H_∞ 制御による PWM インバータの高調波抑制†

松下 昭彦*・土谷 武士*

Design of PWM Inverter Using H_∞ Control

Akihiko MATSUSHITA* and Takeshi TSUCHIYA*

Design of PWM inverter pulse pattern is required to reduce harmonics generated by load change in output voltage. This paper shows this requirement is formulated as mixed sensitivity problem and proposes to apply H_∞ control theory to this design.

Key Words: PWM inverter, H_∞ control, mixed sensitivity problem, pulse pattern design

1. はじめに

電動機の変速運転や無停電電源などに用いられる PWM インバータを、システム制御理論の立場から設計する方法が提案されているが、負荷変動などのパラメータ変動による高調波の発生が問題になる。そこで、2 次形式評価関数に周波数依存荷重を取り入れた最適サーボ系設計法を PWM インバータの入力パルスパタン設計に用いることにより、高調波を抑制する方法が提案された¹⁾。しかし、PWM インバータ設計が、低周波域での低感度特性と高周波域でのロバスト安定性が求められる混合感度問題であることに着目すると、この方法では周波数依存荷重の分子多項式が高々 1 次という制限があるため、低周波域と高周波域の両方の要求をこの周波数依存荷重だけで満たすのは困難である。

本論文では、PWM インバータ設計問題が混合感度問題になることを示し、感度の低減とロバスト安定性とのトレードオフを周波数領域で実現可能な H_∞ 制御理論をこの設計問題に適用することを提案し、シミュレーションにて有効性を確認する。

2. PWM インバータシステム

Fig. 1 に示す、電源+スイッチ+フィルタ+負荷よりなる単相 PWM インバータの状態方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_0(t) \\ i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1/C, & -1/C \\ -1/L, & 0, & 0 \\ 1/L_0, & 0, & -R_0/L_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0(t) \\ i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + [0, 1/L, 0]^T V_i(t)$$

$$V_0 = [1, 0, 0]^T [V_0(t), i_1(t), i_2(t)]^T$$

$$\text{ただし, } C, L, R_0 > 0, L_0 \geq 0 \quad (1)$$

3. 混合感度問題

ここでは、インバータの設計問題が混合感度問題になることを説明する。制御対象は負荷を含んでいるため、負荷変動などに対する、感度の低減、高調波の抑制およびロバスト安定性を考える必要がある。まず、負荷変動がない場合、制御対象((1)式)の入力-出力間伝達関数 $P(s)$ は次式となり、(1)式の条件より安定である。

$$P(s) = \frac{L_0 s + R_0}{CL_0 L s^3 + CL R_0 s^2 + (L + L_0)s + R_0} \quad (2)$$

負荷が $R_0 \rightarrow R_0^*$, $L_0 \rightarrow L_0^*$ (ただし, $R_0^* > 0$, $L_0^* \geq 0$) に変動したとすると、変動後の入力-出力間伝達関数 $P^*(s)$ は以下のように表わせる。

$$P^*(s) = (1 + P_m(s))P(s) \quad (3)$$

ただし, $P_m(s)$ は剰余的変動で次式となる。

$$P_m(s) = \frac{L(L_0^* - L_0)s^2 + L(R_0^* - R_0)s}{\{CL_0^* L s^3 + CL R_0^* s^2 + (L + L_0^*)s + R_0^*\}(L_0 s + R_0)} \quad (4)$$

(1)式と $R_0^* > 0$, $L_0^* \geq 0$ の条件より $P_m(s)$ は安定である。

インバータの入力パルスパタンの導出に等価面積変換法²⁾を用いるためには、制御系は離散時間系である必要がある。そこで、双一次変換による仮想領域 λ での離散時間制御系設計法³⁾を用いる。

V_i : Input, V_0 : Output

Fig. 1 Single phase PWM inverter system

† 第 24 回計測自動制御学会北海道支部学術講演会で発表 (1992・2)

* 北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8

* Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo (Received March 12, 1992)

(Revised August 14, 1992)

$P(s)$, $P(s)P_m(s)$ および $P^*(s)$ を零次ホールドを用いて離散化した伝達関数をそれぞれ $P_d(z)$, $PP_{md}(z)$ および $P_d^*(z)$ とすると, $P_d^*(z)$ は次式のように表わせる.

$$P_d^*(z) = (1 + P_{mx}(z))P_d(z)$$

ただし, $P_{mx}(z) = P_d^{-1}(z)PP_{md}(z)$ (5)

$P(s)$ と $P_m(s)$ が安定なので $PP_{md}(z)$ は安定であり, $P_d(z)$ が不安定零点をもたないなら, 乗法的変動 $P_{mx}(z)$ は安定な変動である. $P_d(z)$, $P_{mx}(z)$, $P_d^*(z)$ を双一次変換 ($z \rightarrow \chi$) で変換した伝達関数を $\tilde{P}(\chi)$, $\tilde{P}_{mx}(\chi)$, $\tilde{P}^*(\chi)$ とする.

