Stackelberg 問題の大域最適化による新しい解法

志 水 清 孝*・呂 敏*

A New Global Optimization Method for Solving the Stackelberg Problem

Kiyotaka SHIMIZU* and Min Lu*

The Stackelberg problem can be formulated as a bilevel optimization problem. In general, such a problem is not a convex program even if all objective and constraint functions are convex. So it is difficult to obtain the global optimal solution.

In this paper, the Stackelberg problem is equivalently transformed into an optimization problem with an equality and several inequality constraints by introducing the minimal-value function of the lower-level program. Under appropriate assumptions, this problem is again transformed into a program in which the objective and constraints are convex functions. Then, by using the concept of exterior penalty method, we obtain an auxiliary problem having only inequality constraints for the transformed problem. It is proved that the global optimal solution to the transformed problem can be calculated as an accumulation point of a sequence of solutions to the auxiliary problems. After that, we show that the auxiliary problem can be equivalently transformed into a concave program for which we can easily find a global optimal solution.

The proposed method can be applied to a wide class of the Stackelberg problems, in which each function in the upper-level program is convex or difference of two convex functions, and one in the lower-level is convex.

Key Words : the Stackelberg problem, bilevel optimization problem, global optimization, minimal-value function, concave program

1. はじめに

Stackelberg 問題は、先手の決定に対応して後手が最適決定を行うことを、先手があらかじめ想定して自己の目的関数を最適化するような問題である。この種の問題は数学的には先手である上位の目的関数・制約関数が上位の決定変数に関してだけでなく、後手の決定問題である下位問題の最適解の関数にもなっているような階層構造をもつ 2 レベル計画問題として定式化される¹⁾。

Stackelberg 問題は関与する関数がすべて凸関数と仮定しても、一般には全体的問題は非凸計画問題になる。

そのため、大域最適化を考えなければならない。Stackelberg 問題に対して従来提案された計算手法には、文献 2) と 3) が知られている。文献 2) と 3) はいずれも 2 レベル計画問題を解くかわりに下位問題をその Kuhn-Tucker 条件で置き換えた非線形計画問題を解くことを考えている。Kuhn-Tucker 条件の中に相補性条件があるため、変換された問題が非凸計画問題である。文献 2) は 0-1 混合整数計画問題に変換して解く手法で、文献 3) は分枝限定法を用いた緩和法だが、ともに上位問題が線形計画問題で下位問題が 2 次凸計画問題であるようなごく特殊な Stackelberg 問題に対する手法である。文献 4), 5) のダブル・ペナルティ法は、Stackelberg 問題を無制約最適化問題に変換して解くが、下位問題の大域最適解が求まることを前提としている。しかし、数値計算の段階では最急降下法などの局所最適化手法を用いているため、数値計算の結果必ずしも大域最適解が得られると

* 慶応義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received July 22, 1992)

(Revised December 4, 1992)

は限らない。文献 6) は、下位問題を Kuhn-Tucker 条件で置き換え、さらに凹計画問題に変換してその大域最適解を求める手法である。この手法は文献 2), 3) と比べて、上位の目的関数と制約関数は凸関数または凸関数の差であるような、より一般的な場合でも適用できるが、下位問題が 2 次凸計画問題である必要がある。

Stackelberg 問題でも、上位の目的関数や制約関数が下位問題の最小解ではなく、最小値関数の関数の場合には、微分不可能最適化アプローチができる⁷⁾。

さて、本論文ではまず、下位問題の最小値関数を取り入れ、Stackelberg 問題を一つの等式制約と若干の不等式制約をもつ最適化問題に等価変換する。そして、適当な仮定のもとで、この問題を目的関数と制約関数がともに凸関数であるような等式不等式制約付最適化問題に等価変換する。さらに、この等価問題に対し外点ペナルティ法の考え方を適用して、等式制約だけをその目的関数に組み込み不等式制約だけをもち補助問題をつくり、ペナルティパラメータを無限大にしたとき補助問題の大域最適解が等価問題の大域最適解に収束することを証明する。そのあと、この補助問題は、大域最適解が比較的容易に求められる凹計画問題に等価変換できることを示す。

以上要するに、本論文の手法は、上位の目的関数と制約関数が凸関数または凸関数の差で、下位の目的関数と制約関数がともに凸関数である一般的な Stackelberg 問題に適用することができる。

