中間標準システムの非干渉化条件に関する考察†

小林 伸明*・小 泉 信也*・中 溝 高 好**

A Study of Decoupling Conditions for Descriptor Systems

Nobuaki KOBAYASHI*, Shinya KOIZUMI* and Takayoshi NAKAMIZO**

This note is concerned with the decoupling problem for descriptor systems. A new necessary and sufficient condition is derived. The condition proposed in this study is more simple and useful as compared with that given by Ailon. Moreover it is applicable to derive a structural decoupling condition.

Key Words: multivariable control systems, descriptor systems, decoupling

1. はじめに

ディスクリプタシステムの非干渉化についてはいくつかの議論がなされている。特に中間変数のフィードバックで非干渉化を達成するための必要十分条件は Ailon によって示された¹⁾。しかしながらこの条件は、場合わけが煩雑で必ずしも使いやすい条件ではない。一方、文献 2) による条件は一つの条件でまとめられており無限零点の個数とも関係した条件であるため、構造条件⁴⁾の導出への拡張の可能性があるものの、条件の必要性は示されていない。そこで本小論では、文献 1) で示された非干渉条件と文献 2) の条件が、インパルス可制御の条件下で等価であることを示す。

2. 非干渉化問題

考察するシステムはつぎのディスクリプタシステム

$$E\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.1)$$

$$y = Cx$$

である。ここで、 $x \in R^n$ はディスクリプタ変数、 $y \in R^m$ は出力ベクトル、 $u \in R^m$ は入力ベクトルでありシステムのインパルス可制御性を仮定しておく。

ディスクリプタシステム(2.1)に対しディスクリプタ変数のフィードバック(proportional descriptor variable feedback; P. D. F.)

$$u = Fx + Gv \quad (2.2)$$

によって、対応する入出力間に 1 対 1 の関係を確立する

問題を扱う。(2.1)のシステムに対し P. D. F. (2.2) により閉ループ伝達関数が

$$H_c(s) = C(sE - A - BF)^{-1}BG \\ = \text{diag}(\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_m(s)) \quad (2.3)$$

$\phi_i(s)$: プロパーな有理関数

となるとき、P. D. F. 非干渉化可能であるといい、問題は P. D. F. 非干渉化のための条件を求めることである。この非干渉化条件については、文献 2) で十分条件が、文献 1) では必要十分条件が示されている。まずこれについて説明を行う。

3. 非干渉化条件

システム(2.1)は正則行列 P, Q を用いて

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ 0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 + C_2x_2 \quad (3.1)$$

とできる。ただし、 $\text{rank } E = r$ で

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, PAQ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\ CQ = [C_1 \ C_2], PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

であり、 x_1, x_2 は変換行列 Q によって

$$x = Q \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

とおいた。また、 M, N を正則な列または行の入れ換え行列とすると

$$PBM = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ I_{n-r} & B_2 \end{bmatrix}, NCQ = \begin{bmatrix} 0 & I_p & 0 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{C}_2 & 0 \\ \tilde{C}_3 & \tilde{C}_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

のようにできる。ここで $Mu = [u_{n-r} \ u_{m-(n-r)}]$ であり p は $\text{rank}[E^T \ C^T] = r + p$ で与えられる。また(3.3)の C の分割は以下のとおりである。

† システム制御情報学会講演会で発表(1992・5)

* 金沢工業大学 石川県金沢南局区内野々市町扇ヶ丘 7-1

** 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* Kanazawa Institute of Technology, Kanazawa

** The National Defence Academy, Yokosuka

(Received March 8, 1993)

$$\tilde{C}_1 \in R^{(n-r-p) \times r}, \tilde{C}_2 \in R^{(n-r-p) \times p}$$

$$\tilde{C}_2 \in R^{(m-(n-r)) \times r}, \tilde{C}_4 \in R^{(m-(n-r)) \times p}$$

(3.2)式で $\eta = (0^T \ y^T)^T$, $\mu = (x_2^T \ u^T)^T$ とおいて係数行列を

$$\mathcal{A} = A_{11}, \mathcal{B} = [A_{12} \ B_1]$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ C_1 \end{bmatrix}, \mathcal{D} = \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

で定義すれば、形式的に r 次元の状態方程式系

$$\dot{x}_1 = \mathcal{A}x_1 + \mathcal{B}\mu \quad (3.5a)$$

$$\eta = \mathcal{C}x_1 + \mathcal{D}\mu \quad (3.5b)$$

とみなせる。これを疑似状態方程式と呼ぶ。上式に μ を再構成する逆システム導出のための構造アルゴリズム³⁾を適用する、すなわち $\mathcal{C} = \mathcal{C}_0$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_0$ とおいて、Silverman のアルゴリズムに従いその微分をとればその μ の係数 $\mathcal{D}_k$ に対し

$$\alpha = \min \{k | \text{rank } \mathcal{D}_k = \text{rank } \mathcal{D}_{r-1}\} \quad (3.6)$$