$$\text{双一次変換 } (z \rightarrow \chi) z = \frac{(2/T) + \chi}{(2/T) - \chi} \quad (6)$$

ただし, T : サンプル周期

この変換を施しても安定性は保たれるので, 乗法的変動 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$ は安定な変動である. また, 仮想領域の角周波数を ξ , 離散時間領域の角周波数を ω とするとつぎの関係がある³⁾.

$$\xi = (2/T) \tan(\omega T/2) \quad (7)$$

この対応関係を利用することにより, 離散時間制御系設計を仮想領域で考えることができる. 制御対象に対して, Fig. 2 に示す制御系を構成する. 制御対象に変動 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$ がないときの目標値信号 $R(t)$ -出力 $y(t)$ 間の伝達関数を $\tilde{G}_{yr}(\chi)$ とし, 変動がある場合を $\tilde{G}_{yr}^*(\chi)$ とすると, 感度 $\tilde{S}(\chi)$ は次式で表わされる.

$$\begin{aligned} \text{感度 } \tilde{S}(\chi) &= \frac{(\tilde{G}_{yr}^*(\chi) - \tilde{G}_{yr}(\chi)) / \tilde{G}_{yr}^*(\chi)}{(\tilde{P}^*(\chi) - \tilde{P}(\chi)) / \tilde{P}^*(\chi)} \\ &= 1 / (1 + \tilde{G}(\chi)) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, $\tilde{G}(\chi) = \tilde{K}(\chi)\tilde{P}(\chi)$

感度を小さくすることは, 変動 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$ による目標値-出力間の伝達関数の変動を小さくすることを意味する. また, 相補感度は以下のように表わせる.

$$\text{相補感度 } \tilde{T}(\chi) = \tilde{G}(\chi) / (1 + \tilde{G}(\chi)) \quad (9)$$

つぎに, 乗法的変動 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$ に対して次式を満たす有理関数 $\tilde{W}_2(\chi)$ があると仮定する.

$$|\tilde{P}_{mx}(j\xi)| < |\tilde{W}_2(j\xi)| \quad (\forall \xi) \quad (10)$$

さらに, 次式が成り立てば, 変動 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$ に対して制御系が安定であることが知られている.

$$\|\tilde{W}_2(\chi)\tilde{T}(\chi)\|_\infty < 1 \quad (11)$$

また, (9) 式で, $|\tilde{T}(j\xi)| \ll 1$ が成り立つ場合, 次式となる.

$$\tilde{G}(j\xi) = \tilde{T}(j\xi) / (1 - \tilde{T}(j\xi)) \cong \tilde{T}(j\xi) \quad (12)$$

$\tilde{K}(\chi)$: Controller, $\tilde{P}(\chi)$: Controlled object
 $\tilde{P}_{mx}(\chi)$: Perturbation, R : Desired signal, y : Output
 Fig. 2 Control system structure

したがって, 相補感度を高周波域で小さくすることによって, 振幅減少が高まり, 高調波が抑制される. しかし, $\tilde{S}(\chi) + \tilde{T}(\chi) = 1$ の関係があるため, 感度低減化と相補感度低減化は同じ周波数域で両立しない. そこで, インバータの目標値が比較的低周波域であり, 高周波域で高調波が問題になることに着目すると, PWM インバータの設計問題は, 低周波域で感度の低減化, 高周波域で相補感度の低減化をはかる混合感度問題であることがわかる. 以上の要求をつぎのような仕様に組み込む.

$$\|\tilde{\Phi}(\chi)\|_\infty = \left\| \gamma \frac{\tilde{W}_1(\chi)\tilde{S}(\chi)}{\tilde{W}_2(\chi)\tilde{T}(\chi)} \right\|_\infty < 1 \quad (13)$$

ただし, $\tilde{W}_1$ は感度の重みを表わす有理関数で, γ はスカラーである.

4. 制御系の構成

仮想領域での制御系と離散時間制御系との対応関係を考慮した, 以下の制御系構成法が知られている³⁾.

① (7) 式を考慮して, $\tilde{W}_1(\chi)$ は ω の低周波域, $\tilde{W}_2(\chi)$ は高周波域にあたる ξ の領域で大きな値をとるように選択する. たとえば, 以下のように選ぶ.

$$\tilde{W}_1(\chi) = \frac{0.002\xi_1\chi}{\chi^2 + 0.002\xi_1\chi + \xi_1^2} \quad (14)$$

$$\tilde{W}_2(\chi) = \frac{(5200 - \xi_2)\chi}{\xi_2\chi + 5200\xi_2} \quad (15)$$

(7) 式より, 感度が低周波域 $\omega = \omega_1$ で小さくなるように ξ_1 を, 相補感度が高周波域 ($\omega \geq \omega_2$) で小さくなるように ξ_2 をもとめる. 以下では, (14), (15) 式のように $\tilde{W}_1$, $\tilde{W}_2$ が選ばれたものとして説明する.

