確率的線形系の二次モーメント安定について

奥 山 佳 史

千葉工業大学電気工学科 習志野市谷津町

(昭和 41 年 12 月 2 日受付)

On the 2nd Moment Stability of Stochastic Linear Systems

Yoshifumi OKUYAMA

(Chiba Institute of Technology, Narashino)

(Received December 2, 1966)

Linear systems with randomly time varying parameters which are stationary stochastic process (stationary random process), have been investigated for many years by Rosenbloom, Samuels, Bertram, Bergen, Bershad and others.

This paper is intended to extend the works by Rosenbloom and to develop the idea of Bershad. It is now considered that the linear systems are represented by generalized state equations using linear operator matrix. The system stability, in stochastic sense, is determined by examining whether or not the 2nd moments of the corresponding state variables are bounded. All of the random parameters are assumed to be Gaussian and non-white process. Two theorems of the 2nd moment stability are derived. Especially, latter theorem, relating to partially disturbed systems, gives a practical sufficient condition for the stochastic stability of such a system. Simple illustrative examples are also presented.

1. ま え が き

系パラメータが一つの不規則過程(確率過程)をなす線形系の研究は, Rosenbloom¹⁾, Samuels²⁾⁻⁴⁾, Bertram⁵⁾, Bergen⁶⁾⁷⁾, Bershad⁸⁾ らによってなされ, わが国においても, 非線形要素を含む系の問題に拡張した樫木-砂原⁹⁾の研究が知られている。

なかでも, 1階の微分方程式あるいはそれらの直列結合の形で Gauss 過程パラメータ系の安定性を論じたもの(Rosenbloom)パラメータ変化が白色雑音と考えられる場合について2乗平均安定を検討したもの(Samuels ら)が有名であり, そこでの考え方が後の研究の基礎となっている。

本文は, 前者の拡張と Bershad の考え方の発展をこころみたもので, Gauss 過程をなすパラメータが時間的相関をもつ場合の系の安定問題を論じている。一般的に記述した線形系において, 状態量の確率モーメントの有界性から安定性を定めるのであるが, その内容にさきの発表¹⁰⁾¹¹⁾から若干の発展をみたので, 適用例とともに整理し, ここに一文とさせていただきます。

なお, 繁雑になるのをさけるため, 本文では検討す

る確率モーメントを表題にあるごとく二次のみとしている。さらに高次のモーメントについても, 同様にして解けることが, その解析過程から明らかであろう。

2. 系 の 表 現

本論にはいる前に, ここで扱う一般的線形系の表現法とその考え方について簡単にふれておく。

集中定数線形系の一般的表現は,

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u \quad \dots\dots (2.1)$$

なる状態方程式によるのが普通である。もちろん, これで十分であるが, 時変パラメータ系(time-varying parameter system)の場合, そのパラメータ変動についての情報が限られていることが多く, 実際の系を(2.1)式の形に変換したとき, マトリクス $A(t)$, $B(t)$ の中に知ることのできない成分が含まれないともかぎらない。また, 必要以上に方程式の数が増えることのないよう, そしてさらに, 固定系における従来からの微分方程式-ラプラス変換の扱い方との対比を明確にするために, ここでは線形作用素 L によるマトリクス形式

$$[L]x(t) = u(t) \quad \dots\dots (2.2)$$

を系の一般的表現として用いる. $[L]$ は線形作用素による $n \times n$ マトリクス,

$\mathbf{u} = \text{col}(u_1, u_2, \dots, u_n)$: 入力ベクトル

$\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, \dots, x_n)$: 状態量ベクトル

である.

(2.2) 式は

$$\mathbf{x}(t) = [L]^{-1} \mathbf{u}(t) = [A] \mathbf{u}(t) \quad \dots\dots (2.3)$$

とかき表わすことによって, 新しい線形作用素による $n \times n$ マトリクス $[A]$ を得る. このような操作が可能なとき, 系は“解ける”という. 以下, 一般形(2.2)式を用いるときはすべてこの“解ける”場合を扱う.

系が微分方程式で表わされる場合には, マトリクス $[L]$ の各成分は, 一般に,

$$L = a_0(\alpha) \frac{d^m}{dt^m} + \dots\dots + a_{m-1}(\alpha) \frac{d}{dt} + a_m(\alpha) \quad \dots\dots (2.4)$$

とかける. α は, ここで問題とする確率過程をなすランダムパラメータで

$$\alpha = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_r(t)) \quad \dots\dots (2.5)$$

なる r 次元ベクトルである.