なる整数 ($\mathcal{D}_k$ が最大ランクとなる最小のステップ数を示す) が定義できる。またその微分値 η_i について

$$\bar{\eta}_\alpha = \mathcal{C}_\alpha x_1 + \bar{\mathcal{D}}_\alpha \mu \quad (3.7)$$

$$\bar{\eta}_i = \mathcal{C}_i x_1 \quad (3.8)$$

なる関係を得る。ここでつぎの定理が成立する。

《定理1》 インパルス可制御条件を満足するシステム (E, A, B, C) が可逆であるとする。このとき (E, A, B, C) が P. D. F. 非干渉化可能である必要十分条件は $\text{rank } \hat{\mathcal{D}}_\beta = m$ とする

$$N_\beta(s) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & N_{\beta 2}(s) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

$$N_{\beta 2}(s) = \text{diag} (q_1(s), \dots, q_m(s))$$

なる微分オペレータ $N_\beta(s)$ が存在することである。ただし、 $\hat{\mathcal{D}}_i$ は $\mathcal{D}_i$ の右端 m 列からなる行列で、 β は $\text{rank } \hat{\mathcal{D}}_i = m$ となる最小ステップを表わし、 $q_i(s)$ は s の多項式である。

定理の必要性を示すため文献1)の結果を要約しておく。

《定理2》¹⁾

- 1) $\text{rank } [E \ B] = n$ とする。このときつぎの条件が P. D. F. 非干渉化の必要十分条件である。

- i) $m = n - r$ の場合

システム (E, A, B, C) が可逆

- ii) $m > n - r$ の場合

システム (E, A, B, C) が可逆で、システムの標準形(3.1)~(3.3)において

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + \tilde{B}_1 u_{m-(n-r)}; \ x_1 \in R^r$$

$$y^* = C_* x_1; \ y^* \in R^{m-(n-r)} \quad (3.10)$$

が非干渉化可能であり

$$C_\# = \begin{bmatrix} C_{\#1} \\ C_{\#2} \\ \vdots \\ C_{\#m-(n-r)} \end{bmatrix} \in R^{(m-(n-r)) \times r} \quad (3.11)$$

の各行 $C_{\#i}$ が

$$C_{\#i} A_{11}^{-1} A_{12} = 0, \ i = 1, 2, \dots, m-(n-r), \ j \leq d_i^* \quad (3.12)$$

を満足する。ただし d_i^* は(3.10)の相対次数、 $C_{\#i}$ は標準形(3.3)の出力方程式の係数行列である NCQ の下 $m-p$ 本の行から $m-(n-r)$ 本選んだ行列の i 行を $C_{\#i}$ とするとき次式で与えられる。

$$C_{\#i}^* = (C_{\#i} \ 0 \ \dots \ 0) \quad (3.13)$$

ただし、 $C_{\#i} \in R^{1 \times r}$ である。

- 2) $\text{rank } [E \ B] < n$ の場合

$$E^+ \dot{x}^+ = A^+ x^+ + B^+ u; \ x^+ \in R^q$$

$$y^+ = C^+ x^+; \ y^+ \in R^m \quad (3.14)$$

($m \leq q < n$) なるサブシステムが以下に示す三つの条件

- 1) $\text{rank } [E^+ \ B^+] = q$; つまり $[E^+ \ B^+]$ はフルランク
 2) $\det (sE - A) = \kappa \det (sE^+ - A^+)$; $\kappa \neq 0$
 3) $|sE - A - BK| \neq 0$ なる K に対し、次式が成立する K^+ が存在する。

$$C(sE - (A + BK))^{-1} B$$

$$= C^+(sE^+ - (A^+ + B^+ K^+))^{-1} B^+$$

を満足し、そのサブシステム (E^+, A^+, B^+, C^+) の標準形が $\text{rank } [E \ B] = n$ の場合の条件を満足する。

4. 条件の等価性(必要性の証明)

定理2から、定理1の必要性を示すためのいくつかの補題を導くことができる。

【補題1】 システムが定理2のi)の条件を満たしている、すなわち $\text{rank } [E \ B] = n$ で $m = n - r$ である場合 $\text{rank } \hat{\mathcal{D}}_\beta = m$

とするような微分オペレータ $N_\beta(s)$ は単位行列となる。(証明) 定理2のi)の条件が成立するとき $N_0(s) = I$ と選べば $\text{rank } \hat{\mathcal{D}}_0 = m$ が成立する。

【補題2】 システムが定理2のii)の条件を満足する、すなわち $\text{rank } [E \ B] = n$ で $m > n - r$ である場合 $\text{rank } \hat{\mathcal{D}}_\beta = m$

とするような、微分オペレータ $N_\beta(s) = \text{diag} (s^{\beta_1} \dots s^{\beta_m})$ が存在する。

(証明) 文献1)に従い定理2のii)の条件をもとに構成すると、疑似状態方程式は

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + [A_{12} \ 0 \ \tilde{B}_1] \mu$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{21} \\ 0 \\ \bar{C}_1 \\ \bar{C}_3 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} A_{22} I_{n-r} \bar{B}_2 \\ I_p & 0 & 0 \\ \bar{C}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mu \quad (4.1)$$