2. 問題の定式化と等価変換

上位の決定変数を $x \in R^N$ とし、下位の決定変数を $y \in R^n$ とする。また、上位の目的関数、制約関数をそれぞれ $F: R^N \times R^n \rightarrow R^1$, $G: R^N \times R^n \rightarrow R^m$ とし、下位の目的関数、制約関数をそれぞれ $f: R^N \times R^n \rightarrow R^1$, $g: R^N \times R^n \rightarrow R^m$ とする。

下位問題の最適解はかならずしも唯一ではないので、ここでは上位問題は上位が下位の最適解集合の中から上位にとってもっとも良いものをとるものとする。つまり、上位の決定 $x \in R^N$ に対する下位の最適解が唯一でないとき、下位はその中からどれか一つをとることを条件に、どれをとるかという決定を上位に委ねて、システム全体の最適化に貢献するものとする。

このとき、Stackelberg 問題はつぎのように定式化される。

$$\min_{x, \tilde{y}(x)} F(x, \tilde{y}(x)) \quad (1.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, \tilde{y}(x)) \leq 0 \quad (1.b)$$

$$f(x, \tilde{y}(x)) = \min_y f(x, y) \quad (1.c)$$

$$\text{subj. to } g(x, y) \leq 0 \quad (1.d)$$

ただし、 $\tilde{y}(x)$ は x が与えられたもとでの下位問題 (1.c), (1.d) の最適解である。ここで $\tilde{y}(x)$ は唯一解とは仮定していない。

最小値関数

$$w(x) = \min_y f(x, y) \quad (2)$$

$$\text{subj. to } g(x, y) \leq 0$$

を考えよう。この問題の許容解集合

$$S(x) \triangleq \{y \in R^n \mid g(x, y) \leq 0\}$$

と最適解集合

$$P(x) \triangleq \{\tilde{y}(x) \in S(x) \mid f(x, \tilde{y}(x)) = \min_{y \in S(x)} f(x, y)\}$$

はともに非空とする。このとき、Stackelberg 問題 (1) はつぎのように等価変換できる。

$$\min_{x, z} F(x, z) \quad (3.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, z) \leq 0 \quad (3.b)$$

$$g(x, z) \leq 0 \quad (3.c)$$

$$f(x, z) - w(x) = 0 \quad (3.d)$$

ただし、 $w(x)$ は (2) 式によって定義されている最小値関数であり、(3.b) ~ (3.d) 式を満たす許容解 (x, z) は存在するとする。

本論文とは違って、文献 8) では、Stackelberg 問題 (1) が無制限制約計画問題に等価変換されている。なお、そこではその具体的な計算手法が与えられていない。

問題 (3) は一見して通常の等式不等式制約付最適化問題であるが、一般的には $w(x)$ が微分不可能となるので、微分不可能問題となる。

ところが、等式制約関数が微分不可能な最適化問題に関する計算手法はほとんどない。したがって、問題 (3) のような微分不可能な等式不等式制約付最適化問題に対する計算手法はほとんどない。文献 9) では、微分不可能な等式不等式制約付問題に対し、制約侵害の l_q ノルムをペナルティ関数とする拡大目的関数を与え、この拡大目的関数の精密性を証明した。これによって、関連している微分不可能な無制約問題の局所 (大域) 最適解を求めれば、もとの等式不等式制約付最適化問題の局所 (大域) 最適解を求めることができる。微分不可能な無制約問題に対する局所最適化手法はいくつか提案されているが、その大域最適解を求めることは非常に困難である。なお、文献 9) においては、拡大目的関数の精密性は証明されているが、数値計算の方法は具体的に述べられていない。

本論文では、精密ペナルティ法を使わないで、Stackelberg 問題 (1) と等価な、微分不可能な等式制約関数をもつ最適化問題 (3) の大域最適化手法を研究する。

