積分多様体と弱非線形制御系†

師 玉 康 成*・蔡 大 維*・江 口 正 義*・山 浦 弘 夫*

Integral Manifold and Weak Nonlinear Control System

Yasunari SHIDAMA*, Dawei CAI*,
Masayoshi EGUCHI* and Hiroo YAMAURA*

In this paper, we use the fixed point theorem to generate a set of sufficient conditions which confine the solutions of weak non-linear differential equations to a stable integral manifold. The obtained conditions are used in the solution of a weak non-linear optimal regulator problem. The necessary conditions for optimal control laws are expressed by the weak non-linear differential equations with state variable x and Lagrange's variable λ . By using the solution S of the Riccati equation, the sufficient conditions for obtaining the solution $\lambda(t)$ in a feedback form, $\lambda(t) = Sx(t) + p(x(t))$, are derived from the result of the integral manifold. The method for finding an approximate solution of $p(x)$ in an analytic form such as a Fourier series is introduced, and a new calculation algorithm is presented which applies the Newton method and other techniques. Simulations using the algorithm exhibit favorable results.

Key Words : optimal control, non-linear system, fixed point problem, integral manifold, feedback control

1. はじめに

定数行列 X を線形係数にもち、微小パラメータ ε をもつ弱非線形系

$$\dot{z}(t) = Xz(t) + \varepsilon Y(z(t)) \quad (1)$$

を考えよう。

$z(t)$ は l 次ベクトルで、 X は $l \times l$ 行列、 Y は l 次ベクトル値非線形関数とする。

X の固有値が虚軸上にないとする。 l 個の固有値のうち n 個が左半平面、 $m (= l - n)$ 個が右半平面にあるとする。そのとき、適当な座標変換を行えば、

l 次ベクトル $z(t)$ を

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$$

と分解し、それに対応して行列 X および非線形関数 Y をそれぞれ

$$X = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \theta \\ F \end{pmatrix}$$

と分解して微分方程式 (1) を

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \varepsilon \theta(x(t), h(t)) \quad (2)$$

$$\dot{h}(t) = \tilde{C}h(t) + \varepsilon F(x(t), h(t)) \quad (3)$$

と書き表わすことができる。(ただし $\tilde{A}$ 、 $-\tilde{C}$ は $n \times n$ 、 $m \times m$ 漸近安定な定数行列)

本稿の議論によれば、系 (2)、(3) についてある条件のもとで関数

$$p: R^n \rightarrow R^m$$

が存在し、この系の解曲線 $(x(t), h(t))$ は曲面 (積分多様体)¹⁾

$$\Omega = \{(x, p(x)) | x \in R^n\}$$

を構成する。すなわちこの系の解曲線の挙動は n 次ベクトル方程式

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t) + \varepsilon \theta(x(t), p(x(t)))$$

のみによって決定され、

$$(x(t), h(t)) = (x(t), p(x(t))) \quad t \in [0, \infty)$$

である。

この工学的有用性はたとえば系の次数の低次元化 (l 次から n 次) に計られることである。Kokotovic らは非線形回路の低次元化²⁾ にこのような考え方をういてゐる。また、周期解の解析、安定性などの解析にも有用で

† 回路とシステム軽井沢ワークショップなどで発表 (1989・5)

* 信州大学工学部 長野市若里 500

* Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano (Received May 14, 1992)

(Revised October 28, 1992)

あろう。

まず、第2章で、「無限時間で安定な積分多様体 $(x(t), p(x(t)))$ が存在する」という命題を、「ある関数空間上の写像が不動点 p をもつ」という等価な命題に変換する。この問題に不動点定理を適用し、安定な積分多様体が存在する十分条件が得られる。

第3章では、これを非線形最適制御問題に適用してフィードバック則の存在に関する興味深い結果を報告する。最適制御のための必要条件から得られる微分方程式の解が安定な積分多様体となったとき、制御則は非線形フィードバックとして得られる。

ついで第4章で積分多様体(フィードバック則)を求めた不動点問題の数値解法を提案する。これらの結果の有効性を検証するため、第5章で、具体的な非線形最適制御問題に適用する。

2. 積分多様体

つぎの連立微分方程式系を考察する。

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}h(t) + \varepsilon\theta(x(t), h(t)) \quad (4)$$

$$\dot{h}(t) = \bar{C}h(t) + \varepsilon F(x(t), h(t)) \quad (5)$$

ここで、 $x(t), h(t)$ はそれぞれ n, m 次ベクトルで $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ はそれぞれ $n \times n, n \times m, m \times m$ の定数行列とする。

この系について以下の仮定をおく。

(H0) $\bar{A}$ の固有値の実部は全て負であり、 $\bar{C}$ の固有値の実部は全て正である。

(H1) $\theta(y, v), F(y, v) : R^n \times R^m$ で連続、有界

(H2) 1. $\forall \sigma > 0, \exists L_\sigma^0 > 0$
 $(\forall y, y' \in R^n)(\forall v, v' \in R^m; |v|, |v'| \leq \sigma),$
 $|\theta(y, v) - \theta(y', v')| \leq L_\sigma^0(|y - y'| + |v - v'|)$ (6)

