出力フィードバックによる閉ループスタックルベルグ戦略

鈴 村 文 寛*・水 上 孝 一**

Closed-Loop Stackelberg Strategy via Output Feedback

Fumihiro SUZUMURA* and Koichi MIZUKAMI**

The purpose of this paper is to solve two-level closed-loop Stackelberg game problem for a linear time-invariant system described by the following state equation and output equation.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 u_1 + B_2 u_2 \\ y = Cx \end{cases}$$

The Stackelberg strategy for each decision maker u_i is generated via output feedback with constant feedback gain, that is,

$$u_i = -F_i y$$

The Stackelberg strategy via output feedback is effective for the problem with incomplete information with respect to state value. The cost functional associated with u_i is

$$\bar{J}_i = E \left\{ (1/2) \int_0^\infty [x^T Q_i x + u_1^T R_{i1} u_1 + u_2^T R_{i2} u_2] dt \right\}$$

that is, $\bar{J}_i$ is trace criteria which is interpreted as expected value of quadratic criteria. Assume the initial state of system is uniformly distributed over the unit sphere. We show that there exist optimal Stackelberg strategies to this problem.

In this paper, necessary conditions for a optimal Stackelberg strategy via output feedback are given in the infinite time problem. The necessary conditions are described by a set of coupled Riccati and Lyapunov algebraic matrix equations. In the special case that C^{-1} exists, the necessary conditions are identical to ones derived by Medanic.

Key Words: Stackelberg game, closed-loop strategy, output feedback, static optimization, expected value

1. はじめに

これまで、決定者(decision maker)が2人以上いる動的ゲーム問題に多くの研究がなされてきた^{3)~8)}。スタックルベルグ微分ゲーム(Stackelberg differential game)問題は複数の決定者が階層構造をしている動的システムに対するゲーム問題である³⁾。

階層構造の最上位の階層にリーダー(leader)が下位の階

層にフォロア(follower)が位置している。リーダーはフォロアの戦略決定以前に自分の戦略を宣言する。フォロアはリーダーの戦略を制約条件として自分の費用汎関数(cost functional)を最小化する戦略を決定する。このような決定問題がスタックルベルグゲーム問題である。また、求められたリーダーとフォロアの戦略をスタックルベルグ戦略(Stackelberg strategy)と呼ぶ。スタックルベルグゲームにおいて、リーダーは自分の戦略によって、フォロアを強制することができる。すなわち、リーダーにとって、スタックルベルグ戦略は少なくともナッシュ戦略(Nash strategy)よりも好ましいと思われる³⁾。

スタックルベルグ戦略には、開ループ(open-loop)戦略、閉ループ(closed-loop)戦略、フィードバック(feed-back)戦略、誘導(incentive)戦略などが定義されている^{3),4),6)}。誘導戦略はフィードバック戦略の概念に基づく

* 広島工業大学工学部 広島市佐伯区三宅 2-1-1

** 広島大学総合科学部 広島市中区東千田町 1-1-89

* Faculty of Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima

** Faculty of Integrated Arts and Sciences, University of Hiroshima, Hiroshima

(Received June 17, 1992)

(Revised February 3, 1993)

もので、フォロアがリーダーにとって望ましい行動をとるようにフォロアに対して誘導をかけた戦略である⁶⁾。リーダーにとって閉ループ戦略の概念は開ループ戦略やフィードバック戦略のそれよりも好ましい。しかし、閉ループ戦略は最適原理を満足しないことが指摘されてきた。Medanic は最適原理を満足する閉ループスタックルベルグ戦略(closed-loop Stackelberg strategy)を考え、その必要条件とアルゴリズムを導出している⁷⁾。Medanic の導出した必要条件はきわめて有用性の高いものであり、これまでこの必要条件から多くの結果が得られている^{5),8)}。

