非最小位相プラントに対する最適モデルフォローイング問題†

山 根 裕 造*

An Optimal Model Following Problem for Nonminimum Phase Plant

Yuzo YAMANE*

This paper is concerned with determining of an optimal design of two gain vectors of controller for nonminimum phase plant which attains the model following by applying the optimal regulation problems.

Key Words : optimal control, model following, feedback control, feedforward control, δ observer

1. ま え が き

プラントの出力を希望する目標値にフォローさせるサーボ問題を最適制御問題から捉え定式化しようとする考えがあるが^{1),2)} その場合目標値は定数あるいは自由系の出力に制限している。また規範モデルを導入しその出力として目標値を考える研究もあるが³⁾ 規範モデル入力に任意性はなく定数である。このようにこれまでの最適サーボ問題においてその目標値は一般に自由系の出力信号として発生させるという制限を課している。本来このような制限をなくし任意の目標値に対するサーボ系を構成することが望ましいが、この種の研究はプラント対象を非最小位相系に限定してもほとんどされていない⁴⁾。

本研究はプラント出力の目標信号が任意入力をもつ規範モデル出力として与えられているときの最適モデルフォローイング問題を最適レギュレータ問題から解決している。その特徴は①モデルマッチング⁵⁾の達成②プラントと規範モデルの状態偏差システムに対してLQ問題の適用③2段階方式による最適コントローラの提案などである。従来のフィードバック制御則にフィードフォワード制御量を付加することによりつねにモデルマッチングを満足する幅広いクラスのコントローラが得られる⁶⁾。このフィードバック・フィードフォワードの各ゲインは種々の設計要求・目的に応じて決められる。たとえば出力追従誤差性能向上のみを目的に考えるとデッドビートコントローラを選ぶとよい⁶⁾。しかし制御入力信号は増大する。そこで制御入力と出力追従誤差の相互のトレードオフを考慮した状態レギュレータ問題の適用

を考えてみると最適なゲインが決定できる。また出力追従性、入力信号の抑制をさらに改善できる2段階ゲイン切り替え方式による最適コントローラも提案している。

2. 問題の記述

つぎの可制御標準形で記述される1入力1出力離散時間系 Σ_1, Σ_2 を考える。 Σ_1 は非最小位相プラント、 Σ_2 は規範モデルであり安定とする。

$\Sigma_j (j=1, 2)$:

$$x_j(i+1) = A_j x_j(i) + b u_j(i)$$

$$y_j(i) = c_j^T x_j(i), \quad j=0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

ただし $A_j = N + b a_j^T$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 \end{bmatrix}$, $b = [0, 0, \dots, 1]^T$

$a_j \in R^n$, $c_j \in R^n$ は任意の n 次元ベクトルである。(1)式のパルス伝達関数は

$$\frac{y_j(z)}{u_j(z)} = g_j(z) = a_j \frac{\gamma_j(z)}{p_j(z)} \quad (2)$$

となる。 r_j はモニック多項式かつ $r_1 = r_2$ で不安定である。 $c_2 = m_0 c_1$ とする。ただし $m_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

(1)式のコントローラの構造を(3)式のように指定する。

$$u(i) = -k_1^T \hat{x}_1(i) + k_2^T x_2(i) + m u_2(i) \quad (3)$$

右辺第1項はプラント状態フィードバック第2項は規範モデルの状態フィードフォワードである。また $\hat{x}_1(i)$ はオブザーバによる $x_1(i)$ の推定値になっている。

問題は任意の時間関数 $u_2(i)$ に対しプラント出力 $y_1(i)$ を規範モデル出力 $y_2(i)$ に一致させるコントローラゲイン k_1, k_2 を最適に求めることである。

この条件は(3)式を(1)式に代入し得られる閉ループ系の①零入力応答が安定②零状態応答が零であることが必要である⁶⁾。①から内部安定性、つまり

$$A - b k_1^T \text{ が安定} \quad (4)$$

②からコントローラゲイン k_1, k_2, m は次式を満足しなければならぬ。

† 第34回自動制御連合講演会で発表(1991・11)

* 足利工業大学 足利市大前町268-1

* Ashikaga Institute of Technology, Ashikaga
(Received August 28, 1992)