2. $\forall \sigma > 0, \exists L_\sigma^1 > 0$
 $(\forall y, y' \in R^n)(\forall v, v' \in R^m; |v|, |v'| \leq \sigma)$
 $|F(y, v) - F(y', v')| \leq L_\sigma^1(|y - y'| + |v - v'|)$ (7)

(H3) σ について単調増加な $N(\sigma)$ が存在し、

$(\forall \sigma > 0)(\forall y \in R^n)(\forall v \in R^m; |v| \leq \sigma)$
 $|F(y, v)| \leq N(\sigma)$ (8)

この系に積分多様体¹⁾の理論を適用するとつぎの定理を得る。

《定理》 仮定(H0), (H1), (H2), (H3)が成り立つものとする。このとき $\varepsilon_0 > 0$ が存在し、パラメータ $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ をもつ系(4), (5)について;

関数 $q : x \in R^n \mapsto q(x) \in R^m$ が存在し、任意の x の初期値 $x(s) = \xi$ に対し、 h の初期値を $\sqrt{\varepsilon} q(\xi)$ にとると、つぎの関係式が成り立つ。

$$\forall t \in [s, \infty); h(t) = \sqrt{\varepsilon} q(x(t)) \quad (9)$$

すなわち、系(4), (5)は初期値を曲面(積分多様体)

$$\Omega = \{(x, \sqrt{\varepsilon} q(x)) \mid x \in R^n\}$$

のなかにとると、解も Ω に無限時間にわたって拘束される。ここで、 q は以下のような関数の集合 $S_n^m(D, \Delta)$ の元である。

$$S_n^m(D, \Delta) \triangleq \{p \mid p \in C(R^n, R^m), \|p\| \leq D,$$

$$\forall y, y' \in R^n, |p(y) - p(y')| \leq \Delta |y - y'|\}$$

ただし、

$$C(R^n, R^m) \triangleq \{p \mid R^n \rightarrow R^m, \text{有界, 連続}\}$$

で、ノルムは

$$\|p\| \triangleq \sup_{y \in R^n} |p(y)|$$

D, Δ は任意の固定した正数

(証明) 不動点定理³⁾による。まず、(H0)により正の定数 M_1, k_1, M_2, k_2 があってそれぞれ

$$\forall t, \tau; t \geq \tau; t, \tau \in [0, \infty)$$

$$|e^{\bar{A}(t-\tau)}| \leq M_1 e^{-k_1(t-\tau)}$$

$$|e^{\bar{C}(\tau-t)}| \leq M_2 e^{-k_2(t-\tau)}$$

ゆえに、 $M = \max\{M_1, M_2\}, k = \min\{k_1, k_2\}$ とおくと

$$\forall t, \tau; t \geq \tau; t, \tau \in [0, \infty)$$

$$|e^{\bar{A}(t-\tau)}| \leq M e^{-k(t-\tau)} \quad (10)$$

$$|e^{\bar{C}(\tau-t)}| \leq M e^{-k(t-\tau)} \quad (11)$$

となることに注意しておく。

$$h \triangleq \sqrt{\varepsilon} p \quad (12)$$

とおき、(4), (5)式を書きかえる。

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \sqrt{\varepsilon} \bar{B}p(t) + \varepsilon\theta(x(t), \sqrt{\varepsilon} p(t)) \quad (13)$$

$$\dot{p}(t) = \bar{C}p(t) + \sqrt{\varepsilon} F(x(t), \sqrt{\varepsilon} p(t)) \quad (14)$$

$S_n^m(D, \Delta)$ の元で関係式

$$\forall t \in [s, \infty); p(t) = q(x(t)) \quad (15)$$

を満たす q を逐次近似により構成しよう。 $q \in S_n^m(D, \Delta)$ を任意に選び、(13)式で $p(t) = q(x(t))$ とすると

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \sqrt{\varepsilon} \bar{B}q(x(t)) + \varepsilon\theta(x(t), \sqrt{\varepsilon} q(x(t))) \quad (16)$$

を得る。方程式(16)の初期条件が $x(s) = \xi$ に対する解の時刻 $t(\geq s)$ での値を $x(t; s, \xi, q)$ で表わす。

θ, q のリプシッツ条件と一様有界性から(16)式の解の一意性と一様有界性が成り立ち⁴⁾、(16)式と等価な積分式

$$\begin{aligned} x(t; s, \xi, q) = & e^{\bar{A}(t-s)}\xi \\ & + \int_s^t e^{\bar{A}(t-r)} \{ \bar{B}\sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q)) \\ & + \varepsilon\theta(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) \} dr \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。また解の一意性から初期時刻を ω だけ移動させた解の時刻 $t + \omega$ の値も同じ値をもち

$$x(t + \omega; s + \omega, \xi, q) = x(t; s, \xi, q) \quad (18)$$

であることに注意する。

つぎに、(14)式に注目して関数 F 中の $x(t)$, $p(t)$ に、

$$x(t) = x(t; s, \xi, q)$$

$$p(t) = q(x(t; s, \xi, q))$$

$$T(q)(\xi) = -\sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \quad (19)$$

とおこう。

この $T(q)(\xi)$ は x の初期点 ξ と関数 q のみに依存し、初期時刻 s によらず一定である。実際、積分

$$-\sqrt{\varepsilon} \int_{s'}^\infty e^{\tilde{C}(s'-r)} F(x(r; s', \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s', \xi, q))) dr \quad (20)$$

