伝達行列の左分解表現に基づくモデルマッチング系の一構成法

加 瀬 渡*

A Design of Model Matching Control Systems Based on Left Fraction Description of Transfer Function Matrix

Wataru KASE*

In the design of model matching control systems based on left fraction descriptions of a given transfer function matrix, some dynamics are added to solve the design equations. This note presents a design procedure which need not such an additional dynamics. Division algorithm of polynomial matrices given by Wolovich is extended for this.

Key Words: linear multivariable systems, matrix-fraction descriptions, model matching, division of polynomial matrices

1. ま え が き

伝達行列の左分解表現に基づくモデルマッチング系の構成は、間接法タイプの適応制御系を構成する上で重要である。このようなモデルマッチング系を構成する際、多項式行列のある種の右からの割算が必要である^{1),2)}。多項式行列の右からの割算は、左分解表現の分母多項式行列 $\tilde{P}(s)$ が列プロパーである場合には定義できるが、一般に $\tilde{P}(s)$ は列プロパーではない。そこで、文献 1), 2) では $D(s)\tilde{P}(s)$ が列プロパーとなるように制御対象の分母子に適当なダイナミクス $D(s)$ を付加して設計方程式が解かれる。このようにして設計した場合、当然得られる補償器の次数も高くなるため好ましくない。

本稿では、文献 3) で提案されている多項式行列の割算アルゴリズムを再検討し、分母多項式行列 $\tilde{P}(s)$ が行プロパーの場合でも適用できる形に拡張する。この方法は、 $\tilde{P}(s)$ が列プロパーな場合は、右割算の商と剰余を与える。そして、これを用いて余分なダイナミクスを付加する必要のない左分解表現に基づくモデルマッチング系の一構成法を示す。

2. 問題の設定と設計方程式の導出

次式で与えられる制御対象を考える。

$$y(s) = T(s)u(s) = R(s)P^{-1}(s)u(s)$$

$$= \tilde{P}^{-1}(s)\tilde{R}(s)u(s) \quad (1)$$

ここで、 $u(s), y(s)$ は制御対象の入出力で共に p 次元、 $T(s)$ は制御対象の伝達関数行列で厳密にプロパー、正則とする。また、 $P(s), \tilde{P}^T(s)$ は列プロパーであるとする。

制御目的は、 $T(s)$ を同じサイズの希望する安定な伝達行列 $T_m(s)$ に漸近的に一致させるような一様有界入力を発生させることである。このために以下の仮定が必要である。

A1) $T(s)$ は最小位相系 ($\det R(s), \det \tilde{R}(s)$ は漸近安定多項式)。

A2) $\xi(s)T_m(s)$ はプロパー、ただし、 $\xi(s)$ は $\lim_{s \rightarrow \infty} \xi(s)T(s) = G$ (nonsingular)

を満たす漸近安定多項式行列である。ここで、制御対象の既約性に関する仮定は、仮定 A 1) があるため必要ない。

モデルマッチング補償器は、以下の Diophantine 方程式を解くことで得られることが知られている¹⁾。

$$K(s)P(s) + H(s)R(s) = Q(s)[P(s) - G^{-1}\xi(s)R(s)] \quad (2)$$

ここで、 $Q(s)$ は制御対象の可観測指数の最大値 ν に対して、その行次数が $\nu-1$ 次の行プロパー漸近安定行列である。(2) 式は (1) 式を用いると以下のように変形できる。

$$[H(s) + Q(s)G^{-1}\xi(s)]^{-1}[Q(s) - K(s)] = \tilde{P}^{-1}(s)\tilde{R}(s) \quad (3)$$

$\xi(s)$ の最大次数を d とすると、上式より高々 $d-1$ 次の多項式行列 $L(s)$ が存在して

* 静岡理科大学理工学部 袋井市豊沢 2200-2

* Faculty of Science and Technology, Shizuoka Institute of Science and Technology, Fukuroi
(Received July 8, 1992)
(Revised October 29, 1992)

$$Q(s)G^{-1}\xi(s)=L(s)\tilde{P}(s)-H(s) \quad (4)$$

$$L(s)\tilde{R}(s)=Q(s)-K(s)$$

を満たすことがわかる。ここで、 $\tilde{P}(s)$ は行プロパーなので、一般に $H(s)\tilde{P}^{-1}(s)$ がプロパーとはならず、したがって多項式行列の Division Algorithm に類した手法で (4) 式を解くことができないわけである。

3. Division Algorithm の拡張

s を微分演算子、ラプラス演算子を共に表わすものとし、制御対象の初期状態を 0 と仮定する。 $\tilde{P}(s)$ は行プロパーだから、 $\tilde{P}^{-1}(s)$ の可観測正準実現 (A_0, B_0, C_0) を容易に得ることができる。この実現を用いた $z(s) = \tilde{P}^{-1}(s)u(s)$ の状態方程式

$$\begin{aligned} sx(s) &= A_0x(s) + B_0u(s) \\ z(s) &= C_0x(s) \end{aligned} \quad (5)$$

において、任意の $f \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} Sf(s)z(s) &= \mathcal{O}_f x(s) \\ &\quad + T_{f-1}Sf^{-1}(s)\tilde{P}(s)z(s) \end{aligned} \quad (6)$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} Sf(s) &= [I \quad sI \quad \cdots \quad s^f I]^T \\ \mathcal{O}_f &= \begin{bmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{f-1} \end{bmatrix} \\ T_{f-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_0 B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ C_0 A_0 B_0 & C_0 B_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_0 A_0^{f-1} B_0 & C_0 A_0^{f-2} B_0 & \cdots & C_0 B_0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