② $\tilde{P}(\chi)$ に対しての混合感度問題を一般化制御対象の H_∞ サーボ系構成問題に置き換え, 仮想領域での制御器 $\tilde{K}(\chi)$ を導出⁹⁾ する.

③ $\tilde{K}(\chi)$ に次式の変換をして, 離散時間制御器 $K(z)$ を導出する.

$$\text{双一次変換 } (\chi \rightarrow z) \chi = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (16)$$

この変換を施しても, 制御系の安定性は保たれ, さらに仮想領域での感度 $\tilde{S}(j\xi)$, 相補感度 $\tilde{T}(j\xi)$ は, (7) 式によって離散時間制御系の感度 $S(j\omega)$, 相補感度 $T(j\omega)$ に写像される. 特に, $S(j\omega_1) = \tilde{S}(j\xi_1)$ となり, $\xi \geq \xi_2$ での相補感度の周波数特性は, $\omega \geq \omega_2$ での相補感度の周波数特性に写像され, 離散時間制御系の低周波域での感度の低減化, 高周波域での相補感度の低減化が実現される.

5. シミュレーション

サンプル周期を $T = 666.66 [\mu\text{s}]$, Fig. 1 の各定数を $E = 50 [\text{V}]$, $L = 0.64 [\text{mH}]$, $C = 1590 [\mu\text{F}]$, $R_0 = 2 [\Omega]$, L_0

Fig. 3 Sensitivity (S), complementary sensitivity (T) of control system

$=0.05$ [mH] とする。離散化した制御対象の零点は $z=-2.20 \times 10^{-5}$, -0.932 であるので, 不安定零点をもたない。

H_∞ 制御器の計算は制御系設計 CAD である PC-9800 用の PC-MATLAB⁵⁾ に用意されている Glover, Doyle⁶⁾ の方法で行った。また, (13) 式の γ は 474.5 を選び, $\omega_1 = 2\pi 50$ [rad/s], $\omega_2 = 2\pi 150$ [rad/s] を選んだ。

Fig. 3 に, 仮想領域での $(\gamma \tilde{W}_1(z))^{-1}$, $\tilde{W}_2(z)^{-1}$ を (16) 式で変換した $(\gamma W_1(z))^{-1}$, $W_2(z)^{-1}$, 離散時間制御系の感度 $S(z)$ および相補感度 $T(z)$ のゲイン特性を示す。低周波域での感度の低減化, 高周波域での相補感度の低減化が実現されている。

Fig. 4 に 50 [Hz] 30 [V] の目標値を加えた場合のシミュレーション結果を示す。 $t=25T$ [sec] で負荷変動を与えた。また, 比較のため, 従来の LQ 最適制御によるインバータ設計の例を示す。制御対象を T で離散化し, エラーシステムを導出し, 最適サーボ系を設計した⁷⁾。評価関数 J はつぎのように選んだ (Δ は一階後退差分を示す)。

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} \{90(R(k)-y(k))^2 + 0.01(\Delta V_i(k))^2\} \quad (17)$$

H_∞ 制御の場合と同様なシミュレーションの結果を Fig. 5 に示した。Fig. 4 と Fig. 5 を比較して, H_∞ 制御が高調波を抑制するのに有効であることがわかる。

R: Desired signal, V_0 : Output, V_i : Input
Fig. 4 System response (H_∞ control)

R: Desired signal, V_0 : Output, V_i : Input
Fig. 5 System response (LQ control)

6. おわりに

単相 PWM インバータのパルスパターン設計問題が混合感度問題になることを示し, H_∞ 制御により, 負荷変動などに対して, 感度が低減され, 従来の LQ 最適制御で制御した場合に比べて高調波が抑制され, かつ, ロバスト安定性が得られることを示し, シミュレーションで有効性を確認した。

参考文献

- 1) 江上, 漆畑, 土谷: 周波数依存デジタル最適サーボ系とその応用, 計測自動制御学会論文集, 28-2, 290/292 (1992)
- 2) 江上, 土谷: 予見サーボ系を用いた PWM インバータパルスパターンの設計, 計測自動制御学会論文集, 26-3, 315/322 (1990)
- 3) 荒木光彦: デジタル制御理論入門, 139/146, システム制御情報学会 (1991)
- 4) 杉江俊治: サーボ系の設計理論と H_∞ 制御性能, システム制御情報学会誌, 35-2, 80/87 (1991)
- 5) R. Y. Chiang and M. G. Safonov: Robust-Control Toolbox, The Math Works, Inc. (1988)
- 6) K. Glover and J. C. Doyle: State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ -Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems & Control Letters, 11-3, 167/172 (1988)
- 7) 土谷, 江上: 現代制御工学, 160/162, 産業図書 (1991)