積分あるいは差分形式を含む場合についても, 作用素 $[L]$ の内容をしかるべく定義すれば, 同様に(2.2)式で考えることができる.

3. 確率的安定に関する一般論

いま, 確率過程をなすランダムパラメータ $\alpha(t)$ は定常であるとする. 同様に, 入力 $\mathbf{u}(t)$ も定常確率過程と仮定する. すると, 系の状態量 $\mathbf{x}(t)$ も同じく定常確率過程とみなすことができる. すなわち, 時間原点に無関係に状態量 $\mathbf{x}(t)$ を量的に評価することが可能である.

一般に確率過程 $\mathbf{z}(t)$ の評価は, つぎのような確率モーメント

$$\langle (z(t_1) - a_1)(z(t_2) - a_2) \dots (z(t_N) - a_N) \rangle$$

$$a_i = \langle z(t_i) \rangle, \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots (3.1)$$

を求めることによってなされる. $\langle \cdot \rangle$ とは期待値すなわち集合平均であり, 標本空間 Ω , 元 ω_s について,

$$\langle Z(t_1, t_2, \dots, t_N, \omega_s) \rangle$$

$$= \int_{\Omega} Z(t_1, t_2, \dots, t_N, \omega_s) P(d\omega_s) \quad \dots\dots (3.2)$$

P : 確率

で表わされる. ベクトル形式

$$\mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)) \quad \dots\dots (3.3)$$

については, 各成分間の相関をも考慮し, 成分 $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\dots$, $z_n(t)$ から重複をゆるしてとりだした N 個の組み合わせからなる (3.1) 式の形式が, その N 次確率モーメントと考えられる. これはいく通りか得られる

が, それらをベクトル形式で表わせば,

$$\langle (z(t_1) - a_1) \otimes (z(t_2) - a_2) \otimes \dots \otimes (z(t_N) - a_N) \rangle$$

$$a_i = \langle z(t_i) \rangle \quad \dots\dots (3.4)$$

とかくことができる. ただし, $\otimes$ は Kronecker の積である¹²⁾.

このようにして評価された量を確率過程の一つのベクトルと考え, 系の入出力信号に適用すると, 確率的安定についての定義をつぎのように定めることができる.

定 義 1

確率モーメント (N 次) がすべて有界なる入力に対し, 出力 (状態量の一次結合) の確率モーメント (N 次) もすべて有界に定まるをもって, 確率的に安定 (N 次モーメント安定) であるとする.

この考え方を (2.2) 式で表わされる系に適用してみよう. まず,

$$[L]W(t, \xi) = \mathbf{1} \delta(t - \xi) \quad \dots\dots (3.5)$$

を満たす $n \times n$ インパルス応答マトリクス $W(t, \xi)$ を考える. ただし,

$\delta(t)$: Dirac のデルタ関数

$\mathbf{1}$: $n \times n$ 単位マトリクス

すると, 系は (2.3) 式の形で表現することができ,

$$\mathbf{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(t, \xi) \mathbf{u}(\xi) d\xi \quad \dots\dots (3.6)$$

を得る. $\mathbf{u}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ は定常確率過程をなすランダム信号であり, また, $W(t, \xi)$ も一つの確率過程をなすランダム量である.

ここでつぎの仮定をおく.

仮 定 1

入力 $\mathbf{u}(t)$ とランダムパラメータ $\alpha(t)$ は確率的に独立であるとする.

そこで, (3.6) 式について期待値を考えれば,

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle W(t, \xi) \rangle \langle \mathbf{u}(\xi) \rangle d\xi \quad \dots\dots (3.7)$$

を得る. いま $\langle \mathbf{u}(t) \rangle \equiv \mathbf{0}$ であるとする. このようにおいても一般性を失わないことは明らかであろう. この場合, 状態量 $\mathbf{x}(t)$ の期待値は (3.7) 式から,

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle \equiv \mathbf{0} \quad \dots\dots (3.8)$$

となる.

そこで, かかる系においては, さきに定義した確率的安定をつぎのようにいいかえることができる. すなわち,

$$\| \langle \mathbf{u}(t_1) \otimes \mathbf{u}(t_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{u}(t_N) \rangle \| < \infty \quad \dots\dots (3.9)$$

に対し,

$$\| \langle \mathbf{x}(t_1) \otimes \mathbf{x}(t_2) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}(t_N) \rangle \| < \infty \quad \dots\dots (3.10)$$