本論文の目的は、出力方程式をもつ動的システムに支配される閉ループスタックルベルグゲーム問題を解くことである。対象とする動的システムは 2 人の決定者がそれぞれ 2 次形式費用汎関数をもつ線形システムであり、出力方程式をもつことが大きな特徴である。本論文では戦略は出力フィードバックを用いて構築する。その戦略は標準的な 2 次形式費用汎関数を最小化するように決定される。この出力フィードバックによる戦略は動的システムの状態変数に関して十分な情報をもたない場合に有効である。そのため、通常の状態フィードバックで構築される閉ループ戦略よりも、より一般的であると考えられる。さらに本論文で構築される閉ループスタックルベルグ戦略は Medanic の結果⁷⁾と Levine らの導出法²⁾をもとにしているため、最適性を満足するように得られている。最適性を保証するために、動的システムの初期状態が単位球面上に一樣分布するランダム変数であることと費用汎関数がその期待値をとることを仮定している。この仮定により、あるマトリクス方程式に解が存在するならば、構築された線形閉ループ戦略が最適な閉ループスタックルベルグ戦略になることを示す。

本論文はつぎのように構成される。第 2 章では対象とする動的システムを記述し、問題の定式化を与える。第 3 章では出力フィードバックによる閉ループスタックルベルグ戦略構築のための必要条件を与えると同時に、その証明を行う。第 4 章では得られた必要条件より戦略を導出するためのアルゴリズムについて述べる。第 5 章では本論文の方法を数値的に適用し、解を求める。本論文のすべての結果に対する統括的な議論を第 6 章で行う。

2. 対象システムと問題の定式化

本論文で対象とするシステムはつぎのような 2 人の決定者をもつ動的システムである。

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B_1 u_1(t) + B_2 u_2(t) \quad (1.a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.b)$$

ただし、 $x(0) = x_0$ 、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$ 、 $y(t) \in \mathbf{R}^m$ はシステムの状態、制御出力を表わすベクトルである。 $u_i \in \mathbf{R}^r$ 、 $i=1, 2$ はそれぞれの決定者によって制御される操作入力ベクトルである。 u_1 をフォロア (P_1 : プレイヤ 1)、 u_2 をリーダー (P_2 : プレイヤ 2) とする。 A 、 B_1 、 B_2 、 C はそれぞれ適当な次元をもつマトリクスである。

各プレイヤ P_i 、 $i=1, 2$ は次式で表わされる費用汎関数を最小化することを目的とする。

$$\bar{J}_i = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T Q_i x + u_i^T R_{i1} u_1 + u_i^T R_{i2} u_2] dt \right\} \quad (2)$$

ただし、 $Q_i = Q_i^T \geq 0$ 、 $R_{ii} = R_{ii}^T > 0$ 、 $R_{ij} = R_{ij}^T \geq 0$ 、 $i \neq j$ 、 $i, j=1, 2$ である。 E は初期状態 x_0 の期待値を意味する。添え字 T はマトリクスおよびベクトルの転置である。初期状態 x_0 は単位球面上に一樣分布するランダム変数であると仮定する。すなわち、 $E\{x_0\} = 0$ 、 $E\{x_0 x_0^T\} = I$ を満足している。

リーダーとフォロアの戦略 u_1 、 u_2 はそれぞれ許容戦略空間 U_1 、 U_2 に属している。すなわち、 $u_1 \in U_1$ 、 $u_2 \in U_2$ である。戦略対 (u_1^*, u_2^*) がつぎの定義 1 を満足するならば、その戦略はスタックルベルグ戦略と呼ばれる。

【定義 1】 ある $u_2 \in U_2$ に対して、つぎのような写像 $T: U_2 \rightarrow U_1$ が存在する。

$$\bar{J}_1(Tu_2, u_2) \leq \bar{J}_1(u_1, u_2), \quad \forall u_1 \in U_1 \quad (3.a)$$

写像 T により、つぎの不等式を満足する u_2^* が存在するならば、戦略対 (u_1^*, u_2^*) はスタックルベルグ戦略であると定義する。

$$\bar{J}_2(u_1^*, u_2^*) \leq \bar{J}_2(Tu_2, u_2), \quad \forall u_2 \in U_2 \quad (3.b)$$

ただし、 $u_1^* = Tu_2^*$ である。

本論文では、スタックルベルグ戦略を出力フィードバックにより構成する。

$$u_1 = -F_1 y(t) \quad (4.a)$$

$$u_2 = -F_2 y(t) \quad (4.b)$$

ただし、 F_1 、 F_2 はフィードバックゲインマトリクスである。(4)式は(1.b)式によってつぎのように書き換えることができる。

$$u_1 = -F_1 Cx(t) \quad (5.a)$$

$$u_2 = -F_2 Cx(t) \quad (5.b)$$

この戦略 u_1 、 u_2 により、動的システム(1.a)式はつぎのような閉ループ系を構成する。

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - B_1 F_1 C - B_2 F_2 C)x(t)$$

