離散時間・有限次元擬線形系の実現理論[†]

長谷川 泰 道*・松 尾 強**

Realization Theory of Discrete-Time Finite-Dimensional Pseudo-Linear Systems

Yasumichi HASEGAWA* and Tsuyoshi MATSUO**

In reference (*), we have proposed pseudo-linear systems as a special system of affine dynamical systems which are general non-linear systems. And we have established the realization theory of discrete-time pseudo-linear systems. The main theorem is the following. [For any time-invariant input response map (that is equivalent to any input/output map with causality and time-invariance), there exist at least two canonical (quasi-reachable & observable) pseudo-linear systems which realize it. And let σ_1, σ_2 be canonical pseudo-linear systems with same behavior, then there exists a unique isomorphic system morphism $T: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$.]

In this paper, we investigate details of finite dimensional pseudo-linear systems. In order to obtain practical results, we assume that the set U of input values is finite and show that this assumption is not so special. A necessary and sufficient condition for a finite dimensional pseudo-linear system to be canonical is given. In an isomorphic class of canonical pseudo-linear systems, there exist two standard systems. One is the quasi-reachable standard system, the other is the observable standard system.

A condition for a time-invariant input response to be the behavior of a finite dimensional pseudo-linear system is equivalent to a condition that the rank of an infinite Hankel matrix is finite.

A procedure to obtain the quasi-reachable standard system from a time-invariant input response map is given.

These theories signify an extension of systematization in linear system theory established by R.E. Kalman et al.

*) Realization Theory of Discrete-Time Pseudo-Linear Systems, Trans. of SICE, 28-2, 199/207 (1992)

Key Words: realization theory, pseudo-linear system, non-linear system, discrete-time, time-invariant input response map

1. はじめに

離散時間系を取り扱う。文献1)において、一般非線形系(アファイン力学系^{2),3)})の中の特殊な系として擬線形系を提案し、擬線形系のつぎの実現定理を得、擬線形系が時不変入力応答関数(因果律および時不変を満たす任意の入出力写像)により特徴づけられることを示した。実現定理: 「任意の時不変入力応答関数に対しそれを実現

する正準(擬可到達であり、可観測である)擬線形系が存在し、任意の二つの正準実現系は互いに同形である」また、擬線形系の具体例としてFETのある電気回路があることを示した。

そこで、本論文の目的は状態空間が有限次元である擬線形系、すなわち、有限次元擬線形系の構造を究明することにある。第3章において、具体的な取扱いを可能とするため、入力値集合 U を有限とする。まずこの仮定がそれほど特殊でないことを示す。つぎに、擬可到達性および可観測性を論じる。更に擬可到達標準系および可観測標準系を定義し、有限次元正準擬線形系の同形類がそれらにより一意に記述されることを示す。第4章において、時不変入力応答関数が有限次元正準擬線形系の挙動であるための必要十分条件を与える。それは無限入出力

[†] 第11回制御理論シンポジウムで発表(1982・5)

* 岐阜大学工学部 岐阜市柳戸 1-1

** 東邦大学理学部 船橋市三山 2-2-1

* Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu

** Faculty of Science, Toho University, Funabashi
(Received April 28, 1992)

(Revised January 13, 1993)

行列の階数による条件である。第5章で、時不変入力応答関数から擬可到達標準系を導出する手順を与える。以上の理論が Kalman らが確立した有限次元定係数線形系の理論体系の拡張になっている。たとえば、擬可到達標準系は線形系のコンパニオンフォームにあたる。

[記号]

N は非負の整数の集合(時間の集合を表わす), k はある体(field)である。 $F(A, B)$ は集合 A から集合 B への関数の全体, $L(A, B)$ は線形空間 A から線形空間 B への線形写像の全体, $L(A) = L(A, A)$ をそれぞれ表わす。 $\langle X \rangle$ は集合 X を含む最小の線形空間を表わす。

2. 準備

本章で有限次元擬線形系を究明するに必要な準備を行う。この章の内容は主に文献1)から抽出したものである。

2.1 入出力関係

本章では本論文で取り扱う入出力写像を考察する。 U を入力値集合(入力を取りうる値の集合)とし, U をアルファベットとするワード(語)の集合 U^* を入力系列の集合とする。入力 $\omega = \omega(n)\omega(n-1) \cdots \omega(1) \in U^*$ の長さ $|\omega|$ を n と定義する。ただし $n \in N$, そこで連鎖の演算 $|$ を写像: $U^* \times U^* \rightarrow U^*$;

$$(\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_2 | \omega_1,$$

$$(\omega_2 | \omega_1) = \begin{cases} \omega_1(n), 0 < n \leq |\omega_1| \\ \omega_2(n - |\omega_1|), |\omega_1| < n \leq |\omega_1| + |\omega_2| \end{cases}$$

により定義し, 空な入力系列を I とし, $|I| = 0$ とする。出力値集合 Y (出力を取りうる値の集合) を体 k 上の線形空間とする。そこで, ブラック・ボックスの入出力関係に関してつぎの事実⁴⁾がある。

事実: 任意の因果律を満たす入出力写像は入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ により, $\gamma(|\omega|) = a(\omega)$, $\omega \in U^*$ で与えられる。

ただし, $\gamma(|\omega|)$ は入力 ω を入れ終ったときの時刻 $|\omega|$ の出力値を表わす。

本論文で考察対象とする入出力関係としてつぎの定義2.1を満たす入力応答関数を取り扱う。

[定義2.1] 入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ が時不変性:

$$a(\omega_1 | \omega) - a(\omega_1) = a(\bar{\omega}_1 | \omega) - a(\bar{\omega}_1)$$

$$\text{ただし任意の } \omega, \omega_1, \bar{\omega}_1 \in U^*, |\omega_1| = |\bar{\omega}_1|.$$

を満たすとき, a は時不変入力応答関数といわれる。更に $u \in U$, $t \in N$ に対し $u^t \in U^*$ を $u^t(i) = u$, ただし $0 \leq i \leq t$, と定義する。

2.2 擬線形系

この節では擬線形系に関しての最小限の準備を行う。

[定義2.2] つぎの状態方程式で与えられる系を擬線形系といい, 擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ と書く。

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g(\omega(t+1)) \\ x(0) = 0 \\ \gamma(t) = h^0 + hx(t) \end{cases}$$

ただし X は体 k 上の線形空間 X であり, $x(t) \in X$, $F \in L(X)$, $\omega(t) \in U$, $g \in F(U, X)$, $\gamma(t) \in Y$, $h^0 \in Y$, $h \in L(X, Y)$ である。