がすべての $t_1, t_2, \dots, t_N$ について定まるをもって確率的安定 (N 次モーメント安定) とする. ただし, $\|\cdot\|$

は絶対値の和で定義されたノルムである。

本文では表題にあるごとく、二次モーメントに限定しているから、安定の定義は、

$$\| \langle \mathbf{u}(t_1) \otimes \mathbf{u}(t_2) \rangle \| < \infty \quad \dots\dots (3.11)$$

に対し、

$$\| \langle \mathbf{x}(t_1) \otimes \mathbf{x}(t_2) \rangle \| < \infty \quad \dots\dots (3.12)$$

がすべての t_1, t_2 について定まることとなる。

この (3.11), (3.12) 式の条件を検討するため、(3.6) 式にもどって二次モーメントを求めてみる。さきの仮定から、

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}(t_1) \otimes \mathbf{x}(t_2) \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle W(t_1, \xi_1) \otimes W(t_2, \xi_2) \rangle \\ &\quad \times \langle \mathbf{u}(\xi_1) \otimes \mathbf{u}(\xi_2) \rangle d\xi_2 d\xi_1 \quad \dots\dots (3.13) \end{aligned}$$

ノルムについては、

$$\begin{aligned} \| \langle \mathbf{x}(t_1) \otimes \mathbf{x}(t_2) \rangle \| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \| \langle W(t_1, \xi_1) \otimes W(t_2, \xi_2) \rangle \| \\ &\quad \cdot \| \langle \mathbf{u}(\xi_1) \otimes \mathbf{u}(\xi_2) \rangle \| d\xi_2 d\xi_1 \quad \dots\dots (3.14) \end{aligned}$$

なる不等式を得る。そこで、系が二次モーメント安定であるためには、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \| \langle W(t_1, \xi_1) \otimes W(t_2, \xi_2) \rangle \| d\xi_2 d\xi_1 < \infty \quad \dots\dots (3.15)$$

がすべての t_1, t_2 について満たされればよいことがわかる。

ただし、ここで述べる系はランダムパラメータが定常、すなわちその系の変動が定常な場合であるから、一般的に $t=\xi$ におけるインパルス応答 $W(t, \xi)$ を考える必要はない。 $t=0$ におけるインパルス応答

$$W(t, 0) \equiv W(t) \quad \dots\dots (3.16)$$

をもって、

$$\begin{aligned} \langle W(t_1, \xi_1) \otimes W(t_2, \xi_2) \rangle \\ = \langle W(t_1 - \xi_1) \otimes W(t_2 - \xi_2) \rangle \quad \dots\dots (3.17) \end{aligned}$$

とおいてよい。そこで、(3.15)式において $t - \xi = \eta$ なる時間を考えれば、その安定十分条件はつぎの定理で示される。

定 理 1

系が (3.5) 式で表わされるとき、この確率系の二次モーメント安定は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \| \langle W(\eta_1) \otimes W(\eta_2) \rangle \| d\eta_2 d\eta_1 < \infty \quad \dots\dots (3.18)$$

で十分となる。ただし、 $W(t)$ は (3.5), (3.16) 式で定義されるその確率系のインパルス応答マトリクスである。

4. 部分的に乱された確率系

ここで、線形作用素によるマトリクス $[L]$ が

$$[L] = [L(D)] - \rho \sum_{i=1}^v \alpha_i(t) [P_i(D)], \quad D \equiv d/dt \quad \dots\dots (4.1)$$

とかけるときを考える。とくに、ランダムパラメータ α が作用素 $[L]$ に対して線形的になる場合である。定理1からあきらかなように、安定問題においては、 $t=0$ におけるインパルス応答を考えればよいから、

$$[L(D)]W(t) = \mathbf{1} \delta(t) + \rho \sum_i \alpha_i(t) [P_i(D)]W(t) \quad \dots\dots (4.2)$$

ただし、

$$\sum_i \equiv \sum_{i=1}^v \quad (\text{以下このように省略してかく})$$

いま、

$$\sum_i \alpha_i(t) [P_i(D)]W(t) = G(t) \quad \dots\dots (4.3)$$

とおくと、

$$[L(D)]W(t) = \mathbf{1} \delta(t) + \rho G(t) \quad \dots\dots (4.4)$$

$g(t) = [L(D)][L(D)]^{-1}g(t)$ なる $[L(D)]^{-1}$ を定義して、

$$\begin{aligned} W(t) &= [L(D)]^{-1} \delta(t) + \rho [L(D)]^{-1} G(t) \\ &= W_0(t) + \rho \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad \dots\dots (4.5) \end{aligned}$$

ただし、

$$W_0(t) = [L(D)]^{-1} \delta(t) = \mathcal{F}^{-1} [L(j\omega)]^{-1} \quad \dots\dots (4.6)$$