この閉ループ系より最適性を満足するスタックルベルグ戦略の導出を行う。ゆえに、求められたスタックルベルグ戦略は最適な閉ループ戦略となり得る。

本論文で構築された出力フィードバックによる閉ルー

プスタックルベルグ戦略(4)式は通常の状態フィードバックによる戦略に比べて、より一般的なものとなっている。出力方程式(1.b)式について、 C^{-1} が存在するという特別な場合を考える。この場合、(5)式の戦略は状態フィードバックによる戦略に置き換えられる。すなわち、本論文で導出された必要条件がMedanicによるものと同一になる。このことは第3章で述べることとする。

3. スタックルベルグ戦略の構築

任意に与えられたリーダーの戦略 $u_2 \in U_2$ に対して、フォロアの戦略 $u_1 \in U_1$ を決定する問題を考える。すなわち、ある固定された u_2 に対してフォロアが自分の費用汎関数 $\bar{J}_1$ を最小化するように u_1 を決定する問題である。つぎのような問題1を解くことを考える。

[問題1] (5.b)式を(1.a)式に代入することによって、動的システム

$$\frac{dx(t)}{dt} = (A - B_2 F_2 C)x(t) + B_1 u_1(t) \quad (6)$$

が得られる。つぎの費用汎関数を最小化するように u_1 を決定することを考える。

$$\bar{J}_1 = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty [x^T(Q_1 + C^T F_2^T R_{12} F_2 C)x + u_1^T R_{11} u_1] dt \right\} \quad (7)$$

戦略 u_1 は(5.a)式のように構築される。

この問題に関して、つぎの補題1が成立する。

[補題1]²⁾ あるリーダーの戦略 $u_2 \in U_2$ に対して、 $\bar{J}_1$ を最小化するフォロアの戦略 $u_1^0 \in U_1$ はつぎのように決定される。

$$u_1 = -F_1^0 y(t) = -F_1^0 Cx(t) \quad (8)$$

ただし、フィードバックゲインマトリクス F_1^0 は

$$F_1^0 = R_{11}^{-1} B_1^T K_1 L_1 C^T [CL_1 C^T]^{-1} \quad (9)$$

である。マトリクス K_1 と L_1 はそれぞれつぎの非線形マトリクス方程式の解である。

$$0 = K_1 A_0 + A_0^T K_1 + Q_1 + C^T F_1^{0T} R_{11} F_1^0 C + C^T F_2^T R_{12} F_2 C \quad (10)$$

$$0 = L_1 A_0^T + A_0 L_1 + I \quad (11)$$

ただし、

$$A_0 = A - B_1 F_1^0 C - B_2 F_2 C$$

マトリクス A_0 が安定ならば、 $K_1 = K_1^T > 0$ 、 $L_1 = L_1^T \geq 0$ となる。

このように決定されたフォロアの戦略 u_1^0 (すなわち、フィードバックゲイン F_1^0) に対して、リーダーにとって最適な戦略 u_2^* が存在すると仮定する。すなわち、補題1により決定された(8)式の戦略 u_1^0 から、つぎのシステムを得る。

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= (A - B_1 F_1^0 C - B_2 F_2 C)x(t) \\ &= A_0 x(t) \end{aligned} \quad (12)$$

(12)式の状態軌跡 $x(t)$ は

$$x(t) = \phi(t, 0)x_0 \quad (13)$$

により与えられる。ただし、 $\phi(t, 0)$ はつぎのような状態遷移マトリクスである。

$$\phi(t, 0) = \exp(A_0 t) \quad (14)$$

費用汎関数 $\bar{J}_2$ は初期状態 x_0 についての期待値として記述されている。(13)式により、 $\bar{J}_2$ を書き換えると、つぎの $\bar{J}_2$ を得る。