まず、つぎの仮定をおく。

[仮定 1] $f(x, y)$, $g(x, y)$ は凸関数である。

このとき、最小値関数 $w(x)$ はつぎのような性質をもつ。

〔命題 1〕 (文献 10) の Lemma 1) 仮定 1 が成り立つとき、 $w(x)$ は凸関数である。

凸関数の性質より、このとき $w(x)$ の亜勾配を求めることができる(たとえば、文献 11) の 7 章参照)。

また、つぎの仮定をおく。

〔仮定 2〕 $F(x, y)$, $G(x, y)$ は凸関数である。

仮定 1, 2 のもとで、問題 (3) は、目的関数と不等式制約関数が凸関数で、等式制約関数が凸関数の差であるような問題になっており、さらに補助変数 t_1 を導入して、つぎのような、目的関数と制約関数がともに凸関数である問題に等価変換できる。

$$\min_{x, z, t_1} F(x, z) \quad (4.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, z) \leq 0 \quad (4.b)$$

$$g(x, z) \leq 0 \quad (4.c)$$

$$f(x, z) - t_1 = 0 \quad (4.d)$$

$$w(x) - t_1 = 0 \quad (4.e)$$

問題 (4) の大域最適解 (x^0, z^0, t_1^0) がなんらかの手法で求まったとき、 (x^0, z^0) が Stackelberg 問題 (1) の大域最適解となる。

(注意) 文献 6) の 3.2 項の手法を用いれば、上位目的関数 $F(x, y)$ と制約関数 $G(x, y)$ がともに凸関数の差で、下位目的関数 $f(x, y)$ と制約関数 $g(x, y)$ が凸関数である場合でも、Stackelberg 問題 (1) の等価問題 (3) を、目的関数と制約関数がともに凸関数である等式不等式制約付最適化問題に等価変換できる。したがって、その場合にも本論文の手法を応用できる。

3. 外点ペナルティ法の適用

問題 (4) に対し、外点ペナルティ法(たとえば、文献 11), 12) 参照) の考え方を適用し等式制約 (4.d), (4.e) を目的関数に組み込むと、つぎのような補助問題が得られる。

$$\min_{x, z, t_1} F(x, z) - s(f(x, z) + w(x) - 2t_1) \quad (5.a)$$

$$\text{subj. to } G(x, z) \leq 0 \quad (5.b)$$

$$g(x, z) \leq 0 \quad (5.c)$$

$$f(x, z) - t_1 \leq 0 \quad (5.d)$$

$$w(x) - t_1 \leq 0 \quad (5.e)$$

つぎに補助問題 (5) と問題 (4) の関係について考える。そのために、まずつぎの命題を与えておく。

〔命題 2〕 関数 $F(x, y)$, $G(x, y)$, $f(x, y)$, $g(x, y)$, $w(x)$ は連続である。

命題 2 は仮定 1, 2, 命題 1 と凸関数の連続性より明らかである。

つぎの仮定をおく。

〔仮定 3〕 集合 $\{x \mid G(x, \tilde{y}(x)) \leq 0\} \neq \emptyset$ 。

〔仮定 4〕 関数 $F(x, y)$ は下に有界である。

このとき、補助問題 (5) と問題 (4) にはつぎのような関係がある。

《定理 1》 仮定 1~4 が成り立つとする。また問題 (4) および任意の $s > 0$ に対する問題 (5) には大域最適解が存在するとする。このとき、狭義単調増加して無限大に発散する s の正数列 $\{s^k\}$ に対する問題 (5) の大域最適解の点列 $\{(x^k, z^k, t_1^k)\}$ の任意の集積点は問題 (4) の大域最適解である。また、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) = 0$$

なる関係がある。

(証明) 任意の集積点を $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}_1)$ とし、これに収束する部分点列をあらためて $\{(x^k, z^k, t_1^k)\}$ とする。

(a) 集積点の許容性の証明。まず、明らかに

$$G(\bar{x}, \bar{z}) \leq 0$$

$$g(\bar{x}, \bar{z}) \leq 0$$

$$f(\bar{x}, \bar{z}) - \bar{t}_1 \leq 0 \quad (6)$$

$$w(\bar{x}) - \bar{t}_1 \leq 0$$

なる関係がある。つぎに、背理法で

$$f(\bar{x}, \bar{z}) - \bar{t}_1 = 0 \quad (7.a)$$

$$w(\bar{x}) - \bar{t}_1 = 0 \quad (7.b)$$

であることを証明する。もし、(7.a) 式か (7.b) 式が成り立たないならば、 f, w の連続性および $k \rightarrow \infty$ のとき $s^k \rightarrow \infty$ より、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) = -\infty \quad (8)$$