について

$$\begin{cases} \Delta s = s' - s \\ r = r' + \Delta s \end{cases}$$

とおくと、この積分(20)は

$$\begin{aligned} & -\sqrt{\varepsilon} \int_{s+\Delta s}^\infty e^{\tilde{C}((s+\Delta s)-r)} \\ & \cdot F(x(r; s+\Delta s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s+\Delta s, \xi, q))) dr \\ & \text{となり、} dr = dr' \text{ であるから、変数変換により} \\ & -\sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty e^{\tilde{C}(s-r')} \\ & \cdot F(x(r'+\Delta s; s+\Delta s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r'+\Delta s; s+\Delta s, \xi, q))) dr' \end{aligned}$$

となる。(18)式から

$$x(r'+\Delta s; s+\Delta s, \xi, q) = x(r'; s, \xi, q)$$

であるから(20)式の積分は(19)式の右辺の積分式と一致する。結局、関数 $q: y \mapsto q(y)$ を与えれば、任意の $\xi \in R^n$ について $T(q)(\xi)$ が一意に決まる。以上の手続きは関数 $q: y \in R^n \mapsto q(y) \in R^m$

から関数

$$T(q): \xi \in R^n \mapsto T(q)(\xi) \in R^m$$

を対応させる作用素 T を定義している。この定理の証明は作用素 T の不動点 $q = T(q)$ の存在証明に帰着する。

実際、不動点 $q = T(q)$ が存在すれば、

$$\begin{aligned} q(\xi) &= T(q)(\xi) \\ &= -\sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ &= -\sqrt{\varepsilon} \int_s^t e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ &\quad -\sqrt{\varepsilon} \int_t^\infty e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ &= -\sqrt{\varepsilon} \int_s^t e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ & -e^{\tilde{C}(s-t)} \sqrt{\varepsilon} \int_t^\infty e^{\tilde{C}(t-r)} \\ & \cdot F(x(r; t, x(t; s, \xi, q)), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; t, x(t; s, \xi, q))) dr \\ &= -\sqrt{\varepsilon} \int_s^t e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ & \quad +e^{\tilde{C}(s-t)} q(x(t; s, \xi, q)) \end{aligned}$$

が導かれ、

$$\begin{aligned} q(\xi) &= -\sqrt{\varepsilon} \int_s^t e^{\tilde{C}(s-r)} F(x(r; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(r; s, \xi, q))) dr \\ & \quad +e^{\tilde{C}(s-t)} q(x(t; s, \xi, q)) \end{aligned}$$

の両辺を t で微分すれば

$$\begin{aligned} 0 &= -\sqrt{\varepsilon} e^{\tilde{C}(s-t)} F(x(t; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(t; s, \xi, q))) \\ & \quad -\tilde{C} e^{\tilde{C}(s-t)} q(x(t; s, \xi, q)) \\ & \quad +e^{\tilde{C}(s-t)} \dot{q}(x(t; s, \xi, q)) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \dot{q}(x(t; s, \xi, q)) &= \tilde{C} q(x(t; s, \xi, q)) \\ & \quad +\sqrt{\varepsilon} F(x(t; s, \xi, q), \sqrt{\varepsilon} q(x(t; s, \xi, q))) \end{aligned}$$

が従う。これは $q(x(t; s, \xi, q))$ が(14)式の解であることを示す。

関数空間 $C(R^n, R^m)$ にノルム位相をいれる。 $C(R^n, R^m)$ はバナッハ空間になり、 $S_n^m(D, \Delta)$ はそのなかの閉集合になることが容易に示せる。そこで、Banach の縮小写像定理⁹⁾ によりつぎの二つを証明すれば不動点の存在が保証される。

(1) T が $S_n^m(D, \Delta)$ からそれ自身への作用素であること、*i. e.*

$$\forall q \in S_n^m(D, \Delta) \quad T(q) \in S_n^m(D, \Delta)$$

(2) T が縮小作用素であること、*i. e.*

$$1 > \exists \theta > 0 \quad \forall q_1, q_2 \in S_n^m(D, \Delta)$$

$$|T(q_1) - T(q_2)| \leq \theta |q_1 - q_2|$$

簡単のため、 $\xi^1, \xi^2 \in R^n, q \in S_n^m(D, \Delta)$ として

$$x^l(t) \triangleq x(t; s, \xi^l, q) \quad l=1, 2$$

とおく。

(H 2) と $q \in S_n^m(D, \Delta)$ より

$$\begin{aligned} & |\Theta(x^1(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^1(r))) - \Theta(x^2(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^2(r)))| \\ & \leq L_B \{|x^1(r) - x^2(r)| + \sqrt{\varepsilon} |q(x^1(r)) - q(x^2(r))|\} \\ & \leq L_B (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) |x^1(r) - x^2(r)| \end{aligned} \quad (21)$$