(Revised November 10, 1992)

$$m = m_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (5)$$

$$a_1 - k_1 = a_2 - \frac{1}{m} k_2 \quad (6)$$

(5), (6) 式を満足する $k_1, (k_2)$ の選定により種々の MM コントローラができていくがその中から最適なものをとめてみよう。

3. 最適コントローラ

まずプラント入出力信号が追従すべき設定信号、目標信号について考えてみる。

プラント出力 y_1 の目標信号は規範モデル出力 y_2 であることは明らかである。一方、プラント入力 u_1 の設定信号 $\bar{u}_1$ の構造はつぎのような性質をもっていなければならない。① モデルマッチングを達成している。② 外乱をうけやすいプラントの状態を含まず規範モデルのみの信号で構成される。以上のことよりコントローラ(3)式において自由パラメータを $k_1=0$ に固定したものを u_1 の設定信号の候補 $\bar{u}_1$ に選ぶ。 k_2 は(6)式から $k_2 = m(a_2 - a_1)$ と定まり $\bar{u}_1$ の構造はつぎの純フィードフォワード則となる。

$$\bar{u}_1(i) = m(a_2 - a_1)^T x_2(i) + m u_2(i) \quad (7)$$

u_1 はこれから設計しようとしている自由パラメータ $k_1 (k_2)$ に依存しているが $\bar{u}_1$ は k_1, k_2 をすでに固定したものである。それゆえ u_1 は $\bar{u}_1$ を含んでいる広いクラスのコントローラで以下 k_1 の最適な決め方について述べる。

コントローラ(3)式と $\bar{u}_1(i)$ のコントローラとの偏差を

$$\delta u(i) = u_1(i) - \bar{u}_1(i) \quad (8)$$

とおいて δu を求めてみよう。

(3) 式を変形し(7) 式を代入し

$$\begin{aligned} u_1(i) &= -k_1^T \hat{x}_1(i) + m(a_2 - a_1 + k_1)^T x_2(i) + m u_2 \\ &= \bar{u}_1(i) - k_1^T \delta \hat{x}_1(i) \end{aligned} \quad (9)$$

となる。ただし

$$\delta \hat{x}(i) = \hat{x}_1(i) - m x_2(i) \quad (10)$$

よってこれから

Fig. 1 Optimal controller configuration with δ observer for the model following plant

$$\delta u(i) = -k_1^T \delta \hat{x}(i) \quad (11)$$

を得る。プラント、規範モデルの状態変数の差を

$$\delta x(i) = x_1(i) - m x_2(i) \quad (12)$$

で定義すると(10)式の $\delta \hat{x}$ は δx の推定値になっている。

つぎに(12)式のダイナミクスを求めてみる。(1) 式から

$A_2 = A_1 + b(a_2 - a_1)^T$ を考慮し

$$\begin{aligned} \delta x(i+1) &= A_1 \delta x(i) + b \{ u_1(i) - m(a_2 - a_1)^T x_2(i) \\ &\quad - m u_2(i) \} \end{aligned} \quad (13)$$

を得る。(7), (8) 式の定義から上式は

$$\delta x(i+1) = A_1 \delta x(i) + b \delta u(i) \quad (14)$$

となる。さらに出力差 $y_2 - y_1 = \xi$ はこの $\delta x(i)$ を用い $m c_1 = c_2$ なので

$$\xi(i) = -c_1^T \delta x(i) \quad (15)$$

のように書ける。

状態誤差方程式、出力差方程式(14), (15)のフルオーダーオブザーバをつくってみよう。

$$\delta \hat{x}(i+1) = A_1 \delta \hat{x}(i) + b \delta u(i) + h \{ \xi(i) - \hat{\xi}(i) \}$$

$$\hat{\xi}(i) = -c_1^T \delta \hat{x}(i) \quad (16)$$

h は $(A_1 + h c_1^T)$ が安定であるオブザーバゲインに定めると $\|\delta x - \delta \hat{x}\| \rightarrow 0$ が成立する。 $A_1 + h c_1^T$, $A_1 - b k_1$ を安定にするゲイン h, k_1 を選ぶことによりいつも $\delta u(i) \rightarrow 0$, $\|\delta x(i)\| \rightarrow 0$, $\|\delta \hat{x}(i)\| \rightarrow 0$, $\xi(i) \rightarrow 0$ が成立する。この性質に基づきこのオブザーバを δ オブザーバと呼ぶことにする。 δ オブザーバを用いることにより(3)式の $\hat{x}_1(i)$ は不要となる。 δ オブザーバを用いた全体のブロック線図を Fig. 1 に示す。

つぎにこの状態偏差システムのゲイン k_1 を最適に決めるため(14), (11) 式につぎの評価関数を考え LQ 問題を適用してみる。ただし h はデッドビートゲインに指定しておく。

