周期変動復元項を有する 非線形二次系の安定性とステップ応答の近似的解析法[†]

本 多 庸 悟*・三 浦 良 一**

田 川 遼 三 郎**・小 山 昭 一**

* 機械試験所 東京都杉並区井草 4-12-1

** 北海道大学工学部 札幌市北十二条西 8

(昭和 42 年 3 月 28 日受付)

An Approximate Method for Analysis of Stability and Step Response of the Nonlinear Second Order System with a Periodically Time-Varying Restoring-Force Term

Tsunenori HONDA*, Ryoichi MIURA**

Ryozaburo TAGAWA** and Shoichi KOYAMA**

(* Government Mechanical Laboratory, Suginami-ku, Tokyo)

(** Faculty of Engineering, University of Hokkaido, Sapporo)

(Received March 28, 1967)

The ordinary differential equation which is expressed as $\ddot{e}_0 + p(t)e_0 = 0$ is called Mathieu's or Hill's differential equation according to $p(t) = \delta + \epsilon \sin t$ or $p(t) = \delta + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin nt$ respectively, and they have ever been studied in detail. However, the problem which the restoring-force term $p(t)e_0$ in the above differential equation is affected by some nonlinearity and exchanged for $N[p(t)e_0]$ (where $N[u]$ is some nonlinear characteristic for an input u and $p(t) = \delta + \epsilon \sin t$) has not been yet discussed. Such a problem, for example, comes out when the servosystem with (1) an actuator whose transfer function is $K_0/s(Ts+1)$, (2) a nonlinear element and (3) a sinusoidally time-varying gain element is studied.

The differential equation of this type, so to speak, may be regarded as a kind of nonlinearized Hill's differential equation, and it is useful to establish a convenient analytical method for the estimation of stability and step response, even if they are approximate. In this paper, (1) the equivalent nonlinear time-varying gain element for the estimation of stability, and (2) the equivalent nonlinear gain element for that of step response are defined and applied, based on the approach similar to the describing function method. The results of analysis by this method satisfactorily agreed with those by the analog computer.

1. ま え が き

復元項の係数が周期的に変動する時間関数であるような二次系は、Mathieu もしくは Hill の微分方程式によって記述される。これらの常微分方程式は、 $\ddot{e}_0 + p(t)e_0 = 0$ (ただし、 $p(t) = \delta + \epsilon \sin t$ または、 $\delta + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos nt$) と表わされ、これまでその性質などについて

詳細に検討がなされてきている。しかし、そこにおける $p(t)e_0$ の項がなんらかの非線形性の影響を受け、それが $N[p(t)e_0]$ (ただし、 $N[u]$ は入力 u に対するある非線形特性、 $p(t) = \delta + \epsilon \sin t$) におきかえられたような問題はまだ論じられていない。このような問題は、たとえば、先に報告された¹⁾、 $K_0/s(Ts+1)$ なる伝達関数を有するアクチュエータ²⁾、ある非線形要素および³⁾ 正弦的変動ゲイン要素から成る Fig. 1 のようなサーボ系¹⁾を論ずるときに遭遇する。このような

[†] 第 5 回計測自動制御学会学術講演会で発表 (昭 41・9・7)

Fig. 1 Fundamental configuration of nonlinear servosystem with sinusoidal timevarying gain element (S.V.G.)

形の常微分方程式は、いわば、非線形化された Hill の微分方程式と見なすことができ、たとえ近似的ではあっても安定性とステップ応答の推測のための簡便な解析的方法を得ることは有用なことである。

ここでは記述関数法的手法により、安定判別のためには等価非線形時間変動ゲイン要素を、またステップ応答の推測のためには等価非線形ゲイン要素を定義し、適用する。いくつかの解析例についてアナログ計算機による解析結果と比較検討する。

2. 考察の対象とする系の特質および手法の概要

扱う系のブロック線図をいまいし詳しく示すと Fig. 2 のようになる。ここでわれわれが調整することのできるパラメータは、 K_1, K_2, ψ および K_0 、さらに非線形要素 N を故意にそう入する場合にはその諸元、である。

もし N が存在しなければ、このような系を記述する運動方程式は、制御量 y 、入力を x とするとき、

$$\ddot{y} + \frac{1}{T}\dot{y} + \frac{K_0}{T}(K_1 + K_2 \sin \psi t)(y - x) = 0$$

(ただし、 $\cdot$ は時間に関する微分を表わす)