である。また

$$|\tilde{B} q(x^1(r)) - \tilde{B} q(x^2(r))| \leq B \Delta |x^1(r) - x^2(r)|$$

である。ただし、 $B = |\tilde{B}|$

(17)式と(H 0)より

$$\begin{aligned}
& |x^1(t) - x^2(t)| \leq M e^{-k(t-s)} |\xi^1 - \xi^2| \\
& + \int_s^t \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \} \\
& \cdot M e^{-k(t-\tau)} |x^1(r) - x^2(r)| d\tau \\
& \leq M |\xi^1 - \xi^2| \\
& + \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \} \\
& \cdot \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| M \int_s^t e^{-k(t-r)} dr
\end{aligned}$$

を得る.

$$M \int_s^t e^{-k(t-r)} dr = M e^{-kt} \left[\frac{e^{kr}}{k} \right]_0^t \leq \frac{M}{k}$$

だから

$$\begin{aligned}
& |x^1(t) - x^2(t)| \\
& \leq M |\xi^1 - \xi^2| \\
& + \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_0^D (1 + \varepsilon \Delta) \} \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| \frac{M}{k}
\end{aligned}$$

上式の両辺の時刻に付いての $\sup$ をとると,

$$\begin{aligned}
& \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| \\
& \leq M |\xi^1 - \xi^2| \\
& + \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_0^D (1 + \varepsilon \Delta) \} \frac{M}{k} \\
& \cdot \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| \quad (22)
\end{aligned}$$

ここで

$$\alpha \triangleq 1 - \frac{M}{k} \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \} \quad (23)$$

とおく. ε が小のとき, $\alpha > 0$ である.

(22) 式の右辺の第 2 項を移行し整理すると

$$\sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| \leq \alpha^{-1} M |\xi^1 - \xi^2|$$

が得られる. したがって $\forall t \in [s, \infty)$ に対し

$$|x(t; s, \xi^1, q) - x(t; s, \xi^2, q)| \leq \alpha^{-1} M |\xi^1 - \xi^2| \quad (24)$$

(19) 式より

$$\begin{aligned}
& |T(q)(\xi^1) - T(q)(\xi^2)| \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty M e^{-k(r-s)} \\
& |F(x^1(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^1(r))) - F(x^2(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^2(r)))| dr
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& |F(x^1(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^1(r))) - F(x^2(r), \sqrt{\varepsilon} q(x^2(r)))| \\
& \leq L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) |x^1(r) - x^2(r)|
\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}
& |T(q)(\xi^1) - T(q)(\xi^2)| \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \\
& \cdot \int_s^\infty M e^{-k(r-s)} dr \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \sup_{r \in [s, \infty)} |x^1(r) - x^2(r)| \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} M |\xi^1 - \xi^2| \quad (25)
\end{aligned}$$

ε が小さければ

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} M \leq \Delta \quad (26)$$

ゆえ

$$|T(q)(\xi^1) - T(q)(\xi^2)| \leq \Delta |\xi^1 - \xi^2| \quad (27)$$

$T(q)$ の x についてのリプシッツ定数 Δ による連続性が成立する.

つぎに, $\|q\| \leq D$ ゆえ (H 3) より

$$|F(x, \sqrt{\varepsilon} q)| \leq N(\sqrt{\varepsilon} D) \quad \forall x \in R^n$$

$$\begin{aligned}
& \|T(q)\| \leq \sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty M e^{-k(r-s)} N(\sqrt{\varepsilon} D) dr \\
& \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} N(\sqrt{\varepsilon} D) \quad (28)
\end{aligned}$$

ε が十分小さければ

$$\sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} N(\sqrt{\varepsilon} D) \leq D \quad (29)$$

すなわち

$$\|T(q)\| \leq D$$

よって

$$q \in S_n^m(D, \Delta)$$

のとき

$$T(q) \in S_n^m(D, \Delta)$$

が成り立つ. つぎに T の縮小性をいう. 任意の $q^1, q^2 \in S_n^m(D, \Delta)$ をとり, 簡単のため

$$x^{(l)}(t) \triangleq x(t; s, \xi, q^l) \quad (l=1, 2)$$

と表わす. (17) 式より

$$\begin{aligned}
& x^{(l)}(t) = e^{\tilde{A}(t-s)} \xi + \int_s^t e^{\tilde{A}(t-r)} \{ \sqrt{\varepsilon} \tilde{B} q^l(x^{(l)}(r)) \\
& + \varepsilon \Theta(x^{(l)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^l(x^{(l)}(r))) \} dr \\
& \quad (l=1, 2)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& |\Theta(x^{(1)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^1(x^{(1)}(r))) - \Theta(x^{(2)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^2(x^{(2)}(r)))| \\
& \leq L_0^D \{ |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| \\
& + \sqrt{\varepsilon} |q^1(x^{(1)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \} \\
& |q^1(x^{(1)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \\
& \leq |q^1(x^{(1)}(r)) - q^1(x^{(2)}(r))| \\
& + |q^1(x^{(2)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \\
& \leq \Delta |x^{(2)}(r) - x^{(1)}(r)| + \|q^1 - q^2\| \\
& |x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| \\
& \leq \frac{M}{k} B \sqrt{\varepsilon} \left\{ \Delta \sup_{r \in [s, \infty)} |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| + \|q^1 - q^2\| \right\} \\
& + \frac{M}{k} \varepsilon L_0^D \left\{ (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \sup_{r \in [s, \infty)} |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| \right. \\
& \left. + \sqrt{\varepsilon} \|q^1 - q^2\| \right\} \\
& \leq \frac{M}{k} \{ \sqrt{\varepsilon} B \Delta + \varepsilon L_0^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \} \sup_{r \in [s, \infty)} |x^{(1)}(r) \\
& - x^{(2)}(r)| + \frac{M}{k} \{ \sqrt{\varepsilon} B + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} L_0^D \} \|q^1 - q^2\|
\end{aligned}$$

