閉ループ系の特性保存を考慮した周波数重みによるコントローラ低次元化†

長 堂 勤*・示 村 悦二郎**・石 田 力*・内 田 健康**

Controller Reduction with Frequency Weightings Maintaining the Closed-Loop Properties

Tsutomu NAGADO*, Etsujiro SHIMEMURA**,
Tsutomu ISHIDA* and Kenkou UCHIDA**

This paper introduces a controller reduction method which considers preserving closed-loop properties. We regarded the reduction problem as a frequency weighted approximation problem and derived the weightings for maintaining the properties.

Key Words: controller reduction, frequency weightings, closed-loop properties

1. はじめに

制御系設計の結果得られたコントローラの代わりに低次元近似されたコントローラを使用する場合、設計の際に注目した閉ループ特性を保持することが望ましい。たとえば制御系設計において感度関数のループ成形を行った場合、低次元コントローラを用いた場合もその感度特性を保持していることが望ましい。本報告ではそのような閉ループ特性の保存を考慮したコントローラの低次元化について考える。

Enns¹⁾ はコントローラ低次元化の際に閉ループ系の安定性を考慮するため周波数重みを付加することを提唱し、周波数重み付き平衡実現法による低次元化法を提案した。また Anderson, Liu²⁾ は閉ループ伝達関数を考慮した周波数重みを提案している。本報告では制御系設計の際、評価指標となることの多い感度関数、整定関数といった閉ループ特性について、それらの保存を考慮するための周波数重みを導出する。これら周波数重みを用いることにより制御系設計と結び付いたコントローラ低次元化が可能となる。また不安定なコントローラについても効果的に低次元化を行うため、既約分解表現を用いた場合の周波数重みも求めている。最後に数値例により提案した周波数重みの効果を確認する。

2. 閉ループ特性保存のための周波数重み

線形時不変システムについて考える。Fig. 1 の閉ループ系において、二つの入力 u_1 , u_2 、二つの出力 e_1 , e_2 より以下の四つの伝達関数行列が定義できる ('(s)' は省略する)。

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I-CP)^{-1} & C(I-PC)^{-1} \\ P(I-CP)^{-1} & (I-PC)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ := \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

これらの伝達関数は閉ループ特性を示す指標とみなすことができ、制御系設計においてもこれらに注目することが多い。そこでコントローラ低次元化において、これら伝達関数特性を保存することを考える。今、プラント入力側の感度関数 W_{11} について取り上げる。低次元コントローラ C_r を用いたときの感度関数を $\tilde{W}_{11}$ とすると、その特性保存を図るということは伝達関数の差 $\tilde{W}_{11} - W_{11}$ の何らかの norm をできるだけ小さくするようにコントローラを低次元近似する問題としてとらえることができる。ここでは周波数重み付き低次元近似問題として扱うことを考える。感度関数の差を以下のように変形

Fig. 1 Closed-loop system

† 第 34 回自動制御連合講演会で発表(1991・11)

* 琉球大学工学部 沖縄県中頭郡西原町字千原 1

** 早稲田大学理工学部 東京都新宿区大久保 3-4-1

* Faculty of Engineering, University of the Ryukyus, Nakagami-gun, Okinawa

** School of Science and Engineering, Waseda University, Shinjuku-ku, Tokyo
(Received May, 13, 1992)
(Revised August 6, 1992)

Table 1 Frequency weightings for conventional representation

Transfer functions	Error repre.	Input weightings	Output weightings
W_{11}	$C_r - C$	$P(I - CP)^{-1}$	$(I - CP)^{-1}$
W_{12}	$C_r - C$	$(I - CP)^{-1}$	$(I - CP)^{-1}$
W_{21}	$C_r - C$	$P(I - CP)^{-1}$	$P(I - CP)^{-1}$
W_{22}	$C_r - C$	$(I - CP)^{-1}$	$P(I - CP)^{-1}$

する.

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{11} - W_{11} &= (I - C_r P)^{-1} - (I - CP)^{-1} \\ &= (I - CP)^{-1} \{I - (C_r - C)P(I - CP)^{-1}\}^{-1} \\ &\quad \cdot (C_r - C)P(I - CP)^{-1}\end{aligned}$$

制御系設計の結果得られた閉ループ系においてはコントローラの変動に対し、十分なロバスト安定性をもつものと仮定する. すなわち $\|(C_r - C)P(I - CP)^{-1}\|_\infty < 1$ と仮定すると上式は展開でき、コントローラの誤差 $C_r - C$ に対し 2 次以降の項を無視することにより以下の近似式が得られる.

$$\tilde{W}_{11} - W_{11} \approx (I - CP)^{-1}(C_r - C)P(I - CP)^{-1}$$

ここで上式の右辺をみると入力重みを $P(I - CP)^{-1}$ 、出力重みを $(I - CP)^{-1}$ とした周波数重み付き低次元近似問題として扱えば、感度関数の差を小さくできることがわかる. 同様に W_{12} , W_{21} , W_{22} について周波数重みを求めると **Table 1** のようになる.