となり、とくにステップ入力があるときの偏差 $e_0(t)$ に関しては、

$$\ddot{e}_0 + \frac{1}{T}\dot{e}_0 + \frac{K_0}{T}(K_1 + K_2 \sin \psi t)e_0 = 0$$

となって、いわゆる mathieu の微分方程式となる。

しかるに N が存在する場合には、

$$T\ddot{y} + \dot{y} = K_0 N[K(t)e_0],$$

$$e_0 = x - y$$

(ただし、 $N[u]$ は入力を u とする非線形特性)

より、やはり x がステップ関数の場合には、

$$\ddot{e}_0 + \frac{1}{T}\dot{e}_0 + \frac{K_0}{T}N[K(t)e_0] = 0$$

Fig. 2 Nonlinear servosystem in question with S.V.G.

となり、 $N[K(t)e_0]$ をフーリエ展開すれば、Hill の微分方程式とも異なる非線形のパラメータ励振系を記述するものとなる。このような系を厳密に取り扱うことは非常に困難なので、ここでは、Fig. 2 における破線内の部分の要素を、それにある意味で等価と考えられる要素、すなわち、(1) 等価非線形変動ゲイン要素、(2) 等価非励振非線形ゲイン要素、に置き換えることにする。そして、安定判別のためには (1) および従来の mathieu の方程式に関する安定領域図を組み合わせて用い、安定な系のステップ応答の概略は、(2) によって位相面軌跡を描いて知ろうとする。

3. 安定判別法

3.1 等価非線形変動ゲイン要素

いま、系の中の正弦的変動ゲイン要素 (Sinusoidally Time-varying Gain Element, 以下 S.V.G. と略記) と非線形要素 N の部分、すなわち Fig. 3 の部分を、Fig. 4 に示すような、その係数がそれへの入力に依存するような S.V.G. に置き換えることにすると、Fig. 2 の系は、ステップ入力がある場合の e_0 について、

$$\begin{aligned} \ddot{e}_0 + \frac{1}{T}\dot{e}_0 + \frac{K_0 K_1}{T} \left\{ \delta_e(e_1, K_1, K_2; N) \right. \\ \left. + \epsilon_e(e_1, K_1, K_2; N) \sin \psi t \right. \\ \left. + \eta_e(e_1, K_1, K_2; N) \cos \psi t \right\} e_0 = 0 \quad \dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

と示される。 $\delta_e(e_1, K_1, K_2; N)$ などの表示は、これら係数 $\delta_e, \epsilon_e, \eta_e$ が、Fig. 2 における e_1, K_1, K_2 および非線形要素 N の入出力特性に依存することを示すためである。

さて、 δ_e, ϵ_e および η_e を、対象とする非線形要素に対して決定しなければならない。そのために入力信号としてステップ関数を用い、それに対する N からの出力の基本成分を取り出して入力ステップの大きさとの比を取ることとする。このようにステップ入力を用いることの根拠は、Fig. 2 の破線内の部分が励振作用

Fig. 3 S.V.G. and nonlinear element of the system shown in Fig. 2

Fig. 4 Equivalent S.V.G. element

を行なうことは明白であって、要は等価な係数を定めればよいことによる。Fig. 4 において $\eta_e \neq 0$ となって $\cos \phi t$ の項が現われるのは、 N がゼロ・メモリ形でない場合である。また N の出力の基本波成分のみを取り出すのは、あくまでも計算の簡略化のためであって、mathieu 方程式に関する結果の利用を意図している。

このようにして、Fig. 2 のような系を mathieu 方程式に類似な形のものに置き換えて表現し、すでに得られている mathieu 方程式に関する安定領域図^{2), 3)} を利用して、近似的にはあるが、その安定性を判別できる。

さて、諸パラメータを、従来の Mathieu 方程式に関する研究にならって次のように変換する。いま、Fig. 2 に示される系において N が存在しない場合の運動方程式

$$\ddot{e}_0 + \frac{1}{T} \dot{e}_0 + \frac{K_0}{T} (K_1 + K_2 \sin \phi t) e_0 = 0 \quad \dots (3.2)$$

において、

$$\frac{K_0 K_1}{T} \triangleq K_1', \quad \frac{K_0 K_2}{T} \triangleq K_2', \quad \frac{1}{T} \triangleq 2\beta, \quad \frac{\beta}{\sqrt{K_1'}} \triangleq \zeta$$