を得る. 時刻 t について上式両辺の $\sup$ をとり, 整頓すると

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in [s, \infty)} |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| \\ & \leq \alpha^{-1} \frac{M}{k} (\sqrt{\varepsilon} B + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} L_0^D) \|q^1 - q^2\| \end{aligned}$$

ゆえに $\forall t \geq s$ について

$$|x^{(1)}(t) - x^{(2)}(t)| \leq \alpha^{-1} \frac{M}{k} (\sqrt{\varepsilon} B + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} L_0^D) \|q^1 - q^2\| \quad (30)$$

が成り立つ. つぎに

$$\begin{aligned} & |T(q^1)(\xi) - T(q^2)(\xi)| \\ & \leq \sqrt{\varepsilon} \int_s^\infty M e^{-k(r-s)} |F(x^{(1)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^1(x^{(1)}(r))) \\ & \quad - F(x^{(2)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^2(x^{(2)}(r)))| dr \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} & |F(x^{(1)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^1(x^{(1)}(r))) - F(x^{(2)}(r), \sqrt{\varepsilon} q^2(x^{(2)}(r)))| \\ & \leq L_F^D \{ |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| \\ & \quad + \sqrt{\varepsilon} |q^1(x^{(1)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \} \\ & |q^1(x^{(1)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \\ & \leq |q^1(x^{(1)}(r)) - q^1(x^{(2)}(r))| \\ & \quad + |q^1(x^{(2)}(r)) - q^2(x^{(2)}(r))| \\ & \leq \Delta |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| + \|q^1 - q^2\| \\ & |T(q^1)(\xi) - T(q^2)(\xi)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \sup_{r \in [s, \infty)} |x^{(1)}(r) - x^{(2)}(r)| \\ & \quad + \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_F^D \sqrt{\varepsilon} \|q^1 - q^2\| \\ & \leq \left\{ \varepsilon \frac{M}{k} L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} \frac{M}{k} (B + \varepsilon L_0^D) \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon \frac{M}{k} L_F^D \right\} \|q^1 - q^2\| \end{aligned}$$

を得る. そこで

$$\begin{aligned} \lambda &= \varepsilon \left(\frac{M}{k} \right)^2 L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} (B + \varepsilon L_0^D) \\ & \quad + \varepsilon \frac{M}{k} L_F^D \end{aligned}$$

とおくと,

$$\|T(q^1) - T(q^2)\| \leq \lambda \|q^1 - q^2\| \quad (31)$$

を得る. ε が十分小さければ

$$0 < \lambda < 1 \quad (32)$$

が成り立つ. すなわち ε がつぎの不等式を満たせば, 不動点定理より $S_F^D(D, \Delta)$ のなかに T の不動点が存在する.

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \frac{M}{k} \{ \sqrt{\varepsilon} \Delta B + \varepsilon L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \} > 0 \\ \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} M \leq \Delta \\ \sqrt{\varepsilon} \frac{M}{k} N(\sqrt{\varepsilon} D) \leq D \\ 0 < \varepsilon \left(\frac{M}{k} \right)^2 L_F^D (1 + \sqrt{\varepsilon} \Delta) \alpha^{-1} (B + \varepsilon L_0^D) + \varepsilon \frac{M}{k} L_F^D < 1 \end{cases}$$

ε_0 がこのような条件を満たせば, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ である ε も条件を満たすから定理が証明された.

3. 非線形フィードバック問題

前章の結果を非線形フィードバック問題に適用しよう⁵⁾. 線形レギュレータの理論, 特に線形 2 次形式問題は現代制御理論の中で最も体系的に整備されている^{6), 7)}. この問題は周知のように状態変数 x と制御量 u (それぞれ n, m ベクトルとする) を線形に含む状態方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (33)$$

$$x(s) = \xi \quad (34)$$

と 2 次形式評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_s^\infty \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \} dt \quad (35)$$

について $J(u)$ を最小にする制御量 $u(t)$ を求める問題である. ここで A, B は $n \times n, n \times m$ の定数行列であり, Q, R はそれぞれ $n \times n, m \times m$ 次の対称準正定, 対称正定な定数行列とする. (A, B) が可制御対であれば, この問題の解もまた周知のように状態変数 $x(t)$ のフィードバック量, いわゆる最適制御則

$$u(t) = -R^{-1} B^T S x(t) \quad (36)$$

で与えられる. ここで S はリカッチ行列代方程式

$$-SA - A^T S + SBR^{-1}B^T S - Q = 0 \quad (37)$$

の解である^{6), 7)}. これに反して非線形系の最適制御則はそれを構成することが一般に困難とされている. たとえば (33) 式の代わりにつぎの弱非線形方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varepsilon g(x(t)) \quad (38)$$

(ただし, ε は微小正定数) が与えられた場合を考える. g は少なくとも C^2 級関数とする.