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 = E_{x_0} \left\{ x_0^T \left[\frac{1}{2} \int_0^\infty \phi^T(t, 0) (Q_2 + C^T F_1^{0T} R_{21} F_1^0 C \right. \right. \\ \left. \left. + C^T F_2^T R_{22} F_2 C) \phi(t, 0) dt \right] x_0 \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

初期状態 x_0 についての仮定 $E(x_0 x_0^T) = I$ により、費用汎関数 $\bar{J}_2$ における x_0 の依存性を除去できる。すなわち、(15)式はつぎのように記述される。

$$\begin{aligned} \bar{J}_2 = \frac{1}{2} \int_0^\infty \text{tr} [\phi^T(t, 0) (Q_2 + C^T F_1^{0T} R_{21} F_1^0 C \\ + C^T F_2^T R_{22} F_2 C) \phi(t, 0)] dt \end{aligned} \quad (16)$$

ただし、 tr はマトリクスのトレースを意味する。リーダーは(16)式で表わされる費用汎関数 $\bar{J}_2$ を最小化するように、自分の戦略 $u_2^* \in U_2$ を決定する。ここでマトリクス K_2 をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} K_2 = \int_0^\infty \phi^T(t, 0) (Q_2 + C^T F_1^{0T} R_{21} F_1^0 C \\ + C^T F_2^T R_{22} F_2 C) \phi(t, 0) dt \end{aligned} \quad (17)$$

マトリクス K_2 によって、 $\bar{J}_2$ はつぎのように表わされる。

$$\bar{J}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}[K_2] \quad (18)$$

ただし、マトリクス K_2 は常に $K_2 = K_2^T \geq 0$ を満足している。すなわち、マトリクス K_2 はつぎのリッカチ方程式を満足する解である。

$$0 = K_2 A_0 + A_0^T K_2 + Q_2 + C^T F_1^{0T} R_{21} F_1^0 C + C^T F_2^T R_{22} F_2 C \quad (19)$$

最終的にリーダーの戦略 u_2^* (フィードバックゲインマトリクス F_2^*) を決定する問題は、つぎの問題2に置き換えられる。

[問題2] マトリクス K_1 、 L_1 、 K_2 に関する方程式、(10)、(11)、(19)式を拘束条件として、(18)式の費用汎関数を最小化する F_2^* を決定することを考える。この F_2^* によりリーダーの戦略 u_2^* をつぎのように構築する。

$$u_2^* = -F_2^* y(t) = -F_2^* Cx(t) \quad (20)$$

この問題2の解は明らかに費用汎関数 $\bar{J}_2$ を最小化する。つぎの定理1が成立する。

《定理1》 フィードバックゲインマトリクス F_2^* がつ

ぎの方程式の解であるならば、それによって構築されるリーダの戦略 u_2^* は費用汎関数 $\bar{J}_2$ を最小化する。

$$0 = (R_{12}F_2CM_1 + R_{22}F_2CM_2)C^T - B_2^T(K_1M_1 + K_2M_2 + N_1L_1)C^T \quad (21)$$

ただし、 M_1 , M_2 , N_1 は対称マトリクスであり、それぞれつぎの方程式を満足する解である。

$$\begin{aligned} 0 = & M_1A_0^T + A_0M_1 - S_{11}K_2M_2VL_1 - L_1VM_2K_2S_{11} \\ & + S_{21}K_1L_1VM_2VL_1 + L_1VM_2VL_1K_1S_{21} \\ & - S_{11}K_1(I - L_1V)M_1VL_1 \\ & - L_1VM_1(I - VL_1)K_1S_{11} - S_{11}N_1L_1VL_1 \\ & - L_1VL_1N_1S_{11} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} 0 = & N_1A_0 + A_0^TN_1 \\ & - VL_1N_1S_{11}K_1(I - L_1V) \\ & - (I - VL_1)K_1S_{11}N_1L_1V \\ & - (I - VL_1)K_1S_{11}K_1(I - L_1V)M_1V \\ & - VM_1(I - VL_1)K_1S_{11}K_1(I - L_1V) \\ & - (I - VL_1)K_1S_{11}K_2M_2V \\ & - VM_2K_2S_{11}K_1(I - L_1V) \\ & + VM_2VL_1K_1S_{21}K_1(I - L_1V) \\ & + (I - VL_1)K_1S_{21}K_1L_1VM_2V \end{aligned} \quad (23)$$

$$0 = M_2A_0^T + A_0M_2 - \frac{1}{2}I \quad (24)$$

ただし、

$$\begin{aligned} S_{11} &= B_1R_{11}^{-1}R_{11}R_{11}^{-1}B_1^T \\ V &= C^T[CL_1C^T]^{-1}C \end{aligned}$$