対 (X, F) を自由運動といい, 組 $((X, F), g)$ を入力写像付き自由運動という。更に, 組 $((X, F), h)$ を出力機構付自由運動という。

擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対し関数 $a_\sigma: U^* \rightarrow Y; \omega \mapsto a_\sigma(\omega)$

$$= h^0 + h \left(\sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} g(\omega(j)) \right)$$

を σ の挙動(behavior)という。

時不変入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ に対し $a_\sigma = a$ とする擬線形系 σ は a を実現するという。

$\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ を擬線形系とする。

可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} g(\omega(j)); \omega \in U^* \right\}$ の線形包が X に一致するとき σ は擬可到達であるといわれる。任意の $m \in N$ に対し, $hF^m x_1 = hF^m x_2$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つとき σ は可観測であるといわれる。擬可到達であり, 可観測である σ は正準系であるといわれる。

(注意) 擬可到達は状態空間 X が入力による影響を必要最小限もっていることを示し, 可観測は出力から見て状態空間が最も整理されていることを示す。

(2.3) 擬線形系の例

$A(N \times U, k) = \{\text{関数 } \lambda: N \times U \rightarrow k; \lambda = \sum \lambda(n, u) e_{(n, u)} \text{ (有限個の和)}, n \in N, u \in U, \lambda(n, u) \in k\}$ 。

ただし $e_{(n, u)}$ は次式により与えられる。 $m, n \in N$, $u, u' \in U$ に対し

$$e_{(n, u)}(m, u') = 1 \quad (m = n, u' = u \text{ のときのみ}),$$

$$e_{(n, u)}(m, u') = 0 \quad (m \neq n \text{ または } u' \neq u \text{ のとき}).$$

そのとき, $A(N \times U, k)$ は線形空間である。 $A(N \times U, k)$ の基底 $\{e_{(n, u)}: n \in N, u \in U\}$ に対し S_r を $S_r e_{(n, u)} = e_{(n+1, u)}$ とすれば $S_r \in L(A(N \times U, k))$ である。 S_r は入力値集合に無関係であり, 時間集合 N に関しての右移動作用素である。したがって, 対 $(A(N \times U, k), S_r)$ は自由運動である。

写像 $\eta: U \rightarrow A(N \times U, k)$ を任意の $u \in U$ に対し $\eta(u) = e_{(0, u)}$ とする。任意の時不変入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ に対し線形写像 $\underline{a}$:

$$A(N \times U, k) \rightarrow Y \text{ を } \underline{a}(e_{(n, u)})$$

$$= a(u^{n+1}) - a(u^n), e_{(n, u)} \in A(N \times U, k)$$

と定義する。ただし $u^0 = I$, そこで組 $\sigma = ((A(N \times U, k), S_r), \eta, \underline{a}, a(I))$ は a を実現する擬可到達な擬線形系である。

(2.4) 擬線形系の例

$F(N, Y) = \{\text{関数 } f: N \rightarrow Y\}$, $\gamma \in F(N, Y)$, $t \in N$ に対し $(S_t \gamma)(t) = \gamma(t+1)$ とすれば S_t は入力値集合 U に無関係であり, 時間集合 N についての左移動作用素となる。 $S_t \in L(F(N, Y))$ であり, 対 $(F(N, Y), S_t)$ は自由運動である。 $a \in F(U^*, Y)$ を任意の時不変入力応答関数とする。ここで写像 $\xi: U \rightarrow F(N, Y)$ を $u \in U, t \in N$ に対し $(\xi(u))(t) = a(\omega|u) - a(\omega)$

(ただし $|\omega| = t$ なる任意の $\omega \in U^*$) により定義する。更に線形写像 $O: F(N, Y) \rightarrow Y$ を $\gamma \mapsto \gamma(O)$ により定義する。

そこで組 $\sigma = ((F(N, Y), S_t), \xi, O, a(I))$ は a を実現する可観測な擬線形系である。

【定義 2.5】 $(X_1, F_1), (X_2, F_2)$ を自由運動とする。 $TF_1 = F_2T$ を満たす線形写像 $T: X_1 \rightarrow X_2$ を $(X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ の自由運動射という。 $g_1, g_2 \in F(U, X)$ に対し, $Tg_1 = g_2$ を満たす自由射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $((X_1, F_1), g_1) \rightarrow ((X_2, F_2), g_2)$ の入力写像付自由運動射という。

線形出力機構 $h_1, h_2 \in L(X, Y)$ に対し $h_1 = h_2T$ を満たす自由運動射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $((X_1, F_1), h_1) \rightarrow ((X_2, F_2), h_2)$ の出力(機構)付自由運動射という。

$\sigma_1 = ((X_1, F_1), g_1, h_1, h^0)$, $\sigma_2 = ((X_2, F_2), g_2, h_2, h^0)$ を擬線形系とする $Tg_1 = g_2$, $h_1 = h_2T$ を満たす自由運動射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の擬線形系射という。 T が全単射であるとき擬線形系射 $T: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ は同形射といわれる。

【補題 2.6】 $\sigma_1 = ((X_1, F_1), g_1, h_1, h^0)$, $\sigma_2 = ((X_2, F_2), g_2, h_2, h^0)$ を擬線形系とし T を: $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の擬線形系射とする。そのとき σ_1 の挙動 a_{σ_1} と σ_2 の挙動 a_{σ_2} とは等しい。すなわち, $a_{\sigma_1} = a_{\sigma_2}$ が成り立つ。

(証明) 擬線形系の挙動の定義 2.2 と擬線形系射の定義 2.5 に基づき直接計算により得られる。(証明終)

【定義 2.7】 擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対し線形写像 $G: A(N \times U, k) \rightarrow X$; $e_{(n,u)} \rightarrow F^n g(u)$ は自由運動射 $G: (A(N \times U, k), S_r) \rightarrow (X, F)$ であり, G は g に対応する線形入力写像といわれ, 線形写像 $H: X \rightarrow F(N, Y)$; $x \mapsto Hx[t \mapsto hF^t x]$ は自由運動射 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ であり, H は h に対応する線形観測写像といわれる。

【命題 2.8】 任意の入力写像付き自由運動 $((X, F), g)$ に対し, 線形入力写像 $G: (A(N \times U, k), S_r) \rightarrow (X, F)$ がただ一つ対応し, この対応は全単射である。