ε が微小であればこの問題の解が線形問題の解 (36) 式に補正量 $h(t)$ を加えた

$$u(t) = -R^{-1} B^T \{ Sx(t) + h(t) \} \quad (39)$$

で与えられることが期待できよう. 変分法による最適性の必要条件式と不変埋め込み法の議論によれば, $x(t), h(t)$ についての連立常微分方程式

$$\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}h(t) + \varepsilon \theta(x(t)) \quad (40)$$

$$\dot{h}(t) = -\bar{A}^T h(t) + \varepsilon F(x(t), h(t)) \quad (41)$$

が導出される^{5), 8)~12)}. ここで,

$$\bar{A} = A - BR^{-1}B^T S \quad (42)$$

$$\tilde{B} = -BR^{-1}B^T \quad (43)$$

$$\Theta(y) = g(y) \quad (44)$$

$$F(y, v) = -Sg(y) - g_y(y)^T(S_y + v) \quad (45)$$

である。実際、 $\lambda(t) = Sx(t) + h(t)$ とおけば (40), (41) 式から Hamiltonian 関数を

$$H(x, \lambda, u) = \frac{1}{2}\{x^T Qx + u^T Ru\} + \lambda^T \{Ax + Bu + \varepsilon g(x)\} \quad (46)$$

で定義した場合の最適性の必要条件式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^T\lambda(t) + \varepsilon g(x(t)) \quad (47)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -A^T\lambda(t) - Qx(t) - \varepsilon g_x^T(x(t))\lambda(t) \quad (48)$$

が導かれる。

$$u(t) = R^{-1}B^T\lambda(t) = R^{-1}B^T\{Sx(t) + h(t)\} \quad (49)$$

は最適性の必要条件を満たしている。そこで、この $x(t)$, $h(t)$ について、関数 $p(x)$ が存在して

$$h(t) = p(x(t)) \quad (50)$$

が成り立てば、フィードバック制御則

$$u(t) = -R^{-1}B^T\{Sx(t) + p(x(t))\} \quad (51)$$

は最適制御の候補の一つになる (Fig. 1 参照)。(38)式の線形部分については対 (A, B) の可制御性を仮定し、非線形関数 $g(x)$ は少なくとも C^2 級関数として前章の定理を適用しよう。(A, B) の可制御性から Q, R が適切に選択されていれば、前章の定理の条件 (H 0) が成り立ち、係数行列 $\tilde{A} = A - BR^{-1}B^TS$, $\tilde{C} = -\tilde{A}^T$ について正の定数 M, k があってそれぞれ

$$\forall t, \tau; t \geq \tau; t, \tau \in [0, \infty)$$

$$|e^{\tilde{A}(t-\tau)}| \leq Me^{-k(t-\tau)}$$

$$|e^{\tilde{C}(t-\tau)}| \leq Me^{-k(t-\tau)}$$

が仮定できる。また非線形関数 $g(x)$ についてこの x についての一様有界性およびリプシッツ連続性

$$\exists B_g \quad \forall x \in R^n \quad |g(x)| \leq B_g$$

$$\exists L_g \quad \forall x_1, x_2 \in R^n \quad |g(x_1) - g(x_2)| \leq L_g|x_1 - x_2|$$

と

$$\exists K_0, K_1, K_2 > 0$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| \leq K_0$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} Sx \right| \leq K_1$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} Sx \right) \right| \leq K_2$$

が成り立つとすればこのような g から構成される $\Theta(y)$, $F(y, v)$ については条件 (H 1), (H 2), (H 3) が成り立つ。結局、前章の定理により上で述べた $g(x)$ については ε が十分小さければ関数 $q(x)$ が存在し、フィードバック制御則

$$u(t) = -R^{-1}B^T\{Sx(t) + \sqrt{\varepsilon}q(x(t))\}$$

が構成できる。無論これは最適性の必要条件のみをみたしているだけだからこれが最適制御を与えるかどうかは別途吟味の必要があろう。

g に関する仮定は強いが、たとえば Fig. 2 のように勾配が滑らかに変化し $|x|$ の増加とともに勾配が 0 になるような現実によく生じる飽和特性を含んでいる。

非線形系で本稿のように初期点を任意にとり、時間区間の上限が無限な場合を考察しようとするれば、 Θ, F の条件、したがって g にかかなり厳しい条件が加えられるのは避けられないだろう (条件 (H 1), (H 2), (H 3))。

しかし、初期点有界な領域に限られるとすれば、それに伴う状態変数 x の解軌道も有界な領域に制限され、 h も同様だから、本稿の条件 (H 1), (H 2), (H 3) は大幅に緩和されるだろう。工学的にはこれで十分有効であろう。この研究を進めるには本論文の定理が基本となる。これについてはより詳細で複雑な議論を必要とするからつぎの機会に検討したい。

非線形レギュレータの研究はこれまでも種々な方法が考察されている。Bridgland は系を記述する関数のクラスを可測関数にまで広げ、一般的な考察を行っている¹²⁾。積分区間の上限は、 x の初期点 ξ に依存し、フィードバック関数は $p(t, x)$ のように与えられる。

Fig. 1 Nonlinear feedback system

Fig. 2 A nonlinear function satisfying the conditions (H 1), (H 2) and (H 3)