となる。仮定 4 より、 F は下に有界であるから、(8) 式を考えると、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) = \infty \quad (9)$$

を得る。一方、仮定 3 より、 $\bar{x} \in \{x \mid G(x, \tilde{y}(x)) \leq 0\}$ がとれるので、

$$(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}_1) = (\bar{x}, \tilde{y}(\bar{x}), f(\bar{x}, \tilde{y}(\bar{x})))$$

とすると、

$$f(\bar{x}, \bar{z}) - \bar{t}_1 = 0$$

$$w(\bar{x}) - \bar{t}_1 = 0$$

だから

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} F(\bar{x}, \bar{z}) - s^k(f(\bar{x}, \bar{z}) + w(\bar{x}) - 2\bar{t}_1) \\ = F(\bar{x}, \bar{z}) < \infty \end{aligned} \quad (10)$$

となる。よって、ある自然数 K_1 が存在し、

$$\begin{aligned} F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \\ > F(\bar{x}, \bar{z}) - s^k(f(\bar{x}, \bar{z}) + w(\bar{x}) - 2\bar{t}_1) \\ \forall k > K_1 \end{aligned} \quad (11)$$

が成り立つ。これは (x^k, z^k, t_1^k) が s^k に対する問題 (5)

の大域最適解であることに矛盾する。よって、(7.a)式と(7.b)式が成り立つ。これと(6)式を合せると、 $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}_1)$ が問題(4)の許容解であることがわかる。

(b) 集積点の最適性の証明。 $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}_1)$ が問題(4)の大域最適解でないとする、

$$F(x', z') < F(\bar{x}, \bar{z}) \quad (12.a)$$

$$G(x', z') \leq 0, \quad g(x', z') \leq 0 \quad (12.b)$$

$$f(x', z') - t'_1 = 0 \quad (12.c)$$

$$w(x') - t'_1 = 0 \quad (12.d)$$

なるような (x', z', t'_1) が存在する。 F の連続性と(12.a)式より、ある自然数 K_2 が存在し、

$$F(x', z') < F(x^k, z^k) \quad \forall k > K_2 \quad (13)$$

が成り立つ。よって、 $k > K_2$ のとき、

$$F(x', z') - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t'_1)$$

$$= F(x', z')$$

$$< F(x^k, z^k)$$

$$\leq F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1)$$

となる。これは (x^k, z^k, t^k_1) が問題(5)の大域最適解であることに矛盾する。よって、 $(\bar{x}, \bar{z}, \bar{t}_1)$ が問題(4)の大域最適解である。

(c) $\lim_{k \rightarrow \infty} s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1) = 0$ の証明。もし、これが成り立たないとすれば、ある $\varepsilon > 0$ とある自然数 K_3 が存在して、

$$F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1)$$

$$> F(\bar{x}, \bar{z}) + \varepsilon \quad \forall k > K_3$$

となる。よって、 $k > K_3$ のとき、

$$F(\bar{x}, \bar{z}) - s^k(F(\bar{x}, \bar{z}) + w(\bar{x}) - 2\bar{t}_1)$$

$$= F(\bar{x}, \bar{z})$$

$$< F(\bar{x}, \bar{z}) + \varepsilon$$

$$< F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1)$$

となる。これは (x^k, z^k, t^k_1) が問題(5)の大域最適解であることに矛盾する。よって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1) = 0 \quad \blacksquare$$

定理1より、 s を無限大にしたとき、問題(5)の大域最適解の点列が、問題(4)の大域最適解に収束することがわかる。

4. 補助問題の大域最適化

補助問題(5)は、目的関数が凸関数の差で制約関数が凸関数である不等式制約付最適化問題である。つぎに、問題(5)のつぎのような関連問題を考える。

$$\min_{x, z, t_1, t_2} t_2 - s(f(x, z) + w(x) - 2t_1) \quad (14.a)$$

$$\text{subj. to } F(x, z) - t_2 \leq 0 \quad (14.b)$$

$$G(x, z) \leq 0 \quad (14.c)$$

$$g(x, z) \leq 0 \quad (14.d)$$

$$f(x, z) - t_1 \leq 0 \quad (14.e)$$

$$w(x) - t_1 \leq 0 \quad (14.f)$$

問題(14)は目的関数が凹関数で制約集合が凸集合であるいわゆる凹計画問題である。

問題(5)と問題(14)の関係に関して、つぎの定理が成り立つ。

《定理2》 問題(5)と問題(14)は等価である。つまり $s = s^k$ であるとき、

(i) (x^k, z^k, t^k_1) が問題(5)の大域最適解ならば、必ず (x^k, z^k, t^k_1, t^k_2) が問題(14)の大域最適解となるような $t^k_2 \in R^1$ が存在する。