と置く。 β は、(3.2) 式において $K_2 \sin \phi t$ の項を欠く場合の式の減衰項に相当する。さらに、

$$\left. \begin{aligned} \frac{K_1' - \beta^2}{\phi^2} &= K_1' \frac{1 - \zeta^2}{\phi^2} \triangleq \delta' \\ \frac{K_2'}{\phi^2} &= K_1' \frac{K_2' / K_1'}{\phi^2} \triangleq \epsilon' \end{aligned} \right\} \quad \dots (3.3)$$

と置く。従来の Mathieu 方程式の安定領域図は、この ζ をパラメータとし、 δ' 、 ϵ' に関して描かれている。

等価な励振要素に置きかえた場合の式については、上の (3.3) 式は、

$$\delta' = K_1' \frac{\delta_e - \zeta^2}{\phi^2}, \quad \epsilon' = K_1' \frac{\epsilon_e}{\phi^2}$$

となり、これから、 δ' 、 ϵ' の間の関係として、

$$\epsilon' = \frac{\epsilon_e}{\delta_e - \zeta^2} \delta' \quad \dots (3.4)$$

が得られる。これは安定領域図上に原点を通る直線として示され、そのこう配 $\epsilon_e / (\delta_e - \zeta^2)$ は規格化入力、 K_1' 、 K_2' により定まる。そして、この直線上に ϕ が目盛られる。したがって、この直線 (3.4) 式を安定領域図上に引いたときに、 ϕ と安定領域との関係が求められる。以下に、 N として基本的なものを取り上げて例示しよう。

3.2 S.V.G. と不感帯要素とを含む場合

Fig. 5 のように、 N が大きさ D なる不感帯要素である場合を考える。いま、 e_0 として大きさ A なるステップを用いたとすれば、 e_2 は、 $e_2 = A(K_1 + K_2 \sin \phi t)$

Fig. 5 S.V.G. and deadband element

Fig. 6 Input-output relation for deadband

なる、直流分を含んだ正弦波信号となり、これが N 、すなわち今の場合には不感帯にはいる。その入出力波形は、Fig. 6 のようになる。 N からの出力 e_3 をフーリエ解析し、各成分を $e_1 = AK_1$ で割ったものが、前述の e_1 から e_3 までの部分に等価な変動ゲイン要素の係数 δ_e 、 ϵ_e となる。すなわち、

$$\begin{aligned} \delta_e &= \frac{1}{AK_1} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_3(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{K_2}{K_1} \cdot 2 \cos \theta_1 - \left(\frac{D}{A} - 1 \right) (\pi - 2\theta_1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{K_2}{K_1} \cdot 2 \cos \theta_1' + \left(\frac{D}{A} + 1 \right) (\pi - 2\theta_1') \right\} \\ \epsilon_e &= \frac{1}{AK_1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e_3(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \left\{ \left(1 - \frac{D}{A} \right) \cdot 2 \cos \theta_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{K_2}{K_1} (\pi - \theta_1 - \theta_1') + \left(1 + \frac{D}{A} \right) (-2 \cos \theta_1') \right\} \end{aligned}$$

ただし、

$$\theta_1, \theta_2 = \sin^{-1} \frac{1 - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}, \quad \theta_1', \theta_2' = \sin^{-1} \frac{-1 - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}$$

K_2/K_1 をパラメータとして、 A/D に対する δ_e 、 ϵ_e の変化の様子を Fig. 7 に示す。

次に、この結果を用いて、S.V.G. と不感帯とを含む系の安定状態の推察例を示そう。いま、

$$K_1' = 1.5, \quad K_2' = 6.0, \quad \zeta = 0.4$$

とする。たとえば、 $A/D = 0.5$ の場合には、Fig. 7 から、

$$\delta_e = 0.661, \quad \epsilon_e = 0.791$$

が得られ、したがって、(3.4) 式から、 $\epsilon' = 1.44 \delta'$ となる。その他、各種の A/D について同様にして得た結果を Fig. 8 に示す。すなわち、 $A/D = 0.5$ では、あらゆる ϕ に対して安定、1.0 の場合には安定領域は、

Fig. 7 δ_e and ϵ_e for S.V.G. and deadband

$0 < \epsilon' < 0.38$ および $1.70 < \epsilon' < 2.45$

であって、これから、

$\psi > 0.472$ [c/s] および $0.223 > \psi > 0.186$ [c/s]

と求まる。その他の A/D についても全く同様に行なえばよい。

一方、このような系の応答をアナログ計算機によって求めた結果の二、三を Fig. 9 に示す。 ψ がかなり小さい場合には入力印加時の S.V.