である。これら (22) 式から (24) 式の解が存在するならば、最適解 u_2^* を得ることができる。

(証明) 問題 2 に対するラグランジェ関数 (Lagrange function) $\mathcal{L}$ は次式になる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\text{tr}[K_2] - \text{tr}[\zeta^T(K_1A_0 + A_0^TK_1 + Q_1 \\ & + C^TF_1^0R_{11}F_1^0C + C^TF_2^TR_{12}F_2C)] \\ & - \text{tr}[\eta^T(L_1A_0^T + A_0^TL_1 + I)] \\ & - \text{tr}[\xi^T(K_2A_0 + A_0^TK_2 \\ & + Q_2 + C^TF_1^0R_{21}F_1^0C + C^TF_2^TR_{22}F_2C)] \end{aligned} \quad (25)$$

このラグランジェ関数 $\mathcal{L}$ は (10), (11), (19) 式を拘束条件として、(18) 式の費用汎関数 $\bar{J}_2$ を最小化することを目的としている。静的最適化 (static optimization) の方法^{1), 2)} を用いると対応する方程式は次式となる。

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} \quad (26)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} \quad (27)$$

$$0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2} \quad (28)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = & -\zeta A_0^T - A_0\zeta + S_{11}K_2\xi VL_1 + L_1V\xi K_2S_{11} \\ & - S_{21}K_1L_1V\xi VL_1 - L_1V\xi VL_1K_1S_{21} \\ & + S_{11}K_1\xi VL_1 + L_1V\xi K_1S_{11} \\ & - S_{11}K_1L_1V\xi VL_1 - L_1V\xi VL_1K_1S_{11} \\ & + S_{11}\eta L_1VL_1 + L_1VL_1\eta S_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = & -\eta A_0 - A_0^T\eta + VL_1\eta S_{11}K_1 + K_1S_{11}\eta L_1V \\ & - VL_1\eta S_{11}K_1L_1V - VL_1K_1S_{11}\eta L_1V \\ & + K_1S_{11}K_1\xi V + V\xi K_1S_{11}K_1 \\ & - K_1S_{11}K_1L_1V\xi V - V\xi VL_1K_1S_{11}K_1 \\ & - VL_1K_1S_{11}K_1\xi V - V\xi K_1S_{11}K_1L_1V \\ & + VL_1K_1S_{11}K_1L_1V\xi V \\ & + V\xi VL_1K_1S_{11}K_1L_1V \\ & + K_1S_{11}K_2\xi V + V\xi K_2S_{11}K_1 \\ & - VL_1K_1S_{11}K_2\xi V - V\xi K_2S_{11}K_1L_1V \\ & - V\xi VL_1K_1S_{21}K_1 - K_1S_{21}K_1L_1V\xi V \\ & + V\xi VL_1K_1S_{21}K_1L_1V \\ & + VL_1K_1S_{21}K_1L_1V\xi V \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2} = \frac{1}{2}I - \xi A_0^T - A_0\xi$$

である (付録参照)。

この方程式に対して、 ζ , η , ξ の各ラグランジェ未定数をマトリクス M_1 , N_1 , M_2 に置き換えると、(22) 式から (24) 式が導出される。ラグランジェ関数 $\mathcal{L}$ を最小化する F_2^* は次式より求められる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_2} = 0 \quad (29)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_2} = & -R_{12}F_2C\xi C^T - R_{12}F_2C\xi^TC^T \\ & - R_{22}F_2C\xi C^T - R_{22}F_2C\xi^TC^T \\ & + B_2^TK_1\xi C^T + B_2^TK_1\xi^TC^T \\ & + B_2^TK_2\xi C^T + B_2^TK_2\xi^TC^T \\ & + B_2^T\eta^TL_1C^T + B_2^T\eta L_1C^T \end{aligned}$$