(ii) (x^k, z^k, t^k_1, t^k_2) が問題(14)の大域最適解ならば、 (x^k, z^k, t^k_1) が問題(5)の大域最適解である。

(証明) 付録参照。 ■

この定理より、なんらかの手法で $s = s^k$ であるときの問題(14)の大域最適解 (x^k, z^k, t^k_1, t^k_2) を求めておけば、 (x^k, z^k, t^k_1) が問題(5)の大域最適解となる。

そこで、この手法でStackelberg問題(1)の等価問題(4)の大域最適解を求めるためのアルゴリズムはつぎのとおりである。

《主計算手順》

Step 1 初期パラメータ s^1 を選び、 $k=1$ とする。

Step 2 $s = s^k$ であるときの凹計画問題(14)を解き、その大域最適解を (x^k, z^k, t^k_1, t^k_2) とする。

Step 3 もし $-s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t^k_1) < \delta$ ならば、 (x^k, z^k, t^k_1) を問題(4)の大域最適解として終了する。さもなければ、Step 4へ。ただし、 δ は十分小さな正数である。

Step 4 $s^{k+1} = \beta s^k$ とし、 $k := k+1$ として、Step 2へ。

ただし、 $\beta > 1$ は定数である。

つぎに、ペナルティパラメータ $s = s^k$ が与えられたもとで、凹計画問題(14)の解法について述べる。一般的には、凹計画問題は複数の局所最小解をもつが、目的関数の凹性と制約集合の凸性より、その大域最適解はつねに制約集合の端点にある(文献13)のTheorem I.1参照)。これより、凹計画問題の大域最適解を求めるとき、その制約集合の端点の中から求めればよい。

このような凹計画問題に対する大域最適化手法は外側線形近似法(outer approximation method)と分枝限定法(branch and bound method)に分類することができ、文献13)にまとめられている。ここでは、 $s = s^k$ であるときの凹計画問題(14)を解く手法として、切除平面法(たとえば、文献11)参照)を変形したものを用いる。これは分離超平面を応用した凸集合の外側線形近似法の一つとも見なせる。つぎに文献14)、13)に基づいてこの手法を説

明する.

この手法の基本的な考え方はつぎのとおりである. 問題(14)に対し, その制約集合

$$S = \{(x, z, t_1, t_2) \mid F(x, z) - t_2 \leq 0, \\ G(x, z) \leq 0, g(x, z) \leq 0, \\ f(x, z) - t_1 \leq 0, w(x) - t_1 \leq 0\}$$

のかわりに, 凸多面体 $S_1 \supset S$ を用いた問題を解き, その解 $(x^{k,1}, z^{k,1}, t_1^{k,1}, t_2^{k,1})$ を得る. もし, $(x^{k,1}, z^{k,1}, t_1^{k,1}, t_2^{k,1}) \in S$ ならば, $(x^{k,1}, z^{k,1}, t_1^{k,1}, t_2^{k,1})$ を問題(14)の大域最適解 (x^k, z^k, t_1^k, t_2^k) とする. さもなければ, 一つの線形制約式

$$l_1(x, z, t_1, t_2) \leq 0$$

を加え(ただし, 超平面 $\{(x, z, t_1, t_2) \mid l_1(x, z, t_1, t_2) = 0\}$ が $(x^{k,1}, z^{k,1}, t_1^{k,1}, t_2^{k,1})$ と S を強意に分離する), $S_1 \setminus S$ を部分的に切除し, S のよりよい近似 S_2 を得る. そのあと, S_1 のかわりに S_2 を用いて, 上記のプロセスを繰り返す.