この (4.5) 式について二次モーメント形式を求めると、

$$\begin{aligned} \langle W(t) \otimes W(t) \rangle &= W_0(t) \otimes W_0(t) + 2\rho W_0(t) \\ &\quad \otimes \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t-\tau) \langle G(\tau) \rangle d\tau \\ &\quad + \rho^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_0(t-\tau_1) \otimes W_0(t-\tau_2) \\ &\quad \times \langle G(\tau_1) \otimes G(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \quad \dots\dots (4.7) \end{aligned}$$

したがって、もし $W_0(t) \rightrightarrows 0$ ならば*

$$\langle G(t) \rangle \rightrightarrows 0, \quad \langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle \rightrightarrows 0 \quad \dots\dots (4.8)$$

に対し、

$$\langle W(t) \otimes W(t) \rangle \rightrightarrows 0 \quad \dots\dots (4.9)$$

を得る。すなわち、定理1を満たすことができる。そこで以下では、変数 $G(t)$ についてその確率的性質を検討する。

(4.5) 式を (4.3) 式に代入すると、

$$\begin{aligned} G(t) &= \sum_i \alpha_i(t) [P_i(D)] [L(D)]^{-1} \delta(t) \\ &\quad + \rho \sum_i \alpha_i(t) [P_i(D)] [L(D)]^{-1} G(t) \quad \dots\dots (4.10) \end{aligned}$$

ここで、 $[P_i(D)][L(D)]^{-1} = [L(D)]^{-1} [P_i(D)] \equiv [S_i(D)]$ とおく。これはパラメータ感度を表わす作用素である。さらに

$$S_i(t) = [S_i(D)] \delta(t) = \mathcal{F}^{-1} [S_i(j\omega)] \quad \dots\dots (4.11)$$

とおけば、

* $\rightrightarrows$ の記号はある時間関数 $f(t)$ が

$$|f(t)| \leq C e^{-at}, \quad C > 0, \quad a > 0$$

とかけるとき、 $t \rightarrow \infty$ に対し $f(t) \rightrightarrows 0$ と表わし、漸近安定を意味する。また、マトリクス形式では

$$\|F(t)\| \leq C e^{-at}, \quad C > 0, \quad a > 0$$

とかけるとき、 $t \rightarrow \infty$ に対し $F(t) \rightrightarrows 0$ と表わす。

$$G(t) = \sum_l \alpha_l(t) S_l(t) + \rho \sum_l \alpha_l(t) \int_{-\infty}^{\infty} S_l(t-\tau) G(\tau) d\tau \quad \dots\dots (4.12)$$

を得る. この積分方程式は $\rho \rightarrow 0$ に対する漸近展開の形で

$$G(t) = G^{(0)}(t) + \rho G^{(1)}(t) + \dots\dots + \rho^k G^{(k)}(t) + o(\rho^k) \quad \dots\dots (4.13)$$

とかくことができ, 各項は

$$G^{(0)}(t) = \sum_l \alpha_l(t) S_l(t)$$

$$G^{(1)}(t) = \sum_l \alpha_l(t) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} S_l(t-\tau_1) \sum_l \alpha_l(\tau_1) S_l(\tau_1) d\tau_1$$

$\vdots$

$$G^{(k)}(t) = \sum_l \alpha_l(t) \int_{-\infty}^{\infty} S_l(t-\tau_1) \sum_l \alpha_l(\tau_1) \int_{-\infty}^{\infty} S_l(\tau_1-\tau_2) \dots\dots \sum_l \alpha_l(\tau_k) S_l(\tau_k) d\tau_k \dots\dots d\tau_1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l_0} \sum_{l_1} \dots\dots \sum_{l_k} S_{l_0}(t-\tau_1) S_{l_1}(\tau_1-\tau_2) \dots\dots S_{l_k}(\tau_k) \alpha_{l_0}(t) \alpha_{l_1}(\tau_1) \dots\dots \alpha_{l_k}(\tau_k) d\tau_k \dots\dots d\tau_1$$

となる. この $G(t)$ についての二次モーメント形式を (4.13) 式に従って求めてみよう. すなわち,

$$\langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle = \langle H^{(0)} \rangle + \rho \langle H^{(1)} \rangle + \dots\dots + \rho^k \langle H^{(k)} \rangle + o(\rho^k) \quad \dots\dots (4.14)$$

ここで,

$$\langle H^{(k)} \rangle = \sum_{h=0}^k \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \quad \dots\dots (4.15)$$