【命題 2.9】 任意の出力機構付き自由運動 $((X, F), h)$ に対し, 線形観測写像 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ がただ一つ対応し, この対応は全単射である。

【補題 2.10】 任意の自由運動射(特に線形入出力写像といわれる) $A: (A(N \times U, k), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ に対し時不変入力応答関数 $a \in F_s(U^*, Y)$ が対応し

$$a(\omega|u) - a(\omega) = (A(e_{(0,u)}))(t),$$

$$\text{ただし } \omega \in U^*, |\omega| = t$$

によりこの対応は全単射である。

《実現定理 2.11》 $a \in F(U^*, Y)$ を任意の時不変入力応答関数とする。そのとき, つぎの 1), 2) の擬線形系は a の正準実現系である。

$$1) ((A(N \times U, k)/\ker A, S_r), \eta, \underline{a}, a(I))$$

ただし A は a に対応する線形入出力写像であり, S_r は S_r から $(A(N \times U, k)/\ker A)$ に誘導された写像であり, η は $u \in U$ に対し $\eta(u) := [e_{(0,u)}]$, $\underline{a}: A(N \times U, k)/\ker A \rightarrow Y$ は $\underline{a}[e_{(n,u)}] = a(u^{n+1}) - a(u^n)$ である。

$$2) ((\langle S^n(\xi(U)) \rangle, S_t), \xi, 0, a(I)).$$

ただし $S^n(\xi(U)) := \{S^i(\xi(u)); u \in U, 0 \leq i \leq n, (\xi(u))(s) = a(\omega|u) - a(\omega), |\omega| = s, \omega \in U^*\}$ である(存在部分)。

σ_1, σ_2 を $a \in F(U^*, Y)$ の正準実現系とする。そのとき同形射 $T: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ がただ一つ存在する(一意部分)。

3. 有限次元正準擬線形系

この章では, 状態空間が有限次元である擬線形系を考察する。

状態空間 X が有限次元 $[n \text{ 次元}]$ であるとき, 自由運動 (X, F) を有限次元 $[n \text{ 次元}]$ 自由運動といい, それを状態構造とする擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ を有限次元 $[n \text{ 次元}]$ 擬線形系という。

体 k 上の n 次元空間に関してつぎの事実がある。

事実: 「体 k 上の n 次元線形空間は k^n に同形であり, $L(k^n)$ は $k^{n \times n}$ ($n \times n$ 行列の集合)に同形である。」

したがって, n 次元自由運動 (X, F) を一般性を失うことなく (k^n, F) , ただし $F \in k^{n \times n}$ とすることができる。出力値集合 Y は k^p , すなわち多出力系として議論できるが, 以後記号の簡単化のため, 一出力系, すなわち $Y = k$ と仮定する。そのとき線形出力機構 $h: X \rightarrow k$ は $h \in k^{1 \times n}$ と考えられる。

入力値集合 U が有限な場合の有限次元擬線形系について考察する。すなわち, $U := \{u_i; 1 \leq i \leq m\}$ とする。このとき, 入力写像付き自由運動 $((k^n, F), g)$ の写像 $g: U \rightarrow k^n$ が $\{g(u_i); 1 \leq i \leq m\}$ により表わされる。したがって状態空間に対する入力の作用が m 個のベクトルにより完全に表わすことができる。

Fig. 1 A circuit with the N-channel FET

Fig. 2 A characteristic of the N-channel FET

最初に、入力値集合 U を有限とすることがそれほど特殊でないことを示す。

3.1 有限入力値集合

この節で入力値集合が有限の場合の例を示す。

(3.1) $U = \{u_1, u_2\}$ の場合

on-off 入力はこの場合になる。また、制御対象が最適制御されていてその最適解が Bang-Bang 制御のとき、この場合にあたる。

(3.2) $U = R$ の場合

入力写像付き自由運動 $((k^n, F), g)$ の写像 $g: U \rightarrow k^n$ が $u_i \in U (1 \leq i \leq m)$ を折点としての区分的線形関数 (piecewise-linear function) とする⁵⁾。そのとき写像 g は $\{g(u_i) \in k^n; 1 \leq i \leq m\}$ により決定される。

3.2 有限次元擬線形系の例

(3.3) FET のある電気回路

擬線形系の具体例として FET のある電気回路があることが示された¹⁾。それは次式で表わされる (Fig. 1, 2 参照)。

$$L di(t)/dt + Ri(t) + V_0 - f(V_{GS}) = 0$$

ただし $f(V_{GS})$ はドレイン・ソース間電圧であり、ゲート・ソース間電圧 V_{GS} に対し非線形特性を表わす。ここでゲート・ソース間電圧 V_{GS} を入力 $\omega(t)$ 、電流 $i(t)$ を出力 $\gamma(t)$ とし後退差分により離散時間系にすればつぎの擬線形系が得られる。

$$\begin{cases} i(t+1) = Fi(t) + g(\omega(t+1)) \\ \gamma(t) = i(t) \end{cases}$$

ただし、 Δt をサンプリング時間とし、

$$F := L/(L + \Delta t \cdot R)$$

および

$$g(V_{GS}) := \Delta t \cdot (V_0 - f(V_{GS})) / (L + \Delta t \cdot R)$$

とする。

電解効果トランジスタの $V_{GS} - f(V_{GS})$ 特性を区分的線形法 (piecewise-linear method) に従えば、写像 $g: U \rightarrow R$ は (3.2) で示したように $\{g(u_i); u_i \in U (1 \leq i \leq m)\}$ は折点である} により完全に決定される。

この区分的線形法はトランジスタ、ダイオードなどの非線形特性を取り扱うのに用いられている⁵⁾。

ただし R は実数の集合である。

3.3 擬可到達性

本節では、有限次元擬線形系の擬可到達性を論じる。証明は付録 A を参照されたい。

n 次元入力写像付き自由運動 $((k^n, F), g)$ および正の整数 $i \in N$ に対し

$$LR(i) = \left\langle \left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} g(\omega(j)); \omega \in U^*, |\omega| \leq i+1 \right\} \right\rangle$$

とする。このとき、つぎの関係式が成り立つ。

$$LR(0) = \langle g(u); u \in U \rangle$$

$$LR(i+1) = LR(i) + \langle \lambda Fx + g(u); \lambda \in k, x \in LR(i), u \in U \rangle.$$

したがって、 $LR(0) \subseteq LR(1) \subseteq \dots \subseteq LR(n) \subseteq \dots \subseteq LR(\infty)$ なる系列が得られる。