ここでは, 関数 $F(x, y), G(x, y), f(x, y), g(x, y), w(x)$ が凸関数であるため,

$$p(x, z, t_1, t_2) = \max\{F(x, z) - t_2, \\ G_1(x, z), \dots, G_M(x, z), \\ g_1(x, z), \dots, g_m(x, z), \\ f(x, z) - t_1, w(x) - t_1\}$$

とおくと, $p(x, z, t_1, t_2)$ も明らかに凸関数であり, 垂勾配が存在する¹¹⁾.

最初に凸多面体 $S_1 \supset S$ が与えられているとする. イテレーションごとに線形関数 $l_j(x, z, t_1, t_2)$ を

$$l_j(x, z, t_1, t_2) = q^{jT} \begin{bmatrix} x - x^{k,j} \\ z - z^{k,j} \\ t_1 - t_1^{k,j} \\ t_2 - t_2^{k,j} \end{bmatrix} + p(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j}) \quad (15)$$

のように定義する. ただし, q^j は $(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j})$ における凸関数 p の垂勾配の一つである.

この手法において, 線形制約付凹計画問題

$$\min_{(x, z, t_1, t_2) \in S_j} t_2 - s^k(f(x, z) + w(x) - 2t_1) \quad (16)$$

を解く必要がある. 凹計画問題の性質より, かならず

$$\min_{(x, z, t_1, t_2) \in S_j} t_2 - s^k(f(x, z) + w(x) - 2t_1) \\ = \min_{(x, z, t_1, t_2) \in V(S_j)} t_2 - s^k(f(x, z) + w(x) - 2t_1)$$

という関係がある. ただし, $V(S_j)$ は S_j の端点の集合である. したがって, 凸多面体 S_j のすべての端点だけにって調べればよい.

以上より, 前記の主計算手順の Step 2 における, $s = s^k$ であるときの凹計算問題(14)の大域最適解を求めるため

の分離超平面法の計算手順はつぎのようになる.

《部分計算手順》

Step 2.1 凸多面体 $S_1 \supset S$ を与え, $j=1$ とする.

Step 2.2 新しい試行点 $(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j})$ として

$$\min_{(x, z, t_1, t_2) \in V(S_j)} t_2 - s^k(f(x, z) + w(x) - 2t_1) \quad (17)$$

の解を求める. もし, $(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j}) \in S$ ならば, $(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j})$ を問題(14)の大域最適解として Step 2 を終了する. さもなければ, Step 2.3 へ.

Step 2.3 集合 S_j の制約条件に, つぎの制約条件を付け加える.

$$l_j(x, z, t_1, t_2) = q^{jT} \begin{bmatrix} x - x^{k,j} \\ z - z^{k,j} \\ t_1 - t_1^{k,j} \\ t_2 - t_2^{k,j} \end{bmatrix} + p(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j}) \leq 0$$

ただし, q^j は $(x^{k,j}, z^{k,j}, t_1^{k,j}, t_2^{k,j})$ における凸関数 p の垂勾配の一つである. これによって, 集合 S_{j+1} を

$$S_{j+1} := S_j \cap \{(x, z, t_1, t_2) \mid l_j(x, z, t_1, t_2) \leq 0\}$$

と構成し, $j=j+1$ として, Step 2.2 へ.

この部分計算手順に出てきた緩和問題(16)の等価問題(17)は, ある凸多面体を超平面で切除したあとに残った凸多面体上の凹関数の最小化問題である. その解法は文献13)のII.4節を参照されたい. また, 最初の凸多面体 S_1 のとりかたの具体例については, 文献13)の69~71頁を参照されたい.

5. 数 値 例

つぎに簡単な数値例を用いて, 以上で提案した手法の有効性を検証する.

《数値例》

$$\min_x 16x^2 + 9(\tilde{y}(x))^2 \\ \text{subj. to } -4x + \tilde{y}(x) \leq 0 \\ x \geq 0 \quad (18) \\ (x + \tilde{y}(x) - 20)^4 = \min_y (x + y - 20)^4 \\ \text{subj. to } 4x + y - 50 \leq 0 \\ y \geq 0$$

この問題の許容解集合は Fig. 1 の AB, BC の上の点からなる集合であり, 非凸集合である. また, この問題には $D(7.2, 12.8)^T$ と $E(11.25, 5)^T$ という二つの局所最小解が存在する. その中で, $E(11.25, 5)^T$ が大域最小解である (Fig. 1 参照). 問題(18)のもう一つの特徴は, 下位目的