である (付録参照)。よって、(21) 式を得る。□

定理 1 により求められた戦略はつぎの関係を満足している。

$$\begin{aligned} \bar{J}_1(u_1^0, u_2) &\leq \bar{J}_1(u_1, u_2) \\ \bar{J}_2(u_1^*, u_2^*) &\leq \bar{J}_2(u_1^0, u_2) \end{aligned} \quad (30)$$

ただし、 $u_1^0 = Tu_2$, $u_1^* = Tu_2^*$ である。したがって、戦略対 (u_1^*, u_2^*) は最適な閉ループスタックルベルグ戦略である。

本研究では $R_{ii} = R_{ii}^T > 0$ により、費用汎関数において凸性が保証されている。凸性が保証されている問題に対するラグランジェ未定数法は必要十分条件を与える。すなわち、補題 1 において最適解が存在するならば、定

理1は必要十分条件となる。

(注意) 出力方程式(1.b)式において C^{-1} が存在するという特別な場合について考える。 C^{-1} が存在するならば、補題1の必要条件は

$$F_1^0 = R_{11}^{-1} B_1^T K_1 C^{-1} \quad (31)$$

となる。ただし、マトリクス K_1 は次式を満足する解である。

$$0 = K_1 A_0 + A_0^T K_1 + Q_1 + K_1 S_{11} K_1 + C^T F_2^T R_{12} F_2 C \quad (32)$$

さらに、(19)式はつぎようになる。

$$0 = K_2 A_0 + A_0^T K_2 + Q_2 + K_2 S_{21} K_1 + C^T F_2^T R_{22} F_2 C \quad (33)$$

同様にして、定理1の必要条件はつぎようになる。

$$0 = M_1 A_0^T + A_0 M_1 - S_{11} K_2 M_2 - M_2 K_2 S_{11} + S_{21} K_1 M_2 + M_2 K_1 S_{21} \quad (34)$$

$$0 = M_2 A_0^T + A_0 M_2 - \frac{1}{2} I \quad (35)$$

$$0 = R_{12} F_2 C M_1 + R_{22} F_2 C M_2 - B_2^T (K_1 M_1 + K_2 M_2) \quad (36)$$

(31)式から(36)式の必要条件は、状態フィードバックにより得られた条件⁴⁾と同一であることがわかる。

4. アルゴリズム

この章では、補題1および定理1の必要条件から解を求めるためのアルゴリズムについて述べる。つぎのアルゴリズムによって解を求める。

- 1) $i=0$ において適当な初期値 $F_2^{(0)}$ を選択する。
- 2) 与えられた $F_2^{(i)}$ に対して、 $j=0$ における適当な初期値 $F_1^{(0)}$ を選択する。 $F_1^{(0)}$ はマトリクス A_0 を安定にする。

- 3) 与えられた $F_1^{(j)}$ 、 $F_2^{(i)}$ に対して、(10)式の左辺 $\dot{K}_1$ とおいた微分方程式を $t=\infty$ から逆時間方向に解く。その収束解を $K_1^{(j)}$ とする。このとき、 $K_1^{(j)}$ はつぎの関係を満足する。

$$\text{tr}[K_1^{(j)}] \leq \text{tr}[K_1^{(j-1)}] \quad (37)$$

- 4) 同様に(11)式においても、左辺を $\dot{L}_1$ とおいた微分方程式を解き、その収束解を $L_1^{(j)}$ とする。

- 5) 求められた $K_1^{(j)}$ と $L_1^{(j)}$ に対して、 $F_1^{(j)}$ を算出する。 $\|F_1^{(j)} - F_1^{(j-1)}\| \leq \varepsilon_1$ を満足するならば、その解 $F_1^{(j)}$ を $F_1^{(i)}$ としてステップ6へ進む。満足しないならば、 j を増分させてステップ3へ戻る。ただし、 ε_1 は微小値である。

- 6) 得られた $F_1^{(i)}$ に対して、(19)式の左辺を $\dot{K}_2$ とおいた微分方程式より収束解 $K_2^{(i)}$ を求める。つぎの関係を満足している。

$$\text{tr}[K_2^{(i)}] \leq \text{tr}[K_2^{(i-1)}] \quad (38)$$

- 7) (22)式から(24)式においても、左辺をそれぞれ $\dot{M}_1$ 、 $\dot{N}_1$ 、 $\dot{M}_2$ とおいた微分方程式の収束解を求める。収束解をそれぞれ $M_1^{(i)}$ 、 $N_1^{(i)}$ 、 $M_2^{(i)}$ とする。