ある正数 p に対し、 $\langle A(N \times U, k)_p \rangle := \{ \sum_{q,u} \lambda(q, u) e_{(q,u)} \in A(N \times U, k), q \leq p \}$ とし、 G を g に対応する線形入力写像とすれば $LR(p) = G(\langle A(N \times U, k)_p \rangle)$ となる。ここで、 $G_p := GJ_p$ とする。ただし J_p は $\langle A(N \times U, k)_p \rangle \rightarrow A(N \times U, k)$ の標準的単射である。

【補題 3.4】 $i \geq 1$ に対し $LR(i-1) = LR(i)$ ならば $LR(i) = LR(i+1)$ が成り立つ。

(証明) 付録 (A.1) を参照。

【補題 3.5】 任意の入力写像付 n 次元自由運動 $((k^n, F), g)$ に対し $LR(n-1) = LR(\infty)$ 、すなわち、 $im G_{n-1} = im G$ が成り立つ。

(証明) 付録 (A.2) を参照。

可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} g(\omega(j)); \omega \in U^* \right\}$ の線形包が k^n に一致するとき入力写像付き自由運動 $((k^n, F), g)$ は擬可到達であるといわれる。

【補題 3.6】 $((k^n, F), g)$ を入力写像付き自由運動とする。そのとき $((k^n, F), g)$ が擬可到達であるための必要十分条件は $LR(n-1) = k^n$ であることである。

(証明) 付録 (A.3) を参照。

補題 3.6 と $LR(n-1)$ の定義から容易につぎの命題が得られる。

【命題 3.7】 $((k^n, F), g)$ を入力写像付き自由運動とする。そのとき $((k^n, F), g)$ が擬可到達であるための必

要十分条件は

$\text{rank}[g(u_1)Fg(u_1)\cdots F^{n-1}g(u_1)g(u_2)Fg(u_2)\cdots F^{n-1}g(u_2)\cdots g(u_m)Fg(u_m)\cdots F^{n-1}g(u_m)]=n$ となることである。

3.4 可観測性

任意の $m \in N$ に対し $hF^m x_1 = hF^m x_2$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つとき、出力機構付き自由運動 $((X, F), h)$ は可観測であるといわれる。

ある正数 i に対して $LO(i) := \left\langle \left\{ \sum_{m=1}^i \lambda_m h F^m ; \lambda_m \in k \right\} \right\rangle$ とする。

このとき、 $LO(0) \subseteq LO(1) \subseteq \cdots \subseteq LO(n) \subseteq \cdots \subseteq LO(\infty)$ なる系列が得られる。 H を h に対応する線形観測写像、 $P_q: F(N, Y) \rightarrow F(q, Y)$ を標準的全射とし、 $H_q := P_q H$ と定義する。ただし $q := \{0, 1, \dots, q\}$ である。そこで $\ker H_q = \{x \in X; h \in LO(q), hx = 0\}$ となる。

【補題 3.8】 出力付き自由運動 $((k^n, F), h)$ に対し $LO(n-1) = LO(\infty)$ が成り立つ。

(証明) 付録(A.5)を参照。

【補題 3.9】 任意の出力付き自由運動 $((k^n, F), h)$ に対し $(\ker H_{n-1}, F)$ は (k^n, F) の部分自由運動である。したがって $((k^n / \ker H_{n-1}, F), h)$ は可観測な出力付き自由運動である。

(証明) 付録(A.6)を参照。

【補題 3.10】 $((k^n, F), h)$ を出力付き自由運動とする。 $((k^n, F), h)$ が可観測であるための必要十分条件は、 $LO(n-1) = k^{1 \times n}$ が成り立つことである。

(証明) 付録(A.7)を参照。

補題(3.10)を容易につぎの命題に書き換えられる。

【命題 3.11】 $((k^n, F), h)$ を出力付き自由運動とする。 $((k^n, F), h)$ が可観測であるための必要十分条件は $\text{rank}[h^T(hF)^T \cdots (hF^{n-1})^T] = n$ が成り立つことである。

【補題 3.12】 任意の擬線形系 $\sigma = ((k^n, F), g, h, h^0)$ に対し、 $((LO(n-1)/\ker H_{n-1}, F), g, h, h^0)$ は σ と同じ挙動をもつ正準擬線形系である。

(証明) 付録(A.8)を参照。

3.5 擬可到達標準形

本節において、入力写像付自由運動の同形類の代表元を導出するために積集合 $N \times U$ に全順序関係を定義する。

【定義 3.13】 入力値集合 U を $U := \{u_j; 1 \leq j \leq m\}$ とし写像 $\| : N \times U \rightarrow N$ を $(i, u_j) \mapsto \| (i, u_j) \| := m \times i + j$ と定義し、 $\| (i, u_j) \|^*$ を $(i, u_j) \in N \times U$ の数値という。ここで集合 $N \times U$ に対し全順序関係をこの数値により定義する。すなわち

$$(a, u_b) \geq (p, u_q) \Leftrightarrow \| (a, u_b) \| \geq \| (p, u_q) \|^*$$

とする。

【定義 3.14】 $((k^n, F_s), g_s)$ を擬可到達な入力写像付き自由運動とし正数 $i \in N$ に対し、 $I_i, J_i \in N, 1 \leq J_i \leq m$ とする。

そのとき、 $e_i = F_s^{J_i} g_s(u_{J_i})$ なる系列 $\{(I_i, u_{J_i}) \in N \times U; 1 \leq i \leq n\}$ が

$$\textcircled{1} \quad (I_1, u_{J_1}) < (I_2, u_{J_2}) < \cdots < (I_n, u_{J_n})$$

$$\textcircled{2} \quad I_i < i \quad (\text{ただし } 1 \leq i \leq n).$$

$$\textcircled{3} \quad (I_j, u_{J_j}) < (p, u_q) < (I_{j+1}, u_{J_{j+1}}) \text{ を満たす任意の } (p, u_q) \in N \times U \text{ に対し}$$

$$F_s^p g_s(u_q) = \sum_{i=1}^j \alpha_i e_i, \alpha_i \in k.$$

を満たすとき、 $((k^n, F_s), g_s)$ は擬可到達標準形といわれる。

ただし、 $e_i := [00 \cdots 010 \cdots 0]^T$ であり、 T は転置を表わす。

【定理 3.15】 任意の擬可到達な入力写像付自由運動 $((k^n, F), g)$ に対し、それと同形な擬可到達標準形がただ一つ存在する。

(証明) 付録(A.9)を参照。

(注意) 擬可到達な入力写像付自由運動

$((k^n, F), g)$ はいくつかの同形類に分類されるが、この定理により同形類の代表元が擬可到達標準形で表わされることを示す。

3.6 可観測標準形

本節の内容は 3.5 節の内容と相対である。したがって、可観測標準形を定義し、それによる可観測な出力機構付自由運動 $((k^n, F), h)$ の同形類の表現定理を与える。