3. 既約分解表現を用いた場合の周波数重み

プラント P を以下のように既約分解する.

$$P = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

P を安定化するコントローラ C を同様に既約分解する.

$$C = UV^{-1} = \tilde{V}^{-1}\tilde{U}$$

ただし以下のような関係式を満足しているものとする.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M & U \\ N & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{V} & -\tilde{U} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Liu, Anderson^{2),3)} は不安定なコントローラについても有効にコントローラの低次元化を行うため既約分解表現を用いることを提案している. これは左既約分解表現の場合、安定なシステム

$$\tilde{C} = [\tilde{V} \ \tilde{U}]$$

に対して低次元近似モデル

$$\hat{C}_r = [\tilde{V}_r \ \tilde{U}_r]$$

を求め、低次元コントローラ C_r を以下のようにするものである.

$$C_r = \tilde{V}_r^{-1}\tilde{U}_r$$

C_r を得る際の周波数重みについて考える. 前章と同様

Table 2 Frequency weightings for fractional representation

Transfer functions	Error repre.	Input weightings	Output weightings
W_{11}	$[\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}]$	$\begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} \tilde{N}$	M
W_{12}	$[\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}]$	$\begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} \tilde{N}$	N
	$\begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{bmatrix}$	$\tilde{N}$	$N[\tilde{V} - \tilde{U}]$
W_{21}	$\begin{bmatrix} \Delta U \\ \Delta V \end{bmatrix}$	$\tilde{M}$	$N[\tilde{V} - \tilde{U}]$
	$[\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}]$	$\begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} \tilde{M}$	M
W_{22}	$\begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta U \end{bmatrix}$	$\tilde{M}$	$N[\tilde{V} - \tilde{U}]$

に感度関数 W_{11} を取り上げる.

$$\begin{aligned}\tilde{W}_{11} - W_{11} &= (I - C_r P)^{-1} - (I - CP)^{-1} \\ &= M \left(I - [\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] \begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix} \right)^{-1} (\tilde{V} + \Delta \tilde{V}) - M \tilde{V} \\ &= M \left(I - [\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] \begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix} \right)^{-1} [\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] \begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} \tilde{N}\end{aligned}$$

ただし

$$[\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] := [\tilde{V}_r \ \tilde{U}_r] - [\tilde{V} \ \tilde{U}]$$

ここで

$$\left\| [\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] \begin{bmatrix} M \\ -N \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1$$

と仮定すると以下の近似式が得られる.

$$\tilde{W}_{11} - W_{11} \approx M [\Delta \tilde{V} \ \Delta \tilde{U}] \begin{bmatrix} -U \\ V \end{bmatrix} \tilde{N}$$

上式より C_r を求める際の周波数重みが得られる. 同様に W_{12} , W_{21} , W_{22} について求めると **Table 2** のようになる. なお、右既約分解表現を用いた場合は近似誤差を以下のように表す.

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ \Delta U \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} V_r \\ U_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix}$$

ただし $\begin{bmatrix} V_r \\ U_r \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} V \\ U \end{bmatrix}$ の低次元モデルである.

4. 数 値 例

文献 4) の例題 (6 次, 2 入力 2 出力) を用いる. プラント (A_p, B_p, C_p) の出力側でリカバリを行う LQG/LTR コントローラを構成する. このときのコントローラは以下のとおりである.

$$C(s) = -F(sI - A_p + B_p F + L C_p)^{-1} L$$

ただし, $F = R_r^{-1} B_p P_r$, $L = P_f C_p R_f^{-1}$, また P_r , P_f については以下のリカッチ方程式の解である.

$$P_r A_p + A_p^T P_r - P_r B_p^T R_r^{-1} B_p^T P_r + Q_r = 0$$

Fig. 2 σ -plots of sensitivity function

$$A_p P_f + P_f A_p^T - P_f C_p^T R_f^{-1} C_p P_f + Q_f = 0$$

重み行列については以下のとおりである。

$$Q_c = C_p^T C_p + q C_p^T C_p, \quad R_c = I$$

$$Q_f = B_p B_p^T, \quad R_f = I$$

ここで $q=10^7$ とした。周波数重みについては Table 2 の出力側感度関数 W_{22} の保存を考慮したものを用いる。なお既約分解表現については Nett ら⁵⁾ の表現を用いる。上で得られたコントローラを、周波数重み付き平衡実現法により 4 次到低次元化したときの感度関数の σ プロットを Fig. 2 に示す。比較のため、周波数重みを用いずに低次元化を行ったものについても求めている。Fig. 2 より今回提案した方法の場合、もとのコントローラのもつ

低感度特性をよく保存していることが確認できる。

5. おわりに

本報告ではコントローラ低次元化を周波数重み付き近似問題としてとらえ、閉ループ特性保存を考慮するための周波数重みを導出し、それにより低次元コントローラを得ることを提案した。また、不安定なコントローラについても有効に低次元化を行うため、既約分解表現を用いた場合についても周波数重みを導出している。今後は閉ループ系特性保存のみでなく安定性について同時に考慮することが課題である。

参考文献

- 1) D. F. Enns: Model Reduction for Control System Design, Ph. D. Dissertation, Dep. Aeronaut. Astronaut., Stanford Univ., Stanford, CA (1984)
- 2) Y. Liu and B. D. O. Anderson: Controller Reduction via Stable Factorization and Balancing, Int. J. Control, **44**-2, 507/531 (1986)
- 3) B. D. O. Anderson and Y. Liu: Controller Reduction: Concepts and Approaches, IEEE Transactions on Automatic Control **AC-34**-8, 802/812 (1989)
- 4) M. G. Safonov, A. J. Laub and G. L. Hartmann: Feedback Properties of Multivariable Systems; The Role and Use of the Return Difference Matrix, IEEE Trans., **AC-26**-1, 47/65 (1981)
- 5) C. N. Nett, C. A. Jacobson and M. J. Balas: A Connection between State-Space and Doubly Coprime Fractional Representations, IEEE Trans., **AC-29**-9, 831/832 (1984)