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} \{ \delta x^T(i) Q \delta x(i) + r \{ \delta u(i) \}^2 \} \quad (17)$$

よく知られているようにこのゲイン k_1 は

$$k_1^T = (r + b^T P b)^{-1} b^T P A_1 \quad (18)$$

で与えられ P はつぎの Riccati 方程式

$$P = A_1^T P A_1 + Q - A_1^T P b (r + b^T P b)^{-1} b^T P A_1 \quad (19)$$

の正定対称解である。(18) 式でゲイン k_1 が求まるとゲイン k_2 は(6) 式より求まる。

このようにして(11) 式の δu は最終的にプラント出力差 ξ を積分回路を通過させ信号を発生させることができる。

4. 数値計算例

つぎの 2 次系プラント、規範モデルを扱う。

$$a_1 = (-1, -2)^T, \quad a_2 = (-0.08, 0.4)^T$$

$$c_1 = (2, 1)^T, \quad c_2 \text{ は } c_1 \text{ と同じ}$$

ただしそれぞれの初期値はつぎのように選んだ。

$$x_1(0)=(1, 1)^T, \quad x_2(0)=(0, 0)^T$$

$$r=1, \quad Q=I, \quad u_2=\text{SIN}(i/5) \text{ とした.}$$

最適コントローラはつぎのようになる。

$$u_1 = \bar{u}_1 + \delta u$$

$$\bar{u}_i = (a_2 - a_1)^T x_2 + u_2$$

$$\delta u = -[-0.828 - 1.414]^T \delta \hat{x}$$

プラントの入力信号を Fig. 2 に示す。図において $\delta u=0$ が確認できる。Fig. 3, Fig. 4 は Fig. 2 の入力に対応する出力信号、状態ノルムである。図中の○, □, △, ×, ● はつぎのことを意味する。

○——純フィードバック系 ($k_2=0$)

□——デッドビートコントローラ系 ($k_1=a_1$)

△——最適コントローラ系

×——2 段階最適コントローラ系

●——規範モデル系

ここで 2 段階最適コントローラを提案している。制御誤差の収束性の観点からデッドビートコントローラが最善のものとなるが数値計算例からも明らかのように多大な入力信号を必要とする。それゆえこれを抑えるためには最適コントローラを使用すればよい。そうすると制御入力の増大を抑止できる。しかし出力信号の目標値への追従性はデッドビートコントローラの場合より悪くなる。それゆえ両者の長所を有する 2 段階ゲイン切り替え方式による最適コントローラが考えられる。すなわち ① オブザーバ駆動中 ($0 \leq i \leq n$) において最適コントローラを用いる。② オブザーバ収束後 ($n < i$) においてデッドビートコントローラゲインに切り換える。Fig. 3, 4 に 2 段階最適コントローラ適用によりよく特徴があらわれている。つまりデッドビートコントローラの信号増大を抑止し出力信号はデッドビート収束していることがわかる。

5. あとがき

プラント出力の目標信号が任意の入力をもつ規範モデルの出力信号として与えられるときの最適モデルフォロ잉問題をプラント入力に規範モデル入力、状態で構成される設定信号を導入することにより LQ 問題として定式化できた。この結果デッドビートコントローラの増大信号の抑制に効果がある。また、2 段階ゲイン切り替え方式による最適コントローラを提案したがこれは最適レギュレータ、デッドビート制御双方の特徴をとり入れた性質をもっていることがわかった。

今後 $r_1=r_2$ または $c_2=mc_1$ の仮定を取り除いた制御系の設計法を確立する必要がある。

Fig. 2 Plant and reference model input signals

Fig. 3 Plant and reference model output signals

Fig. 4 Plant and reference model state norms

参考文献

- 1) 池田, 須田: 積分型最適サーボ系の構成, 計測自動制御学会論文集, 24-1, 40/46(1988)
- 2) 安田, 野原, 池田: 最適ロバストサーボ系の構成, 計測自動制御学会論文集, 24-8, 817/822(1988)
- 3) K. Furuta and K. Komiya: Design of Model Following Servo Controller, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-27-3, 725/727(1982)
- 4) 山根, 国枝: 規範モデル制御系の最適構成について, 第 34 回自動制御連合講演会, 147/148(1991)
- 5) K. Ichikawa: Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag(1985)
- 6) 山根裕造: 規範モデル出力にデッドビート追従する非最小位相系トラッキングコントローラの構成, 計測自動制御学会論文集, 28-5, 547/554(1992)