【定義 3.16】 $((k^n, F), h)$ を可観測な出力機構付自由運動とする。そのとき、 $e_i^T = hF^{i-1}$ (ただし、 $1 \leq i \leq n$) を満たすとき $((k^n, F), h)$ は可観測標準形といわれる。

(注意) $((k^n, F), h)$ が可観測標準形であるとき $h = e_1^T$ である。

【定理 3.17】 任意の可観測な出力機構付自由運動 $((k^n, F), h)$ に対し、それと同形な可観測標準形 $((k^n, F_0), e_1^T)$ がただ一つ存在する。

(証明) 付録(A.10)を参照。

3.7 擬可到達標準系・可観測標準系

本節では、3.5, 3.6 節の結果を用いて有限次元正準擬線形系の同形類の表現定理を与える。

【定義 3.18】 正準擬線形系 $\sigma_s = ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ の入力写像付自由作用 $((k^n, F_s), g_s)$ が擬可到達標準形(定義 3.14 参照)のとき、 σ は擬可到達標準系といわれる。擬可到達標準系 $\sigma_s = ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ の F_s については Fig. 3 を参照。ただし、図中の I はそれぞれ適当な大きさの恒等行列である。また、 m_i は数値の集合 $\{(I_i, u_{J_i}) \in N \times U; 1 \leq i \leq n\}$ において、 $I_i = 0$ となる u_{J_i} の個

Fig. 3 F_s of the quasi-reachable standard system $\sigma_s = ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ defined in (3.18)

数であり, m_2 は $I_i = 1$ となる u_{j_i} の個数である. $\dots m_L$ は $I_i = L-1$ となる u_{j_i} の個数である. 更に, $\sum_{i=1}^L m_i = n$ が成り立つ.

正準擬線形系 $\sigma_o = ((k^n, F_o), g_o, h_o, h^0)$ の出力機構付自由運動 $((k^n, F_o), h_o)$ が可観測標準形(定義 3.16 参照)のとき, σ は可観測達標準系といわれる.

《定理 3.19》 任意の正準擬線形系 $\sigma = ((k^n, F), g, h, h^0)$ に対し, それと同形な擬可到達標準系 $\sigma_s = ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ がただ一つ存在する.

(証明) 付録(A.11)を参照.

《定理 3.20》

任意の正準擬線形系 $\sigma = ((k^n, F), g, h, h^0)$ に対し, それと同形な擬可到達標準系 $\sigma_q = ((k^n, F_o), g_o, e_1^T, h^0)$ がただ一つ存在する.

(証明) 付録(A.12)を参照.

(注意) 定理 3.19, 3.20 によれば, 与えられた時不変入力応答関数を実現する有限次元正準擬線形系が存在すればそれを実現する擬可到達標準系, 可観測標準系がそれぞれ必ずただ一つ存在する.

4. 有限次元擬線形系の存在条件

この章では, 時不変入力応答関数が有限次元擬線形系の挙動であるための必要十分条件を与える.

【定義 4.1】 時不変入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ に対応する線形入出力写像: $(A(N \times U, k), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_i)$ を A とする. 任意の $(s, u) \in N \times U, t \in N$ に対し

$$(A(e_{(s,u)}))(t) = a(u^{s+t+1}) - a(u^{s+t})$$

であるので, a はつぎの無限行列 $\mathcal{H}_a$ で表わすことができる. この $\mathcal{H}_a$ を a の入出力行列という.

$$\mathcal{H}_a = \begin{bmatrix} & & (s, u) \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ & & \vdots \\ t & \dots & a(u^{s+t+1}) - a(u^{s+t}) \end{bmatrix}$$

$p, q \in N$ に対し, 線形写像 $A_{qp}: \langle A(N \times U, k)_p \rangle \rightarrow F(q, Y)$ を標準的単射 $J_p: \langle A(N \times U, k)_p \rangle \rightarrow A(N \times U, k)$, 標準的全射 $P_q: F(N, Y) \rightarrow F(q, Y)$ に対し $A_{qp} := P_q A J_p$ と定義する. そのとき A_{qp} は $\mathcal{H}_a$ の部分入出力行列 $\mathcal{H}_{aqp}$,

$$\mathcal{H}_{aqp} := [a(u^{s+t+1}) - a(u^{s+t})], s \leq p, t \leq q$$

で表わすことができる.

(注意) 時不変入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ に対し関数 $GI_a: U \rightarrow F(N, Y): u \mapsto [t \mapsto a(u^{t+1}) - a(u^t)]$ を a の補正一般インパルス応答関数という. 定義 4.1 から判るように a に対して GI_a がただ一つ対応する. 時不変性を用いると $a(\omega)$, $\omega \in U^*$ は次式となる.

$$a(\omega) = a(1) + \sum_{j=1}^{|\omega|} \{GI_a(\omega(j))\}(|\omega| - j)$$

《定理 4.2》 時不変入力応答関数 $a \in F(N, Y)$ に対し, つぎの条件は同等である.

- ① a は n 次元正準擬線形系の挙動である.
- ② 集合 $\{Si(\zeta(u)); u \in U, 0 \leq i \leq n, (\zeta(u))(s) = a(\omega|u) - a(\omega), |\omega| = s, \omega \in U^*\}$ は n 個の 1 次独立ベクトルをもつ.
- ③ a の入出力行列 $\mathcal{H}_a$ の階数は n である.

すなわち, $\mathcal{H}_a$ から任意に $(n+1)$ 個の行と列を取り出してできた $(n+1) \times (n+1)$ 行列は非正則であり, ある n 個の行と列を取り出してできた $n \times n$ 行列 ($\mathcal{H}_{a_{n-1, n-1}}$ から選び出すことができる) は正則である.

(証明) 付録(B.1)を参照

5. 有限次元擬線形系の実現手順

時不変入力応答関数に対しそれを実現する有限次元擬線形系が存在するための同等な条件を定理 4.2 で与えた. 本章ではその条件が満たされた場合に与えられた時不変入力応答関数を実現する有限次元正準擬線形系, 特に擬可到達標準系を求める手順を与える.

