\sigma) \sigma z(j^*) \in R(j^*-1)$ を得る. $(1 + \beta(j^*) \rho/\sigma) > 1$ であり, $R(j^*-1)$ は, 0 を含む凸集合なので, $\sigma z(j^*) \in R(j^*-1)$ となるが, これは (A.16) 式に反する. よって

$$\sigma z(j^*) \in \mathcal{H}\{R(j^*-1), -\rho z(j^*)\} \quad (\text{A.19})$$

となり, $\sigma z(j^*)$ は R^* の端点であることが示された.

つぎに, $\sigma z(t)$, $t=0 \sim j^*-1$ も, R^* の端点であることを示そう. そのために, ある t ($0 \leq t \leq j^*-1$) について, $\sigma z(t)$ が端点でないと仮定する.

$$\sigma z(t) = \sum_{i=0}^{j^*} \alpha(i) \sigma z(i) - \sum_{i=0}^{j^*} \beta(i) \rho z(i) \quad (\text{A.20})$$

(A.20) 式の両辺に $(A^T)^{j^*-t}$ を掛けると

$$\begin{aligned} \sigma z(j^*) &= \sum_{i=0}^{j^*} \alpha(i) \sigma z(i + j^* - t) - \sum_{i=0}^{j^*} \beta(i) \\ &\quad \cdot \rho z(i + j^* - t) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

R^* は, A^T 不変であるので, $\sigma z(i + j^* - t) \in R^*$, $-\rho z(i + j^* - t) \in R^*$ である. $\sigma z(j^*)$ は端点なので, (A.21) 式右辺の点 $\sigma z(i + j^* - t)$, $-\rho z(i + j^* - t)$ の中に少なくとも一つ $\sigma z(j^*)$ に等しいものが存在する. (A.19) 式から, $i + j^* - t > j^*$ すなわち, $i - t > 0$ のとき発生する可能性があるが, $\sigma z(i + j^* - t)$ の中にあるとすると,

$$\sigma z(i + j^* - t) = \sigma z(j^*) \quad (\text{A.22})$$

より

$$(A^T)^{i-t} \sigma z(j^*) = \sigma z(j^*) \quad (\text{A.23})$$

となり, A が漸近安定であるという仮定に反する. また, $-\rho z(i + j^* - t)$ の中にあるとすれば

$$-\rho z(i + j^* - t) = \sigma z(j^*) \quad (\text{A.24})$$

より

$$(A^T)^{i-t} z(j^*) = -(\sigma/\rho) z(j^*) \quad (\text{A.25})$$

$(\sigma/\rho) \geq 1$ であるので, これも A の仮定に反する. すなわち, 定理の主張が証明された. $\square$

〈付録5〉 定理5の証明

(c^T, A) は可観測なので, つぎの行列 T が存在する.

$$T = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d^T \\ d^T A \\ \vdots \\ d^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

この関係から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d^T \\ d^T A \\ \vdots \\ d^T A^{n-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c^T T \\ c^T T A \\ \vdots \\ c^T T A^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T T \\ c^T A T \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} T \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

を得る. さらに上式から

$$\begin{aligned} c^T (TA) &= c^T (AT) \\ c^T A (TA) &= c^T A (AT) \\ &\vdots \\ c^T A^{n-1} (TA) &= c^T A^{n-1} (AT) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

を得る. (c^T, A) は可観測なので $TA=AT$ を得る. また,

$$z(d, t)^T = d^T A^t = c^T T A^t = c^T A^t T = z(c, t)^T T \quad (\text{A.29})$$

すなわち, ベクトル $z(d, t)$ は, $z(c, t)$ に T^T を作用させて得られる点であることから次式が成立する.

$$R^*(d, 1, \rho'/\sigma') = T^T R^*(c, 1, \rho/\sigma) = \frac{1}{\sigma} T^T R^*(c, \sigma, \rho) \quad (\text{A.30})$$

両辺に σ' を掛けることにより (32) 式を得る. $\square$

[著 者 紹 介]

吉 田 和 信 (正会員)

1985 年, 広島大学大学院工学研究科博士課程後期単位取得退学. 同年広島工業大学工学部機械工学科助手. 92 年同助教授, 現在に至る. 制御系設計法の研究に従事. 日本機械学会, システム制御情報学会, IEEE などの会員(工学博士).

川 辺 尚 志 (正会員)

1972 年, 広島大学工学研究科修士課程終了. 同年広島工業大学機械工学科助手. 現在同大学大学院機械システム工学専攻教授(工学博士). 制御工学および機械振動学を担当し, 日本機械学会, 精密工学会, 日本シミュレーション学会などの会員.

西 村 行 雄 (正会員)

1965 年, 大阪市立大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年大阪大学基礎工学部助手. 66 年同大学工学部助手. 69 年広島大学工学部講師となり現在に至る. 最適制御系の設計に関する研究に従事(工学博士).

米 澤 洋 (正会員)

1959 年, 京都大学大学院博士課程修了. 61 年九州工業大学助教授. 64 年同大学教授. 77 年広島大学工学部教授. 93 年福山大学工学部教授となり現在に至る. デジタル制御系の設計法などに関する研究に従事(工学博士).