となる。ここで $\bar{C}_3$ が条件 ii) の C_* に対応する行列としても一般性は失わない、 $\bar{C}_3$ が条件 ii) の (3.10), (3.11), (3.12) 式を満足するから $\text{rank } \hat{D}_\theta = m$ とする微分オペレータ $N_\theta(s)$ が存在することがわかる。■

つぎに $\text{rank } [E B] < n$ の場合について考える。

$\text{rank } [E B] < n$ より, $\text{rank } [E B] = n - r_0$ と仮定すると, 文献 1) に示されるように正則行列 L, R より

$$[LER LB LAR] = \begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & \bar{E}_{12} & \bar{B}_1 & \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

とできる。ここで (2.1) が一意解をもつとすると, $|sE - A| \neq 0$ が成立するから, $|\bar{A}_{22}| \neq 0, \bar{A}_{22} \in R^{r_0 \times r_0}$ である。文献 1) ではインパルス可制御の仮定がないので順次この手順を繰り返しサブシステムを導出する必要がある。しかしインパルス可制御条件の下では, 1 回のサブシステムの導出手順で求められ繰返しは不要である。

【補題 3】 $(E A B)$ がインパルス可制御であれば, $\text{rank } \bar{E}_{11} = \text{rank } E$ が成立し, $\text{rank } [\bar{E}_{11} \bar{B}] = n - r_0$ となる。

(証明) インパルス可制御であるから, $u = Kx$ の中間変数フィードバックで

$$\deg \det(sE - A - BK) = \text{rank } E$$

とできる。 L, R は正則行列であるから

$$\begin{aligned} \deg \det(sLER - LAR - LBKR) \\ = \deg \det(sE - A - BK) \\ \deg \det \begin{bmatrix} s\bar{E}_{11} - \bar{A}_{11} - \bar{B}_1 \bar{K}_1 & s\bar{E}_{12} - \bar{A}_{12} - \bar{B}_1 \bar{K}_2 \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \\ = \text{rank } E \end{aligned} \quad (4.3)$$

ここで $\bar{A}_{22}$ は正則であるから

$$\deg \det(s\bar{E}_{11} - \bar{A}_{11} - \bar{B}_1 \bar{K}_1) = \text{rank } E \quad (4.4)$$

である。いま $\text{rank } \bar{E}_{11} < \text{rank } E$ とすると (4.4) 式に矛盾する。よって $\text{rank } \bar{E}_{11} = \text{rank } E$ である。さらに

$$\text{rank } [E B] = \text{rank}[\bar{E}_{11} \bar{B}] = n - r_0$$

も成立する。■

ここで $L[ER B AR]$ の R を適当に選べば

$$\begin{bmatrix} \bar{E}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$\det \bar{A}_{22} \neq 0$$

とできる。

(定理 1 の証明) 定理 1 の十分性はすでに示されている²⁾。必要性は定理 2 の条件が成立する下で $\text{rank } [E B] = n$ のとき, 補題 1, 補題 2 より直接定理 1 の条件の成立がいえる。さらにインパルス可制御条件が成立していれば補題 3 および (3.1), (3.2) 式のシステム変換によって, $\text{rank } [E B] = n - r_0 (< n)$ のとき,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{121} \\ \bar{A}_{113} & \bar{A}_{114} & \bar{A}_{122} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2 \ \bar{C}_3] x \quad (4.5)$$

と分割でき, $\det \bar{A}_{22} \neq 0$ であるから

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ \bar{K} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{113} & \bar{A}_{113} & \bar{A}_{122} \\ 0 & 0 & \bar{A}_{22} \\ \bar{C}_1 & \bar{C}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

とする $\bar{K}$ が存在する。これよりサブシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{113} & \bar{A}_{114} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \end{bmatrix} u$$

$$y = [\bar{C}_1 \ \bar{C}_2] x \quad (4.6)$$

は $\text{rank } [E B] = n$ の場合の条件 1), 2), 3) を満足する。さらにサブシステム (4.6) が定理 2 の $\text{rank } [E B] = n$ の場合の条件と同様の条件を満足していれば, $\text{rank } [E B] = n$ と同様に微分オペレータの存在が示せる。以上で定理 2 の条件が成立するとき定理 1 の条件の成立が示された。■

5. おわりに

本論文では, Ailon の示した非干渉条件と文献 2) の条件がインパルス可制御条件のもとで等価であることを示した。これによって煩雑な場合わけを必要としない非干渉条件が導かれた。定理 1 から一般的な構造条件⁴⁾を導出するのが今後の課題である。

参考文献

- 1) A. Ailon: Decoupling of Square Singular Systems Via Proportional State Feedback, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-36**-1, 95/102 (1991)
- 2) 小林, 神崎, 中溝: 中間標準システムの非干渉化について, 計測自動制御学会論文集, **26**-3, 293/299 (1990)
- 3) L. M. Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans., **AC-14**-3, 270/276 (1969)
- 4) 小林, 中溝: 一般線形システムの構造的な非干渉化条件, 第 21 回制御理論シンポジウム資料, 273/276 (1992)