《定理 5.1》 時不変入力応答関数 $a \in F(N, Y)$ が定理 5.2 の条件を満たすとする. そのとき, a を実現する擬可到達標準系 $\sigma_s = ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ がつぎの手順により得られる.

- ① 集合 $\{Si(\zeta(u)); u \in U, 0 \leq i \leq n-1\}$ の中から集

合 $N \times U$ の数値の順に、1 次独立ベクトルを選ぶ。

② 状態空間を k^n とする。写像 $g_s: U \rightarrow k^n$ を $I_i=0$ なる $u_{ji} \in U$ に対し、 $g_s(u_{ji}) = e_i$ とし $(0, u_{ji}) < (0, u_j) < (0, u_{j+1})$ (または $(1, u_{j+1})$) なる $u_j \in U$, $\xi(u_j) = \sum_{i=1}^i \alpha_i \xi(u_{ji})$ に対し $g_s(u_j) = \sum_{i=1}^i \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in k$ とする。

③ 線形写像 $h_s: k^n \rightarrow Y$ を $h_s = [a(u_{j_1}^{j_1+1}) - a(u_{j_1}^{j_1}), a(u_{j_2}^{j_2+1}) - a(u_{j_2}^{j_2}), \dots, a(u_{j_n}^{j_n+1}) - a(u_{j_n}^{j_n})]$ とする。

④ $F_s := [f_1, f_2, \dots, f_n] \in k^{n \times n}$, $f_i \in k^n$ を $S_i^{j+1} \xi(u_{ji}) = \sum f_{ij} S_i^j \xi(u_{ji})$, $f_{ij} \in k$ に対し $f_i := [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}]^T$ と定義する。

⑤ $h^0 = a(I)$ とする。

(証明) 付録(B.2)を参照。

(5.2) 実験手順の例題

入力値集合 U を $U := \{u_1, u_2, u_3\}$ とする。

① 集合 $N \times U$ の数値の順に、1 次独立ベクトルの集合 $\{\xi(u_1), \xi(u_2), S_i \xi(u_1), S_i \xi(u_2), S_i^2 \xi(u_2)\}$ を選ぶ。

② 状態空間を k^5 とする。写像 $g_s: U \rightarrow k^5$ を $g_s(u_1) = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $g_s(u_2) = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, $g_s(u_3) = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$ とする。

ただし、 $\xi(u_3) = \alpha_1 \cdot \xi(u_1) + \alpha_2 \cdot \xi(u_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$ 。

③ 線形写像 $h_s: k^n \rightarrow Y$ を $h_s = [a(u_1) - a(I), a(u_2) - a(I), a(u_1^2) - a(u_1), a(u_2^2) - a(u_2), a(u_3^2) - a(u_2^2)]$ とする。

④ $F_s \in k^{5 \times 5}$ を次式とする。

$$F_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{31} & 0 & f_{51} \\ 0 & 0 & f_{32} & 0 & f_{52} \\ 1 & 0 & f_{33} & 0 & f_{53} \\ 0 & 1 & f_{34} & 0 & f_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f_{55} \end{bmatrix}$$

ただし

$$S_i^2 \xi(u_1) = f_{31} \xi(u_1) + f_{32} \xi(u_2) + f_{33} S_i \xi(u_1) + f_{34} S_i \xi(u_2),$$

$$S_i^3 \xi(u_2) = f_{51} \xi(u_1) + f_{52} \xi(u_2) + f_{53} S_i \xi(u_1) + f_{54} S_i \xi(u_2) + f_{55} S_i^2 \xi(u_2) \text{ である。}$$

⑤ $h^0 = a(I)$ とする。

6. おわりに

n 次元擬線形系が擬可到達であるための条件(命題 3.7) また、可観測であるための条件(命題 3.11)によりこれらの条件は多入力・1 出力系である有限次元線形系の可制御および可観測の条件と同じとなっている^{6),7)}。したがって、これらの概念が線形系の素直な拡張であることがわかるであろう。また、基底の選び方により、擬可到達標準系が多入力系である有限次元線形系のコンパニオン・フォーム⁷⁾に対応することがわかるであろう。また、

可観測標準系も 1 出力系である有限次元線形系のコンパニオン・フォーム⁷⁾に対応する。

時不変入力応答関数が有限次元擬線形系の挙動であるための条件(入出力行列の階数による条件)は離散時間・線形系のハンケル行列の階数による条件⁶⁾の直接的拡張になっている。また、与えられた時不変入力応答関数からそれを実現する擬線形系の実現手順が導出された。

したがって、本論文の有限次元擬線形系の実現理論は線形系の理論体系の拡張になっていることは容易にわかる。

線形系・非線形系の実現問題が数多く扱われているが擬線形系はほかでは扱われていない^{8),9)}。たとえば、入出力関係がボルテラ級数のある特質を扱った文献⁹⁾はあるが、擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ の g が任意の非線形関数: $U \rightarrow X$ であるため、時不変入力応答関数はボルテラ級数による分類化はできない。本論文の時不変入力応答関数(入出力関係)は定義 4.1 の注意により補正一般インパルス応答関数により特徴づけられることがわかる。

本論文の有限次元擬線形系の実現理論により擬線形系の部分実現・オンライン部分実現理論が取扱い可能になった¹¹⁾。それらの詳細については別の論文で論じる。

図の作成に協力して頂いた岐阜大学佐藤俊介技官に感謝致します。

参 考 文 献

- 1) 長谷川, 松尾: 離散時間・擬線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, **28-2**, 199/207(1992)
- 2) 松尾, 新家: 連続時間アファイン力学系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, **17-1**, 56/63(1981)
- 3) 新家, 松尾: 離散時間線形表現系とアファイン力学系の関係, 計測自動制御学会論文集, **17-3**, 350/357(1981)
- 4) T. Matsuo: Realization Theory of Continuous Time Dynamical Systems, Lecture Notes in Control & Information Sciences, **32**, Springer-Verlag (1981)
- 5) L. O. Chua: Introduction to Nonlinear Network Theory, McGraw-Hill (1969)
- 6) R. E. Kalman, P. L. Falb & M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill (1969)
- 7) C.-T. Chen: Introduction to Linear System Theory, Holt, Rinehart and Winston (1970)
- 8) S. P. Banks: Mathematical Theories of Nonlinear Systems, Prentice Hall (1988)
- 9) M. A. Kaashoek, et al. Editors: Realization and Modelling in System Theory, Proceedings of the International Symposium MTNS-89, 1, Progress in Systems and Control Theory, 3, Birkhauser (1990)
- 10) S. Monaco and N. Cyrot: Finite Volterra Series and Input-output Approximations of Non-linear Discrete-time Systems, Int. J. Contr., **45-5**, 1771/1787 (1987)
- 11) 長谷川, 松尾: 離散時間・擬線形系の実時間部分実現理論, 第 35 回自動制御連合講演会前刷, 69/70(1992)