G. の位相によって過渡応答、はなはだしくは安定性自体が異なることがあるので、 $\pi/2$ ずつずらした 4 通りについて確かめ、いずれも安定であった場合のみを安定と見なした。以上の理論的推定結果と実験結果とを取りまとめて Table 1 に示した。

Fig. 9 A few examples of analog computer solutions

3.3 S.V.G. とその他の N についての例

N が Fig. 10 (a) のような不感帯のある飽和であるような場合には、前節と同様の原理により、

A/D	estimated value [c/s]	experimental value [c/s]
0.5	$0 \sim \infty$	$0 \sim \infty$
0.8	$0.17 \sim 0.22$ $0.43 \sim \infty$	0.20 $0.48 \sim \infty$
1.0	$0.19 \sim 0.22$ $0.47 \sim \infty$	0.20 $0.50 \sim \infty$
1.5	$0.25 \sim 0.26$ $0.52 \sim \infty$	— $0.52 \sim \infty$
2.0	$0.27 \sim 0.34$ $0.54 \sim \infty$	0.30 $0.60 \sim \infty$

Table 1 Stable regions in terms of estimation and experimentation

$$K_1 \delta_e = \frac{2}{\pi} \left\{ K_1 (\lambda_1 + \lambda_1' - \theta_1 - \theta_1' - K_2 (\cos \lambda_1 + \cos \lambda_1')) - \cos \theta_1 - \cos \theta_1' + \frac{S}{A} (2\pi - \lambda_1 - \lambda_1') \right\}$$

Fig. 10 The case of deadband with saturation

$$K_1 \varepsilon_e = \frac{1}{\pi A} \left\{ K_2 (\lambda_1 + \lambda_1' - \theta_1 - \theta_1') - \frac{S}{A} (\cos \lambda_1 + \cos \lambda_1') \right\}$$

ただし,

$$\theta_1, \theta_2 = \sin^{-1} \frac{1 - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}, \quad \theta_1', \theta_2' = \sin^{-1} \frac{-1 - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sin^{-1} \frac{1 + \frac{S}{kD} - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}, \quad \lambda_1', \lambda_2' = \sin^{-1} \frac{-1 - \frac{S}{kD} - \frac{A}{D}}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D}}$$

となる. 特性の一例を Fig. 10 (b) に, 安定状態推察例を同 (c) に示す. すべての ϕ について安定であるとわかるがこれをアナログ計算機によって確認した. これを同図 (d) に示した.

つぎに, N がゼロ・メモリ形でない例として. **Fig. 11 (a)** のようなヒステリシスの場合を考えよう. この場合には, (3.1) 式の η_e が恒等的に 0 ということとはなくなり, 等価変動ゲイン要素は, $\delta_e + \varepsilon_e \sin \phi t + \eta_e \cos \phi t$ なる形となる. これらの係数を求める手順は今までのものと同様である. ヒステリシスの幅が $\pm$

H , 直線部のこう配が k であるとする, と,

$AK_2/H \geq 1$ の場合

$$\delta_e = k, \quad \varepsilon_e = \frac{4k}{\pi} \cdot \frac{AK_2/H - 1}{(AK_2/H)^2}$$

$$\eta_e = \frac{k}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{AK_2/H - 2}{AK_2/H} \cdot \cos \theta \right)$$

ただし,

$$\theta = \sin^{-1} \frac{AK_2/H - 2}{AK_2/H}$$

$AK_2/H < 1$ の場合,

$$\delta_e = k, \quad \varepsilon_e = \eta_e = 0$$

$k=1$ の場合の係数の特性を Fig. 11 (b) に示す. このように励振項に直交成分が現われたので, 従来の Mathieu 方程式の安定領域図をそのまま使うことはできず, $\delta', \varepsilon', \eta'$ の三つのパラメータに関するものによりかえねばならない. これには, Mathieu 方程式の安定性が, 励振項の位相に関係がないことに着目し,

$$\varepsilon \sin t + \eta \cos t = \sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2} \cos \left(t - \tan^{-1} \frac{\varepsilon}{\eta} \right)$$

から, ε を $\sqrt{\varepsilon^2 + \eta^2}$ におきかえればよい.