(4.15) 式の各項は

$$\langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l_{01}} \sum_{l_{02}} \sum_{l_1} \dots\dots \sum_{l_k} S_{l_{01}}(t_1-\tau_1) S_{l_1}(\tau_1-\tau_2) \dots\dots S_{l_h}(\tau_h)$$

$$\otimes S_{l_{02}}(t_2-\tau_{h+1}) S_{l_{h+1}}(\tau_{h+1}-\tau_{h+2}) \dots\dots S_{l_k}(\tau_k) \langle \alpha_{l_{01}}(t_1) \alpha_{l_1}(\tau_1) \dots\dots \alpha_{l_h}(\tau_h) \alpha_{l_{02}}(t_2) \alpha_{l_{h+1}}(\tau_{h+1})$$

$$\dots\dots \alpha_{l_k}(\tau_k) \rangle d\tau_k \dots\dots d\tau_1 \quad \dots\dots (4.16)$$

ノルムについては,

$$\| \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \dots\dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{l_{01}} \sum_{l_{02}} \sum_{l_1} \dots\dots \sum_{l_k} \| S_{l_{01}}(t_1-\tau_1) \| \dots\dots \| S_{l_h}(\tau_h) \| \cdot \| S_{l_{02}}(t_2-\tau_{h+1}) \|$$

$$\times \| S_{l_{h+1}}(\tau_{h+1}-\tau_{h+2}) \| \dots\dots \| S_{l_k}(\tau_k) \| \cdot \| \langle \alpha_{l_{01}}(t_1) \alpha_{l_1}(\tau_1) \dots\dots \alpha_{l_h}(\tau_h) \rangle \| d\tau_k \dots\dots d\tau_1 \quad \dots\dots (4.17)$$

なる不等式を得る.

いま, つぎのような場合を考える. すなわち,

$$\| S_l(t) \| \leq C_l e^{-a|t|}, \quad C_l > 0, \quad a > 0 \quad \dots (4.18)$$

この $S_l(t)$ はさきの (4.11) 式で与えられるが, それがこの (4.18) 式のようにかけることは, 乱されないものとの系

$$[L(D)] \mathbf{x}(t) = \mathbf{u}(t) \quad \dots\dots (4.19)$$

が安定な場合に相当する. この (4.18) 式を (4.17) 式に適用するとつぎの不等式を得る.

$$\| \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \| \leq e^{-a(t_1+t_2)} \sum_{l_{01}} \sum_{l_{02}} \sum_{l_1} \dots\dots$$

$$\dots\dots \sum_{l_k} C_{l_{01}} C_{l_{02}} C_{l_1} \dots\dots C_{l_k}$$

$$\int_0^{t_1} \dots\dots \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots\dots \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_{01}}(\tau_1) \alpha_{l_{02}}(\tau_2) \alpha_{l_1}(\tau_1)$$

$$\dots\dots \alpha_{l_k}(\tau_k) \rangle d\tau_k \dots\dots d\tau_1 \quad \dots\dots (4.20)$$

ただし, 時間 t についての対称性から, 安定問題においては $t_1 > 0, t_2 > 0$ を考えれば十分であり, この (4.20) 式以下では,

$$t_1 \geq \tau_1 \geq \dots\dots \geq \tau_h \geq 0$$

$$t_2 \geq \tau_{h+1} \geq \dots\dots \geq \tau_k \geq 0$$

のみにして示した.

ここで, まえがきでも述べたように, 確率過程をなすランダムパラメータ $\alpha(t)$ をつぎのように仮定する.

仮定 2

ランダムパラメータ $\alpha_1(t), \alpha_2(t) \dots\dots \alpha_v(t)$ はすべて平均値ゼロの Gauss 過程 (Gaussian process) をなし, それらの組み合わせからなる二次モーメントはすべて知られているものとする.

そこで, (4.20) 式から k 偶数については (補遺 I)

$$\| \langle H^{(k)} \rangle \| \leq \sum_{h=0}^k \| \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \| \leq e^{-a(t_1+t_2)} \left[\sum_{l_1 l_2} C_{l_1} C_{l_2} \langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(t_2) \rangle \right]$$

$$\times \frac{1}{(k/2)!} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{l_1 l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 + 2 \sum_{l_1 l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sum_{l_1 l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right)^{k/2} \right\} + \left(\sum_{l_1 l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle d\tau \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau \Big) \Big(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} |\langle \alpha_{l_1}(t_2) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau \\
& + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(t_2) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau \Big) \\
& \times \frac{1}{(k/2-1)!} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \right. \right. \\
& \quad + 2 \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \right)^{k/2-1} \right\} \quad \dots\dots (4.21)
\end{aligned}$$

k 奇数については,

$$\| \langle H^{(k)} \rangle \| = 0 \quad \dots\dots (4.22)$$

となる。(4.14) 式から

$$\| \langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle \| \leq \| \langle H^{(0)} \rangle \| + \rho \| \langle H^{(1)} \rangle \| + \rho^2 \| \langle H^{(2)} \rangle \| + \dots\dots + o(\rho^k) \quad \dots\dots (4.23)$$