- 8) 求められた収束解をもとに、(21)式より $F_2^{(i)}$ を決定する。もし $\|F_2^{(i)} - F_2^{(i-1)}\| \leq \varepsilon_2$ を満足しないならば、 i を増分してステップ2に戻る。ただし、 ε_2 は微小値である。

以上のアルゴリズムにより決定されたフィードバックゲインマトリクス F_1 、 F_2 を(4)式に代入して得られる戦略対 (u_1, u_2) は最適閉ループスタックルベルグ戦略 (u_1^*, u_2^*) である。

5. 数 値 例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し、解を求めてみる。2人の決定者をもつ2段階のスタックルベルグゲーム問題を考える。システムはつぎのように記述される。

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39.a)$$

$$y = [0 \ 1] x \quad (39.b)$$

(39)式においては、状態ベクトルの第2成分のみを出力としている。すなわち、 C^{-1} は存在しない。

費用汎関数は次式で与えられる。

$$\bar{J}_1 = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + u_1^2 + u_2^2 \right) dt \right\} \quad (40.a)$$

$$\bar{J}_2 = E_{x_0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(x^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + u_1^2 + u_2^2 \right) dt \right\} \quad (40.b)$$

P_1 をフォロア、 P_2 をリーダーとする。フォロアとリーダーそれぞれの戦略は次式のように出力フィードバックによって構成する。

$$u_1 = -f_1 y \quad (41.a)$$

$$u_2 = -f_2 y \quad (41.b)$$

ただし、 f_1 、 f_2 はスカラのフィードバックゲインである。

本論文で提案したアルゴリズムを上述の問題に適用するとつぎのような解が得られる。

$$f_1 = 0.7747 \quad (42.a)$$

$$f_2 = 0.5346 \quad (42.b)$$

(42)式による戦略を(39)式のシステムに適用して、状態および戦略の数値を求めた。これらの数値による解軌跡を Fig. 1 と Fig. 2 に示す。結果的に求められる費用汎関数の最小値はつぎのとおりである。

$$\bar{J}_1 = 0.1825 \quad (43.a)$$

$$\bar{J}_2 = 0.1439 \quad (43.b)$$

Fig. 1 The state trajectory $x=[x_1, x_2]^T$ Fig. 2 The optimal Stackelberg strategies $u_i, i=1, 2$

5. おわりに

本論文では、出力方程式をもつ動的システムで支配される 2 人の決定者によるゲーム問題について考えている。2 人の決定者は階層構造をなしており、それぞれ 2 次費用汎関数をもっている。このゲーム問題に対して、出力フィードバックによるスタックルベルグ戦略を導入し、その解法を示した。この戦略により記述される閉ループ系から、必要条件の導出を行っている。

最適原理を保証するために、2 次費用汎関数はシステムの初期状態 x_0 に関して、その期待値をとることとした。初期状態 x_0 については、単位球面上に一様分布するランダム変数であることを仮定している。この仮定のもとで、最適な閉ループスタックルベルグ戦略の必要条件が導出されている。

出力方程式において C^{-1} が存在する場合、本論文の必要条件が Medanic によるものと同一になることを示した。すなわち、このことは本論文で構築された出力フィードバックによるスタックルベルグ戦略が状態フィード

バックによるものに帰着することを示している。

さらに、本論文では戦略導出のためのアルゴリズムを記述し、簡単な数値例に対して解を求めている。この数値例における解は妥当なものである。

これまで、出力方程式をもつ動的システムに支配されるゲーム問題についての解法は発表されていないと思われる。本論文で構築された戦略は出力フィードバックによる線形戦略であるため、その構成法はいたって簡単である。以上のことから、本論文で取り扱った問題および導出された必要条件はより一般性を含むと考えられる。

本論文で示した方法は、3 階層あるいは多階層のゲーム問題に対しても適用できる。もっと複雑な問題への適用が考えられる。さらに、一般的な問題に対して、この理論を拡張していくことがわれわれの将来の課題である。