しかしながら、その議論は本稿で扱った系の記述に合
せると偏微分方程式

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \{\tilde{A}x + \tilde{B}p + \varepsilon \Theta(x, p)\} = \{\tilde{C}p + \varepsilon F(x, p)\}$$

の解 $p(t, x)$ の存在を前提にしたものであってその存在
性についての議論はみられない。

本邦でもたとえば西川、三宮、板倉氏らの準最適フィード
バック制御¹³⁾の興味深い研究がある。これは、本稿と
同様に微小パラメータ ε が作用する弱非線形系につい
て、準最適制御則を ε について $\varepsilon=0$ の周りでべき級
数近似で求めるものである。本稿の議論を応用すればこ
れの ε についての解析性を論じることが容易になるも
のと考えられる。

4. Newton 法による不動点問題の近似解法

前章までに誘導した関数空間上の不動点問題 q
 $=T(q)$ *i. e.*

$$\forall \xi \in R^n$$

$$q(\xi) = T(q)(\xi)$$

$$= -\sqrt{\varepsilon} \int_0^\infty e^{\tilde{C}(-r)} F(x(r; 0, \xi, q),$$

$$\sqrt{\varepsilon} q(x(r; 0, \xi, q))) dr \quad (52)$$

の近似解を求める。議論を簡単にするため、スカラー系
なわち $n=1$ の場合を考えよう。ベクトル系でも次数は
高くなるが同様な方法が適用できる。

$q(x)$ をたとえばフーリエ級数

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=l} \{a_{2k-1} \cos(kx) + a_{2k} \sin(kx)\} \quad (53)$$

で近似し、これを(52)式に代入する。積分時間の上限は
適当に大きな時刻 t_f に置き換える。 x の $2l+1$ 個の初期
点 $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{2l}$ を与えれば、連立 $2l+1$ 元方程式

$$G^j(a) = 0, \quad j=0, \dots, 2l \quad (54)$$

ここで

$$a = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2l}) \quad (55)$$

$$G^j(a) = q(\xi^j) + \sqrt{\varepsilon} \int_0^{t_f} e^{\tilde{C}(-r)} F(x(r; 0, \xi^j, q),$$

$$\sqrt{\varepsilon} q(x(r; 0, \xi^j, q))) dr \quad (56)$$

$$q(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{k=l} \{a_{2k-1} \cos(kx) + a_{2k} \sin(kx)\} \quad (57)$$

が定義される。この方程式を Newton-Rapson 法で解く
ことにする。その際 G^j の α に関する Jacobian を計算す
る必要があるが、これは微分方程式

$$\dot{x}^j = \tilde{A}x^j + \sqrt{\varepsilon} \tilde{B}q(x^j) + \varepsilon \Theta(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j)) \quad (58)$$

$$x^j(0) = \xi^j \quad (59)$$

$$\dot{h}^j(t) = \tilde{C}h^j(t) + \sqrt{\varepsilon} F(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j)) \quad (60)$$

$$h^j(t_f) = 0 \quad (61)$$

$$j=0, 1, \dots, 2l$$

のパラメータ α についての変分方程式

$$\begin{aligned} \dot{x}_a^j &= \tilde{A}x_a^j + \sqrt{\varepsilon} \tilde{B}q_x(x^j)x_a^j + \sqrt{\varepsilon} \tilde{B}q_a(x^j) \\ &\quad + \varepsilon \Theta_x(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j))x_a^j + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \Theta_h(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j)) \\ &\quad \times \{q_x(x^j)x_a^j + q_a(x^j)\} \end{aligned} \quad (62)$$

$$x_a^j(0) = 0 \quad (63)$$

および、

$$\begin{aligned} \dot{h}_a^j(t) &= \tilde{C}h_a^j(t) + \varepsilon F_x(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j))x_a \\ &\quad + \varepsilon F_h(x^j, \sqrt{\varepsilon} q(x^j))\{q_x(x^j)x_a^j + q_a(x^j)\} \end{aligned} \quad (64)$$

$$h_a^j(t_f) = 0 \quad (65)$$

の解によって

$$G_a^j = q_a(\xi^j) - h_a^j(0) \quad j=0, \dots, 2l \quad (66)$$

で定義される。

無論ここで与えられる近似解は、 x の $2l+1$ 個の初期
点 $\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{2l}$ を含むある有界な領域でのみ有効であ
る。

5. 数 値 例

前章で述べた不動点問題の近似解法を簡単なスカラー系
で実行してみる。制御系の状態方程式を

$$\dot{x} = x + u + \varepsilon g(x)$$

$$g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

とし、評価関数を

$$J = \frac{1}{2} \int_s^\infty (x^2 + u^2) dt$$

で定義する。(42)式～(45)式より

$$\varepsilon = 1$$

$$\tilde{A} = -\sqrt{2}$$

$$\tilde{B} = -1$$

$$\tilde{C} = \sqrt{2}$$

$$\Theta(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$F(x, h) = -(1 + \sqrt{2}) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - \frac{4((1 + \sqrt{2})x + h)}{(e^x + e^{-x})^2}$$

第 4 章に提案した Newton 法による不動点問題の近似
解法によって、 $p(x)$ をフーリエ級数で近似する。ここで

$$l=5,$$

$$t_f = 10T, \quad \left(T = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