Fig. 1 Feasible solution set and optimal solutions of the example

関数が2次関数でないことである。そのため、過去の手法ではこの問題の大域最適解が求まらない。

そこで、上記の手法でつぎのような凹計画問題を構成する。

$$\begin{aligned}
 & \min_{x, z, t_1, t_2} t_2 - s((x+z-20)^4 + w(x) - 2t_1) \\
 & \text{subj. to } 16x^2 + 9z^2 - t_2 \leq 0 \\
 & \quad -4x + z \leq 0 \\
 & \quad 4x + z - 50 \leq 0 \\
 & \quad (x+z-20)^4 - t_1 \leq 0 \\
 & \quad w(x) - t_1 \leq 0 \\
 & \quad x, z \geq 0
 \end{aligned} \quad (19)$$

ただし、 $w(x)$ は下位問題の最小値関数である。つまり、

$$w(x) = \min_y \{(x+y-20)^4 | 4x+y-50 \leq 0, y \geq 0\}$$

4章で述べた手法で s が与えられたときの問題(19)を解くと、Table 1 のような結果が得られる。ただし、Table 1 において、 k がイテレーション番号であり、 $F^k = F(x^k, z^k)$ 、 $H^k = f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k$ である。

Table 1 より、この手法で問題(18)の大域最適解が得られたことがわかる。

6. おわりに

Stackelberg 問題は一般には非凸計画問題になるため、その大域最適解を求めることが困難である。本論文

では、下位問題の最小値関数を用いることにより、元問題を一つの等式制約と若干の不等式制約をもつ非線形計画問題に等価変換した。そのあと、外点ペナルティ法の考え方を適用するとき、補助問題は凹計画問題に等価変換できることを示した。結局、Stackelberg 問題を解くことを凹計画問題を解くことに帰着し、これによって大域最適化を達成している。

本手法は従来の手法に比べて、より一般的な Stackelberg 問題に適用でき、かつ大域最適解が得られることを保証している。

本論文では、凹計画法として既存手法の一種である切除平面法を用いた。今後、計算速度を上げるために、凹計画法のより良いアルゴリズムの開発を試みたい。

Stackelberg 問題の具体的な応用としては、電気料金決定問題¹⁵⁾ や、税率決定問題、最適構造設計問題などがあげられる。本論文の手法をこれらの実際問題に応用することが今後の課題である。

参考文献

- 1) M. Simaan and J. B. Cruz, Jr.: On the Stackelberg Strategy in Nonzero-sum Games, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **11**-5, 533/555 (1973)
- 2) J. Fortuny-Amat and B. McCarl: A Representation and Economic Interpretation of a Two-Level Programming Problem, *Journal of the Operational Research Society*, **32**, 783/792 (1981)
- 3) J. F. Bard: Convex Two-level Optimization, *Mathematical Programming*, **40**, 15/27 (1988)
- 4) K. Shimizu and E. Aiyoshi: A New Computational Method for Stackelberg and Min-Max Problems by use of a Penalty Method, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**-2, 460/466 (1981)
- 5) 相吉英太郎: 有制約 2 レベル計画問題の外点ペナルティ法による解法, 計測自動制御学会論文集, **23**-9, 985/992 (1987)
- 6) 呂, 志水: 等式と不等式制約をもつ最適化問題の大域最適化手法とその 2 レベル計画問題への応用, 計測自動制御学会論文集, **28**-7, 879/886 (1992)
- 7) K. Shimizu and Y. Ishizuka: Optimality Conditions and Algorithms for Parameter Design Problems with Two-Level Structure, *IEEE Trans.*, **AC-30**-10, 986/993 (1985)
- 8) J. F. Bard: Optimality Conditions for the Bilevel Programming Problem, *Naval Research Logistics Quarterly*, **35**, 413/418 (1988)
- 9) G. Di Pillo and F. Facchinei: Exact Penalty Functions for Nondifferentiable Programming Problems, in *Non-*