であるから, (4.21) 式を $k \rightarrow \infty$ について総和を求めると,

$$\begin{aligned}
& \| \langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle \| \leq e^{-a(t_1+t_2)} \left\{ \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} |\langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(t_2) \rangle| \right. \\
& \quad + \rho^2 \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} |\langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau \right) \\
& \quad \times \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} |\langle \alpha_{l_1}(t_2) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(t_2) \alpha_{l_2}(\tau) \rangle| d\tau \right) \Big\} \\
& \quad \exp \left\{ \frac{\rho^2}{2} \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 + 2 \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \right) \right\} \quad \dots\dots (4.24)
\end{aligned}$$

を得る。いま, $\langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(t_2) \rangle = \phi_{l_1 l_2}(t_1 - t_2) = \phi_{l_1 l_2}(v)$ とおく。これはランダムパラメータの相関関数である。

(4.24) 式はそこで,

$$\begin{aligned}
& \| \langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle \| \leq \left\{ \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} |\phi_{l_1 l_2}(t_1 - t_2)| \right. \\
& \quad + \rho^2 \frac{3}{2} \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv \right)^2 \Big\} \\
& \quad \exp \left\{ -a + \rho^2 \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv \right\} (t_1 + t_2) \quad \dots\dots (4.25)
\end{aligned}$$

とすることが出来る。(補遺 II)

(4.25) 式の右边がもしゼロに漸近するならば,

$$\langle G(t_1) \otimes G(t_2) \rangle \rightarrow 0$$

がいえ, よって, さきに定義した確率的安定, 二次モーメント安定を明らかにすることができる。すなわちつぎの安定十分条件定理を得る。

定 理 2

$$\frac{\rho^2}{a} \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv < 1 \quad \dots\dots (4.26)$$

ならば, 系(2.2) 式は二次モーメントの意味で確率的に安定である(十分条件)。ただし,

$$\phi_{l_1 l_2}(v) = \langle \alpha_{l_1}(t) \alpha_{l_2}(t+v) \rangle \quad \dots\dots (4.27)$$

なお, $\phi_{l_1 l_2}(v) \geq 0$ ならば,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{l_1 l_2}(v) dv = \phi_{l_1 l_2}(0)$$

すなわち, ゼロ周波数におけるスペクトル密度に対応する。また, パラメータ ρ は積分方程式(4.12) 式を(4.13) 式に展開するための仮のパラメータであり, その総和が(4.24) 式で求めた以上, $\rho=1$ においても一般性を失わない。

5. 簡単な適用例

例 1 $[D^2 + K_1(1 + \alpha_1(t))D + K_2]x = u$

で表わされる系を考える。この場合作用素 $S_1(D)$ は,

$$S_1(D) = \frac{K_1 D}{D^2 + K_1 D + K_2}$$

したがって, (4.11) 式, (4.18) 式から

$$C_1 = \frac{2K_1 \sqrt{K_2}}{\sqrt{4K_2 - K_1^2}}, \quad a = \frac{K_1}{2}, \quad (K_2 > \frac{K_1^2}{4})$$

と定めることができ, 安定十分条件は定理 2 から,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{11}(v)| dv < \frac{4K_2 - K_1^2}{8K_1 K_2}$$

となる。 $K_1 - K_2$ 面にこの安定領域を描いたのが **Fig. 1** である。ただし, $\phi_{11}(v) = \langle \alpha_1(t) \alpha_1(t+v) \rangle$

例 2 $[D^2 + K_1 D + K_2(1 + \alpha_2(t))]x = u$

この場合

Fig. 1 Stability region for $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{11}(v)| dv < \sigma_1$

$$S_2(D) = \frac{K_2}{D^2 + K_1 D + K_2}$$

そして,

$$C_2 = \frac{2K_2}{\sqrt{4K_2 - K_1^2}}, \quad a = \frac{K_1}{2} \quad \left(K_2 > \frac{K_1^2}{4} \right)$$

と定めることができ、安定十分条件は定理 2 から,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{22}(v)| dv < \frac{K_1(4K_2 - K_1^2)}{8K_2^2}$$

となる。 K_1 - K_2 面にこの安定領域を描いたのが Fig.