《付録.A》

(A.1) 補題 3.4 の証明

(証明) 関係式 $LR(i+1)=LR(i)+\langle\lambda Fx+g(u); \lambda \in k, x \in LR(i), u \in U\rangle$ および仮定 $LR(i-1)=LR(i)$ により $LR(i+1)=LR(i-1)+\langle\lambda Fx+g(u); \lambda \in k, x \in LR(i-1), u \in U\rangle=LR(i)$ が得られる。(証明終)

(A.2) 補題 3.5 の証明

(証明) $LR(n-1) \subseteq LR(n)$ ならば補題 3.1 により $LR(n-2) \subseteq LR(n-1)$ である。更にその補題によれば、 $LR(0) \subseteq LR(1) \subseteq \dots \subseteq LR(n-1) \subseteq LR(n)$ となり、 $k^n \subseteq LR(n)$ となるから矛盾する。したがって、 $LR(n-1) = LR(n)$ であり $LR(n-1) = LR(\infty)$ である。

(証明終)

(A.3) 補題 3.6 の証明

(証明) $((k^n, F), g)$ を擬可到達であるとする。そのとき、定義により $k^n = LR(\infty)$ である。補題 3.5 を用いれば、 $LR(n-1) = k^n$ が得られる。逆は明らかである。

(証明終)

(A.4) 補題

$((k^n, F), g)$ を擬可到達な入力写像付き自由運動とする。そのとき、任意の整数 $j(1 \leq j \leq n)$ に対して $LR(j-1)$ は j 次元以上である。

(証明) $j(1 \leq j \leq n)$ に対し $LR(j-1)$ に j 個の独立なベクトルがないとする。そこで $LR(j-2) \subseteq LR(j-1)$ が成り立つとすると補題 3.4 により $LR(0) \subseteq LR(1) \subseteq \dots \subseteq LR(j-2) \subseteq LR(j-1)$ となり j 個の独立なベクトルがないことと矛盾する。ゆえに $LR(j-2) = LR(j-1) = LR(\infty)$ が成り立ち、仮定により j 個の独立なベクトルがない。このことは $((k^n, F), g)$ の擬可到達性と矛盾する。

(証明終)

(A.5) 補題 3.8 の証明

(証明) 補題 3.5 と同様にして証明できる。(証明終)

(A.6) 補題 3.9 の証明

(証明) H を h に対応する線形観測写像とする。補題 3.8 により $LO(n-1) = LO(\infty)$ が成り立つ。したがって、 $\ker H_{n-1} = \ker H$ が成り立ち、 H が $((k^n, F) \rightarrow (F(N, Y), S))$ の自由運動射であるから、 $(\ker H_{n-1}, F)$ は部分自由運動となる。したがって、 $((k^n/\ker H_{n-1}, \underline{F}), \underline{h})$ が定義できて、可観測となる。ただし、 $\underline{F}: k^n/\ker H_{n-1} \rightarrow k^n/\ker H_{n-1}; [x] \mapsto [Fx]$ であり、 $\underline{h}: k^n/\ker H_{n-1} \rightarrow Y; [x] \mapsto hx$ である。

(証明終)

(A.7) 補題 3.10 の証明

(証明) 補題 3.9 と可観測の定義により得られる。

(証明終)

(A.8) 補題 3.12 の証明

(証明) 補題 3.5, 3.9 により得られる。(証明終)

(A.9) 定理 3.15 の証明

(証明) 集合 $\{F^i g(u_i) \in k^n; i, j \in N\}$ から $N \times U$ の数値の順に n 個の 1 次独立ベクトル $\{F^{i_i} g(u_{j_i}); (i_i, u_{j_i}) \in N \times U, 1 \leq i \leq n\}$ を選ぶ。そこで、補題 A.4 により $I_i < i, 1 \leq i \leq n$ を満たす線形写像 $T: k^n \rightarrow k^n$ を $TF^{i_i} g(u_{j_i}) = e_i, 1 \leq i \leq n$ により定義すれば T は正則行列である。 $F_s := TFT^{-1}$ とすると $F_s \in k^{n \times n}$ である。 $(0, u_{j_i}), (0, u_{j_{i+1}}) \in N \times U$ を 1 次独立ベクトルに選ばれた数値とする。そこで $(0, u_q) < (0, u_q) < (0, u_{j_{i+1}})$ を満たす任意の $(0, u_q) \in N \times U, g(u_q) = \sum_{i=1}^j \alpha_i g(u_{j_i}), \alpha_i \in k$ に対し $g_s(u_q) = \sum_{i=1}^j \alpha_i e_i$ とする。そのとき、 $((k^n, F_s), g_s)$ は入力写像付き自由運動となり更に $g_s = Tg$ であるので、 T は入力写像付自由運動射: $((k^n, F), g) \rightarrow ((k^n, F_s), g_s)$ である。 $TF^{i_i} g(u_{j_i}) = e_i, 1 \leq i \leq n$ であるので $((k^n, F_s), g_s)$ は擬可到達であり T は $((k^n, F), g) \rightarrow ((k^n, F_s), g_s)$ の全単射な入力写像付自由運動射である。 $((k^n, F_s), g_s)$ が擬可到達標準形であることはその定義と求め方とから容易にわかる。一意であることは写像 $T: k^n \rightarrow k^n$ が一意であることから明らかである。(証明終)

(A.10) 定理 3.17 の証明

(証明) $((k^n, F), h)$ が可観測であるから $\text{rank}[h^T(hF)^T \dots (hF^{n-1})^T] = n$ が成り立つ。そこで線形写像 $T: k^n \rightarrow k^n$ を

$$T := \begin{bmatrix} h \\ hF \\ \vdots \\ hF^{n-1} \end{bmatrix}$$

により定義すれば、 T は正則行列である。

$F_0 := TFT^{-1}$ とすると、 $F_0 \in k^{n \times n}$ であり $((k^n, F_0), e_1^T)$ は出力機構付自由運動である。明らかに、 $e_i^T = e_1^T F_0^{i-1}$ (ただし、 $1 \leq i \leq n$) を満たす。したがって $((k^n, F_0), e_1^T)$ は可観測標準形である。 T は $((k^n, F), h) \rightarrow ((k^n, F_0), e_1^T)$ の出力付自由運動射である。 $((k^n, F_0), e_1^T)$ が一意であることは T の一意性から明らかである。(証明終)