である。

(6) 式において、 $f = \nu - 1$ のときを考えて、 $\hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}$ を $\mathcal{O}_{\nu-1}$ から線形独立行を抜き出した行列、 W を

$$W\mathcal{O}_{\nu-1} = \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1} \quad (8)$$

と定義すると

$$x(s) = \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W [Sf^{-1}(s) - T_{\nu-2}Sf^{-2}(s)\tilde{P}(s)]z(s) \quad (9)$$

が成立するから、(6) 式に (9) 式を代入して $z(s)$ を消去すると

$$\begin{aligned} Sf(s) &= \mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W Sf^{-1}(s) \\ &\quad + [T_{f-1} - \mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W T^*] Sf^{-1}(s)\tilde{P}(s) \end{aligned} \quad (10)$$

ここで、 T^* は、 $T_{\nu-2}$ を $Sf^{-1}(s)$ のサイズに合わせるために適当に零列を挿入した行列である。 f を $N(s) = Q(s)G^{-1}\xi(s)$ の次数として

$$N(s) = NSf(s) \quad (11)$$

とすると、

$$N(s) = N\mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W Sf^{-1}(s) \quad (12)$$

$$+ N[T_{f-1} - \mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W T^*] Sf^{-1}(s)\tilde{P}(s)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} L(s) &= N[T_{f-1} - \mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W T^*] Sf^{-1}(s) \\ H(s) &= -N\mathcal{O}_f \hat{\mathcal{O}}_{\nu-1}^{-1} W Sf^{-1}(s) \end{aligned} \quad (13)$$

とする。

(注意) モデルマッチング問題を考える上では、 $\tilde{P}(s)$ の列プロパー性を仮定することは一般にはできない。しかし、上記の計算法自体は $\tilde{P}(s)$ が列プロパーでも (4) 式の多項式行列方程式の求解に利用することができる。しかもこの場合には、文献 3) の結果を含む、つまり $L(s)$ 、 $-H(s)$ は $N(s)$ を $\tilde{P}(s)$ で右から割ったときの商と剰余に一致する。いま $\tilde{P}(s)$ の i 番目の行次数を $\mu_i (i=1, \dots, p)$ とする。 $\tilde{P}(s)$ は列プロパーであるので、 $\tilde{P}^{-1}(s)$ の可制御正準実現 (A_c, B_c, C_c) を容易に得ることができる。この実現を用いて、(5)、(7) 式を定義し、上述の計算を行う。ここで、行交換行列 $\hat{W}$ を

$$\hat{W}\hat{\mathcal{O}} = \begin{bmatrix} c_{c1} \\ c_{c1}A_c \\ \vdots \\ c_{c1}A_c^{\mu_1-1} \\ \vdots \\ c_{cp}A_c^{\mu_p-1} \end{bmatrix} = I \quad (14)$$

とすると、 W は $\hat{W}$ の列に可制御指数個ごとに適当に零列を挿入した行列であり、 $\mu_i \leq \nu$ のとき

$$W Sf^{-1}(s) = \text{block diag}\{1, s, \dots, s^{\mu_i-1}\}^T \quad (15)$$

が成立し、文献 3) と同じ結果が得られる。また、 $\mu_i > \nu$ なる i が存在するときは

$$\partial_{ci}[Sf^{-1}(s)] = \nu - 1 \leq \mu_i = \partial_{ci}[\tilde{P}(s)] \quad (16)$$

なので、商と剰余の一意性から文献 3) の結果と一致する。ここで、 $\partial_{ci}[P(s)]$ は $P(s)$ の i 番目の列次数を表わす。

4. モデルマッチング系の構成

(13) 式に示すように (4) 式を計算して得られる $K(s)$ 、 $H(s)$ を用いて、モデルマッチング制御入力を次式のように定義する。

$$\begin{aligned} u(s) &= Q^{-1}(s)K(s)u(s) + Q^{-1}(s)H(s)y(s) \\ &\quad + G^{-1}\xi(s)T_m(s)v(s) \end{aligned} \quad (17)$$

ただし、 $v(s)$ は外部基準入力である。

《定理》 (17) 式で示す制御入力は実現可能で、これを用いることにより漸近的に $T(s) = T_m(s)$ が達成できる。

(証明) $\xi(s)T(s)$ は仮定より、 $Q^{-1}(s)H(s)$ は前章の議論よりプロパーである。 $\tilde{P}(s)y(s) = \tilde{R}(s)u(s)$ の両辺に左から $L(s)$ を乗じて、(4) 式を用いて整理すると、

$$\xi(s)y(s) = Gu(s) - GQ^{-1}(s)[K(s)u(s) + H(s)y(s)]$$

(1) 式から

$$\xi(s)T(s) = G - GQ^{-1}(s)[K(s) + H(s)T(s)]$$

上式で $s \rightarrow \infty$ を考えることにより, $Q^{-1}(s)K(s)$ が厳密にプロパーであることがわかる。したがって, (17) 式は実現可能である。

制御目的の達成は, 2 章の導出から文献 1) と同様なので省略する。

5. あとがき

本稿では, 余分なダイナミクスの導入を必要としない伝達行列の左分解に基づくモデルマッチング系の構成法

を示した。この目的のために, 多項式行列の割算を含む, 多項式行列方程式の解法を示した。

参 考 文 献

- 1) H. Elliott and W. A. Wolovich: Parameterization Issues in Multivariable Adaptive Control, *Automatica*, **20**-5, 533/545 (1984)
- 2) G. C. Goodwin and K. S. Sin: Adaptive Filtering, Prediction and Control, Prentice-Hall (1984)
- 3) W. A. Wolovich: Division Algorithm for Polynomial Matrices, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**-7, 656/658 (1984)