2 である。ただし、 $\phi_{22}(v) = \langle \alpha_2(t) \alpha_2(t+v) \rangle$

例 3 $[D^2 + K_1(1 + \alpha_1(t))D + K_2(1 + \alpha_2(t))]x = u$
 $\alpha_1(t)$ と $\alpha_2(t)$ の間に相関がある場合を含めて、安定十分条件は、定理 2 から一般的に、

$$K_1^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{11}(v)| dv + K_1 \sqrt{K_2} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{12}(v)| dv \\ + K_2 \int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{22}(v)| dv \leq \frac{K_1}{8K_2} (4K_2 - K_1^2)$$

と与えられる。ただし、 $\phi_{12}(v) = \langle \alpha_1(t) \alpha_2(t+v) \rangle$ 。

補遺 I. (4.20) 式から (4.21) 式の誘導

仮定 2 に従って (4.20) 式の被積分項を二次モーメントにわけ、まともに解いてもよいが、その過程はかなり複雑になる。そこで、いま一つの仮定、すなわち、

$$|\langle \alpha_{i01}(t_1) \alpha_{i02}(t_2) \alpha_{i1}(\tau_1) \cdots \alpha_{ik}(\tau_k) \rangle| \\ \leq \langle \alpha_{i01}'(t_1) \alpha_{i02}'(t_2) \alpha_{i1}'(\tau_1) \cdots \alpha_{ik}'(\tau_k) \rangle \cdots (A.1) \nearrow$$

$$||G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2)|| \leq e^{-a(t_1+t_2)} \langle \sum_i C_i \alpha_i'(t_1) \sum_i C_i \alpha_i'(t_2) \int_0^{t_1} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau_1) \int_0^{\tau_1} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau_2) \cdots \\ \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau_k) \int_0^{t_2} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau_{k+1}) \cdots \int_0^{\tau_{k-1}} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau_k) d\tau_k \cdots d\tau_1 \rangle \cdots (A.3)$$

とかくことができる。部分積分定理を繰り返し用いれば、この (A.3) 式の右辺は、

$$e^{-a(t_1+t_2)} \langle \sum_i C_i \alpha_i'(t_1) \sum_i C_i \alpha_i'(t_2) \frac{1}{h!} \left(\int_0^{t_1} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau) d\tau \right)^h \frac{1}{(k-h)!} \left(\int_0^{t_2} \sum_i C_i \alpha_i'(\tau) d\tau \right)^{k-h} \rangle \cdots (A.4)$$

よって、

Fig. 2 Stability region for $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi_{22}(v)| dv < \sigma_2$

5. あとがき

系パラメータが定常確率過程、とくに Gauss 過程に従う確率系の安定十分条件を、以上のように与えることができた。ただ、このような確率論的考え方では、状態量がある時点で非常に大きくなっても、平均的に有界であれば安定という、決定論的に考えた場合不自然となることがある。そこで、それがどの程度ゆるされるか、その系が実際に要求する安定性の意味を検討し、さらに高次のモーメントを求めるなりして、十分注意したうえで適用する必要がある。

また、ここで得られた結果は、十分条件のみを与えるもので、必十条件に対しどの程度の厳密さをもつかは未解決である。

おわりに、長らくご指導たまわった早稲田大学帆足名誉教授、ならびに計測研究室関係の諸先生方にお礼申し上げる。

$\nearrow$ を満たす Gauss 過程をなすパラメータ $\alpha_{i01}'(t_1)$, $\alpha_{i02}'(t_2)$, $\alpha_{i1}'(\tau_1)$, $\cdots$, $\alpha_{ik}'(\tau_k)$ が、 k のいかににかかわらず存在するものとする。これは結局

$$|\langle \alpha_{i1}(t_1) \alpha_{i2}(t_2) \rangle| \leq \langle \alpha_{i1}'(t_1) \alpha_{i2}'(t_2) \rangle \cdots (A.2)$$

を満たすことであり、一般に妥当な仮定であろう。

もしこの仮定が満たされれば、(4.20) 式は

$$\begin{aligned} \| \langle H^{(k)} \rangle \| &\leq \sum_{h=0}^k \| \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \| \\ &\leq e^{-a(t_1+t_2)} \langle \sum_l C_l \alpha_l'(t_1) \sum_l C_l \alpha_l'(t_2) \frac{1}{k!} \left(\int_0^{t_1} \sum_l C_l \alpha_l'(\tau) d\tau + \int_0^{t_2} \sum_l C_l \alpha_l'(\tau) d\tau \right)^k \rangle \end{aligned} \quad \dots\dots (A.5)$$