とする。すなわち、

$$q^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^5 \{a_{2k-1}^{(i)} \cos(kx) + a_{2k}^{(i)} \sin(kx)\}$$

ここで、 $a^{(i)} = (a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \dots, a_{10}^{(i)})$ を定義する。 $a_i^{(i)}$ ($i=0, 1, \dots, 10$) が第 j 回の未定係数であり、その初期値がすべて
0 としよう。すなわち $a^{(0)} = 0$ 。そこで

$$q^{(0)} = 0$$

Fig. 3 Numerical example

$$x(0) = \xi^j (j=0, 1, \dots, 10)$$

Newton 法を実行するため (58)~(65) 式を積分して, $q^1 = T(q^0)$ を求め, $a^{(1)}$ を決める. 同様の操作を繰り返し, 各 $a^{(j)}$ を計算する. この手続きを必要な精度まで繰り返す. この計算例では, 5 回の計算によってほぼ収束し

$$\begin{aligned} q(x) = & 1.8561 \sin(x) - 0.2865 \sin(2x) \\ & - 0.2084 \sin(3x) - 0.0455 \sin(4x) \\ & + 0.0093 \sin(5x) \end{aligned}$$

を得た. この非線形最適問題の不動点の存在を示すものと考えられる. Fig. 3 にこの非線形フィードバックによる $x(t)$, $q(x)$, 制御 $u(t)$ を示す. またこれによる評価関数値は $J=7.280$ であり, 線形フィードバックのみによる評価関数値 $J=9.480$ より確かに小さい.

この結果は本稿の非線形フィードバックの有用性を示すものと考えられる.

6. おわりに

本論文では微小パラメータを含む非線形システムに不

動点定理を適用し, それが積分多様体を構成するための十分条件を述べた.

つぎにその結果を, (38), (35) 式のような微小パラメータを含む非線形システムに対する最適フィードバック制御則の考察に応用した.

またそれから得られる不動点問題の近似解法を示し, 簡単な系について数値実験を行って, この理論の有用性を示した.

参考文献

- 1) J. K. Hale: Ordinary Differential Equations, 230/257, R. Krieger, New York (1980)
- 2) P. V. Kokotovic: Integral Manifold as a Tool for Reduced-order Modeling of Nonlinear Systems: A Case Study, IEEE International Symposium on Circuits and Systems, 908/911 (1986)
- 3) 増田久弥: 非線形数学, 東京図書 (1985)
- 4) 山本 稔: 常微分方程式の安定性, 実教出版 (1979)
- 5) 坂和愛幸: 最適システム制御論, コロナ社 (1972)
- 6) 示村悦二郎: 最適レギュレータ理論の実用化への展開, 電気学会論文集, 108-C, 1/9 (1985)

- 7) 伊藤, 木村, 細江: 線形制御系の設計理論, 計測自動制御学会 (1985)
- 8) 師玉, 太田: 非線形最適フィードバックの存在条件, 電子情報通信学会技術研究報告 (回路とシステム研究会), CAS 88-24, 65/72 (1988)
- 9) 師玉, 道上, 鈴木, 太田: 不動点定理による弱非線形最適制御問題の考察, 電子情報通信学会技術研究報告 (非線形問題研究会), NLP88-46, 17/24 (1988)
- 10) 師玉, 太田: ある種の非線形最適制御問題の一次近似解とその収束条件, 電気学会論文誌, 107-C-12, 1141/1147
- 11) 師玉, 太田: ある最適近似計算法の収束条件, 計測自動制御学会論文集, 25-3, 290/297 (1989)
- 12) T. F. Bridgland, JR: On the Existence of Optimal Feedback Controls, J. SIAM, A-2-2, 137/150 (1965)
- 13) 西川, 三宮, 板倉: 非線形系の準最適フィードバック制御, 計測自動制御学会論文集, 7-1, 79/86 (1971)

[著者紹介]

師玉 康成 (正会員)

1978 年, 法政大学工学部建築学科卒業。85 年防衛大学校理工学研究科電子工学電子計算修了。90 年信州大学工学部勤務, 情報工学科助教授 (工学博士)。主として, 最適化理論の研究に従事。日本応用数理学会, 電子情報通信学会, 電気学会などの会員。

蔡 大 維

1987 年, 中国西安交通大学大学院情報制御工学専攻修士課程修了。同年同大学勤務, 助手, 講師。91 年より華南理工大学講師。現在, 信州大学大学院博士後期課程在学中。主として, 制御理論と応用, 生体計測および論理回路テストに関する研究に従事。

江 口 正 義 (正会員)

1965 年, 東京工業大学数学科卒業。67 年同大学大学院修士課程修了。同年 (財) 電力中央研究所入所。91 年信州大学工学部助手。この間主として最適制御理論, 適応制御理論および電力系統への制御の適用に関する研究に従事。日本応用数理学会の会員。

山 浦 弘 夫 (正会員)

1956 年, 信州大学工学部通信工学科卒業。57 年防衛大学校勤務。同助手, 助教授を経て, 現在, 信州大学工学部勤務, 情報工学科教授 (工学博士)。主として最適制御理論に関する研究に従事。電気学会, 情報処理学会の会員。