参考文献

- 1) R. L. Kosut: Suboptimal Control of Linear Time-Invariant Systems Subject to Control Structure Constraints, IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-15-5**, 557/563 (1970)
- 2) W. S. Levine and M. Athans: On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multilevel Systems, IEEE Trans., **AC-15-1**, 44/48 (1970)
- 3) J. B. Cruz, Jr.: Leader-Follower Strategies for Multilevel Systems, IEEE Trans., **AC-23-2**, 244/255 (1978)
- 4) J. Medanic: Closed-Loop Stackelberg Strategies in Linear-Quadratic Problems, IEEE Trans., **AC-23-4**, 632/637 (1978)
- 5) M. A. Salman and J. B. Cruz, Jr.: Well-Posedness of Linear Closed-Loop Stackelberg Strategies for Singularly Perturbed Systems, J. Franklin Institute, **308-1**, 25/37 (1979)
- 6) 水上, 徐: 動的計画法による多段階 LQ ゲーム問題の誘導スタックルベルグ解, 電気学会論文誌, **C-109-4**, 195/202 (1989)
- 7) K. Mizukami, H. Xu and F. Suzumura: Open-Loop Linear Quadratic Nash Games for Discrete Descriptor Systems, 計測自動制御学会論文集, **27-2**, 169/176 (1991)
- 8) K. Mizukami and F. Suzumura: Closed-loop Stackelberg Strategies for Singularly Perturbed Systems: The Recursive Approach, Int. J. Systems Science (to appear)
- 9) A. Graham: Kronecker Products and Matrix Calculus: with Applications, Ellis Horwood Ltd. (1981)

《付 録》

(26)式から(29)式の導出において、つぎのマトリクス微分⁹⁾を必要とする。

$$\frac{\partial X}{\partial x_{rs}} = E_{rs} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial (AXB)}{\partial x_{rs}} = AE_{rs}B \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial(AX^{-1}B)}{\partial x_{rs}} = -AX^{-1}E_{rs}X^{-1}B \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial(X^TAX)}{\partial x_{rs}} = E_{rs}^TAX + X^TAE_{rs} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial(X^{-n})}{\partial x_{rs}} = -X^{-n}\frac{\partial(X^n)}{\partial x_{rs}}X^{-n} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{tr} \frac{\partial Y}{\partial x_{rs}} = \frac{\partial(\text{tr} Y)}{\partial x_{rs}} \quad (\text{A.6})$$

ただし、 E_{rs} は基本マトリクス (elementary matrix) である。

このマトリクス微分に加えて、

$$\text{tr} AB = (\text{vec } A)^T \text{vec } B$$

という関係により、つぎのマトリクス微分が導出される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[AXC^T(CXC^T)^{-1}C] \\ = A^T C^T (CXC^T)^{-1} C \\ - C^T (CXC^T)^{-1} CX^T A^T C^T (CXC^T)^{-1} C \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \text{tr}[AXC^T(CXC^T)^{-1}CX] \\ = A^T X^T C^T (CXC^T)^{-1} C + C^T (CXC^T)^{-1} CX^T A^T \\ - C^T (CXC^T)^{-1} CX^T A^T X^T C^T (CXC^T)^{-1} C \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

このマトリクス微分により、(26)式から(29)式を得る。

[著 者 紹 介]

鈴 村 文 寛 (正会員)

1987年、広島工業大学工学部電子工学科卒業。89年広島大学大学院修士課程修了。92年同大学院博士課程単位修得後退学。同年広島工業大学工学部機械工学科助手、現在に至る。微分ゲーム理論、知的制御における基礎理論の研究に従事。電子情報通信学会、情報処理学会、IEEEなどの会員。

水 上 孝 一 (正会員)

1958年、広島大学工学部電気卒業。60年京都大学大学院修士課程修了。63年同博士課程修了。京都大学工学部助手。トロント大学客員研究員などをへて68年広島大学工学部助教授。77年広島大学総合科学部教授。同工学研究科担当。制御理論、微分ゲーム理論、情報処理などの研究に従事。電気学会、情報処理学会、システム制御情報学会などの会員(工学博士)。