(A.11) 定理 3.19 の証明

(証明) $\sigma = ((k^n, F), g, h, h^0)$ を任意の正準擬線形系とする。定理 3.15 の証明(付録 A.9 参照)での擬可到達標準形 $((k^n, F_s), g_s)$ と全単射な入力写像付き自由運動射 $T: ((k^n, F), g) \rightarrow ((k^n, F_s), g_s)$ に対し $h_s := hT^{-1}$ とすれば $((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ は擬可到達標準系となる。更に T は $((k^n, F), g, h, h^0) \rightarrow ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ の全単射な擬線形射となる。ゆえに、補題 2.6 により $((k^n, F), g, h, h^0)$ の挙動と $((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ の挙動とは

等しい。

(証明終)

(A.12) 定理 3.20 の証明

(証明) $\sigma = ((k^n, F), g, h, h^0)$ を任意の正準擬線形系とする。定理 3.17 の証明(付録 A.10 参照)での可観測標準形 $((k^n, F_0), e_i^T)$ と全単射な出力付き自由運動射 $T : ((k^n, F), h) \rightarrow ((k^n, F_0), e_i^T)$ に対し $g_0(u_i) := Tg(u_i)$ (ただし, $1 \leq i \leq m$) とすれば $((k^n, F_0), g_0, e_i^T, h^0)$ は可観測標準系となる。更に T は $((k^n, F), g, h, h^0) \rightarrow ((k^n, F_0), g_0, e_i^T, h^0)$ の全単射な擬線形系射である。ゆえに、補題 2.6 により $((k^n, F), g, h, h^0)$ の挙動と $((k^n, F_0), g_0, e_i^T, h^0)$ の挙動とは等しい。

(証明終)

《付録. B》

(B.1) 定理 4.2 の証明

(証明) ① $\Rightarrow$ ③. $((k^n, F), g, h, h^0)$ を a の正準実現系, A を a に対応する線形入出力写像: $(A(N \times U, k), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_l)$ とする。正の整数 p, q (ただし, $\geq n-1$) に対し

$$G_p : \langle A(N \times U, k)_p \rangle \rightarrow k^n,$$

$H_q : k^n \rightarrow F(q, Y)$ を 3.3, 3.4 節で定義したものとする。そのとき、補題 3.6, 補題 3.10 により $\text{im} G_p = k^n$, $\ker H_q = \{0\}$ となる。 $A_{qp} = H_q G_p$ であるから, $\text{im} A_{qp}$ の次元は n である。したがって A_{qp} に対応する部分入出力行列 $\mathcal{H}_{a_{qp}}$ は $\text{rank } \mathcal{H}_{a_{qp}} = n$ を満たす。ゆえに③が成り立つ。

つぎに③ $\Rightarrow$ ②を示す。 $(I_i, u_{I_i}) \in N \times U$ (ただし $1 \leq i \leq n$), $s_1, s_2, \dots, s_n \in N$ に対し $[a(u_{I_i}^{s_j+I_i+1}) - a(u_{I_i}^{s_j+I_i})] (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$ を $n \times n$ の正則行列とする。 $1 \leq i \leq n$ に対し $\{a(u_{I_i}^{s_j+I_i+1}) - a(u_{I_i}^{s_j+I_i}) ; 1 \leq j \leq n\}$ は 1 次独立であるから $\{S_l^i(\zeta(u_{I_i})), 1 \leq i \leq n\}$ は 1 次独立である。したがって、任意の $(I, u) \in N \times U$ に対し $a(u^{s_{j+I}+1}) - a(u^{s_j+I}) = [a(u_{I_i}^{s_j+I_i+1}) - a(u_{I_i}^{s_j+I_i})] b[I, u]$, ただし, $b(I, u) = [b_1(I, u) b_2(I, u) \cdots b_n(I, u)]^T \in k^n$ と表わせる。そこで任意の $s \in N$ に対し

$$\begin{aligned} & a(u^{s+I+1}) - a(u^{s+I}) \\ &= \sum_{i=1}^n b_i(I, u) \{a(u_{I_i}^{s+I_i+1}) - a(u_{I_i}^{s+I_i})\} \end{aligned}$$

が成立する。成立しなければ, $\mathcal{H}_a$ の rank が $n+1$ 以上

になるから、ゆえに

$$S_l^i(\zeta(u)) = \sum_{j=1}^n b_j(I, u) S_l^j(\zeta(u_{I_j}))$$

であり②が成立する。

つぎに② $\Rightarrow$ ①を示す。実現定理 2.11 より明らかである。

(証明終)

(B.2) 定理 5.1 の証明

(証明) 集合 $\{S_l^i(\zeta(u_{I_i})) ; 1 \leq i \leq n\}$ に対し線形写像 $T : \langle S_l^i(\zeta(U)) \rangle \rightarrow k^n$ を

$$TS_l^i(\zeta(u_{I_i})) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

とする。条件②により, $T\zeta = g_s$ であり, 条件③により $h_s T = 0$ が成立する。条件⑤により $TS_l = F_s T$ が成り立つ。したがって T は $(\langle S_l^i(\zeta(U)) \rangle, S_l, \zeta, 0, a(I)) \rightarrow ((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ の全単射な擬線形系射である。したがって、補題 2.6 により $a\sigma = a$ となる。 $((k^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ が擬可到達標準系であることは写像 T の性質と集合 $\{(I_i, u_{I_i}) \in N \times U ; 1 \leq i \leq n\}$ の選び方による。

(証明終)

【著者紹介】

長谷川 泰道 (正会員)

1976 年, 名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。現在岐阜大学工学部電子情報工学科助教授。特に離散時間非線形系のシステム理論および 2 次元図形の研究に従事(工学博士)。

故 松尾 強

1961 年, 名古屋大学工学部電気学科卒業。同年富士電機製造(株)入社。63 年名古屋大学助手。72~75 年フロリダ大学数学的システム理論センター研究員。84~89 年名古屋大学工学部講師および助教授。89 年東邦大学理学部教授。93 年 4 月死去。制御理論, システム理論の研究に従事した(工学博士)。