を得る. $\alpha_l'(t)$ が Gauss 過程ならば $\sum_l C_l \alpha_l'(t)$, $\int_0^t \sum_l C_l \alpha_l'(\tau) d\tau$ も Gauss 過程となるから, 以下多次元 Gauss 分布の期待値問題¹³⁾を適用して,

$$\begin{aligned} \| \langle H^{(k)} \rangle \| &\leq \sum_{h=0}^k \| \langle G^{(h)}(t_1) \otimes G^{(k-h)}(t_2) \rangle \| \leq e^{-a(t_1+t_2)} \left[\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \langle \alpha_{l_1}'(t_1) \alpha_{l_2}'(t_2) \rangle \right. \\ &\quad \times \frac{1}{(k/2)!} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right)^{k/2} \right\} \\ &\quad + \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \langle \alpha_{l_1}'(t_1) \alpha_{l_2}'(\tau) \rangle d\tau + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(t_1) \alpha_{l_2}'(\tau) \rangle d\tau \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \langle \alpha_{l_1}'(t_2) \alpha_{l_2}'(\tau) \rangle d\tau + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(t_2) \alpha_{l_2}'(\tau) \rangle d\tau \right) \\ &\quad \times \frac{1}{(k/2-1)!} \left\{ \frac{1}{2} \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 + \sum_{l_1} \sum_{l_2} C_{l_1} C_{l_2} \int_0^{t_2} \int_0^{t_2} \langle \alpha_{l_1}'(\tau_1) \alpha_{l_2}'(\tau_2) \rangle d\tau_2 d\tau_1 \right)^{k/2-1} \right\} \left. \right] \end{aligned} \quad \dots\dots (A.6)$$

ここで, (A.6) 式は (A.1), (A.2) 式を満たすすべて

の $\alpha_l'(t)$ について成立するから,

$$\langle \alpha_{l_1}'(t_1) \alpha_{l_2}'(t_2) \rangle = \langle \alpha_{l_1}(t_1) \alpha_{l_2}(t_2) \rangle \quad \dots\dots (A.7)$$

をも含む. よって, (4.21) 式が導かれたことになる.

補遺 II. (4.24) 式から (4.25) 式の誘導

exp の外については明らかであるから, その中について検討する. 一般に,

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |\langle \alpha_{l_1}(\tau_1) \alpha_{l_2}(\tau_2) \rangle| d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} |\phi_{l_1 l_2}(\tau_2 - \tau_1)| d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^{t_1} \int_{-\tau_1}^{t_2 - \tau_1} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv d\tau_1 \\ &\leq (t_1 + t_2) \int_0^{t_1} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv \\ &= \int_0^{t_2} \int_{-\tau_2}^{t_1 - \tau_2} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv d\tau_2 \\ &\leq (t_1 + t_2) \int_0^{t_2} |\phi_{l_1 l_2}(v)| dv \quad \dots\dots (A.8) \end{aligned}$$

よって, (4.25) 式が得られることは明らかであろう.

参考文献

- 1) Rosenbloom, A.: Proc. Symp. on Information Networks, Polytechnic Inst. of Brooklyn, 145/153 (1954)
- 2) Samuels, J. C. and A. C. Eringen: J. Math. and Physics, **38**, 83/103 (1959)
- 3) Samuels, J. C.: IRE Trans. on Circuit Theory, CT-6, 248/259 (1959)
- 4) Samuels, J. C.: J. Acoust. Soc., **32**, 594/661 (1960)
- 5) Bertram, J. E. and P. E. Sarachick: IRE Trans. on Circuit Theory CT-6, 260/270 (1959)
- 6) Bergen, A. R.: IRE Trans. on Automatic Control AC-5, 265/269 (1960)
- 7) Bergen, A. R.: Trans. AIEE, **80** (Appl. and Ind.) 142/144 (1961)
- 8) Bershad, N. J. and P. M. DeRusso: IEEE Trans. on Automatic Control, AC-9, 301/303 (1964)
- 9) たとえば, 樫木, 砂原, 赤阪: SICE 講演会, 437 (1965)
- 10) 奥山: SICE 講演会, 436 (1965)
- 11) 奥山: 電気通信学会回路網理論研究会資料, C. T. Monograph No. 88-2 (1965)
- 12) Bellman, R.: Introduction to Matrix Analysis, p. 271 (McGraw-Hill-1960)
- 13) Lanning, J. H. and R. H. Battin: Random Process in Automatic Control, p. 83 (McGraw-Hill-1956)