Table 1 Computational results of the example

k	s^k	(x^k, z^k)	(t_1^k, t_2^k)	F^k	$s^k H^k$	$F^k - s^k H^k$
1	0.1	(5.546, 10.48)	(248.6, 1481.2)	1481.2	24.86	1506.1
2	1.0	(5.899, 10.49)	(170.7, 1546.4)	1546.4	170.7	1717.2
3	10.0	(6.646, 11.58)	(9.826, 1914.3)	1914.3	98.26	2012.6
4	100.0	(11.25, 4.999)	(197.8, 2250.0)	2250.0	7.252×10^{-4}	2250.0
True Values		(11.25, 5)	—	2250	—	—

smooth Optimization and Related Topics, F. H. Clarke et al. (eds.), 89/107; Plenum Press (1992)

- 10) O. L. Mangasarian and J. B. Rosen : Inequalities for Stochastic Nonlinear Programming Problems, Operations Research, 12, 143/154 (1964)
- 11) 志水, 相吉 : 数理計画法, 昭晃堂 (1984)
- 12) 今野, 山下 : 非線形計画法, 日科技連 (1978)
- 13) R. Horst and H. Tuy : Global Optimization—Deterministic Approaches, Springer-Verlag (1990)
- 14) T. V. Thieu, B. T. Tam and V. T. Ban : An Outer Approximation Method for Globally Minimizing a Concave Function over a Compact Convex Set, Acta Mathematica Vietnamica, 8, 21/40 (1983)
- 15) P. B. Luh, Y.-C. Ho and R. Muralidharan : Load Adaptive Pricing : An Emerging Tool for Electric Utilities, IEEE Trans., AC-27-2, 320/329 (1982)

《付録 定理2の証明》

(i) $t_2^k = F(x^k, z^k)$ とすると, 明らかに (x^k, z^k, t_1^k, t_2^k) が問題(14)の許容解である。もし, (x^k, z^k, t_1^k, t_2^k) が問題(14)の大域最適解でなければ,

$$t_2^k - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') < t_2^k - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \quad (A1.a)$$

$$F(x', z') - t_2^k \leq 0 \quad (A1.b)$$

$$G(x', z') \leq 0, \quad g(x', z') \leq 0 \quad (A1.c)$$

$$f(x', z') - t_1' \leq 0, \quad w(x') - t_1' \leq 0 \quad (A1.d)$$

なるような (x', z', t_1', t_2') が存在する。このとき, (A1.c), (A1.d) より, (x', z', t_1') が問題(5)の許容解である。また,

$$\begin{aligned} F(x', z') - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') \\ \leq t_2^k - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') \\ < t_2^k - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \\ = F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \end{aligned}$$

となる。これは (x^k, z^k, t_1^k) が問題(5)の大域最適解であることに矛盾する。よって, (x^k, z^k, t_1^k, t_2^k) が問題(14)の大域最適解である。

(ii) 背理法で証明する。 (x^k, z^k, t_1^k) が問題(5)の大域最適解でないとすると,

$$\begin{aligned} F(x', z') - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') \\ < F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \end{aligned}$$

$$G(x', z') \leq 0, \quad g(x', z') \leq 0$$

$$f(x', z') - t_1' \leq 0, \quad w(x') - t_1' \leq 0$$

となるような (x', z', t_1') が存在する。 $t_2' = F(x', z')$ とおくと, (x', z', t_1', t_2') は問題(14)の許容解であり, かつ,

$$\begin{aligned} t_2' - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') \\ = F(x', z') - s^k(f(x', z') + w(x') - 2t_1') \\ < F(x^k, z^k) - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \\ < t_2^k - s^k(f(x^k, z^k) + w(x^k) - 2t_1^k) \end{aligned}$$

となる。これは (x^k, z^k, t_1^k, t_2^k) が問題(14)の大域最適解であることに矛盾する。よって, (x^k, z^k, t_1^k) が問題(5)の大域最適解である。 ■

【著者紹介】

志水 清孝 (正会員)

1964年, 慶応義塾大学工学部計測工学科修士課程修了。同年ケース工科大学システム研究所に留学, 67年同校から Ph.D を受く。現在慶応義塾大学理工学部教授。専門は数理計画法, 制御理論, システム制御など。IEEE の会員。

呂 敏 (正会員)

1984年, 中国西安交通大学情報制御工学科卒業。89年慶応義塾大学大学院理工学研究科修士課程修了。92年同博士課程修了。現在, 千代田化工建設(株)に勤務。大域最適化手法や遺伝的アルゴリズムの応用に関する研究開発に従事(工学博士)。