国井, 樫木らによる安定領域図²⁾ をもとにして作成した, S. V. G. と幅が $\pm H$ のヒステリシスを含む系のための安定領域図の例を Fig. 11 (c) に示す. さらに, アナログ計算機により確かめた結果を, 安定であった場合を○, 不安定の場合を×で示した.

4. ステップ応答波形の推測

4.1 S. V. G. と N のための Pseudo Describing Function

ここでは, Fig. 3 に示した S. V. G. と N とから成る部分を, **Fig. 12** に示すような新たな非励振的な等価非線形ゲイン要素におきかえ, それによって位相面軌跡を描いてステップ応答の概略を知ることを試みる. そのために, 2 入力信号の場合の記述関数⁴⁾を拡張し, 適用する.

2 入力の場合, 偏差信号を $A \sin \omega t$, あわせ用いる dither signal を $B \sin \phi t$ とすると,

$$e_2 = A \sin \omega t + B \sin \phi t$$

ただし, $\phi = n\omega$, n : 正整数,

なる形であるのに対し, ここで扱っている場合は 1 入力であるが, e_2 が 2 入力の系の場合に類似しており, このような記述関数を用いることが可能であろう. 詳

Fig. 11 The case of hysteresis

Fig. 12 Equivalent nonlinear gain element

しくは,

$$e_2 = \left(1 + \frac{K_2}{K_1} \sin \phi t\right) A \sin \omega t$$

ただし, $\phi = n\omega$, n : 正整数,

であり, n を小さくして模式的に図示すると Fig. 13 (a) のようになる. ここで, Fig. 13 (b) に見るように S. V. G. のゲイン変動の 1 周期ごとに, test 入力 $A \sin \omega t$ の波形を $\omega t = \frac{2\pi}{n} i$, $i = 1, 2, \dots, n$ ごとの値 AE_i を階段状につなぎ合わせた波形で近似し, それが N へ与えられるとする. S. V. G. の 1 周期ごとに分割して N からの平均出力を計算することを $A \sin \omega t$ の 1 周期について行ない, それらの値をつなぎ合わせた波形の基本波成分の大きさを算出して, 入力振幅 A との比をとる. これを各種の大きさの A について行なう.

このようにして求めた P. D. F. による, 等価非線形ゲイン $K_{eq}(e_1)$ によって置きかえられた系は, Fig. 14 のようになる. ステップ入力を受ける場合の, 偏差 e_0 に関する運動方程式は,

$$\ddot{e}_0 + \frac{1}{T} \dot{e}_0 + \frac{K_0 K_1}{T} \cdot K_{eq}(e_1) e_0 = 0$$

となり, $K_{eq}(e_1)$ が知られていれば, 任意の大きさのステップ入力に加わったときの e_0 を位相面軌跡としてとらえることが可能となる.

Fig. 14 Application of K_{eq}

4.2 S. V. G. と不感帯要素を含む場合

不感帯要素の入出力波形の関係を Fig. 15 に示す. まず, S. V. G. の 1 周期分に対する deadband からの出力の平均値 R_i は,

$$R_i = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} E_i \sin \phi t - \left(1 - \frac{A}{D} E_i\right) \right\} d\theta$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1'}^{\theta_2'} \left\{ \frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} E_i \sin \phi t - \left(1 + \frac{A}{D} E_i\right) \right\} d\theta$$

Fig. 15 Input-output relation for 1 cycle of S. V. G.

ただし,

$$\theta_1, \theta_2 = \frac{1 - \frac{A}{D} E_i}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} E_i}, \quad \theta_1', \theta_2' = \frac{-1 - \frac{A}{D} E_i}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} E_i}$$

$$E_i = \sin\left(\frac{2\pi}{36} i\right), \quad i = 1, 2, \dots, 36$$

この R_i を, すべて連ねた波形から基本波を取り出す. 調和解析の手法に従えば, $2m$ 個の点を与えられたときには, その基本波成分の大きさ a_1 は,

$$a_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{2m} R_i \sin \frac{i\pi}{m}$$

と与えられる. ここでは, $n = 36$, $2m = 36$

とし, また, 波形の対称性を考慮すれば,

$$a_1 = \frac{1}{18} \{4(R_1 \sin 10^\circ + R_2 \sin 20^\circ + \dots + R_9) - 2R_9\}$$

となる. 以上の手順に従って計算した結果を Fig. 16

A: $K_2/K_1 = 4.0$
B: $K_2/K_1 = 8.0$
C: $K_2/K_1 = 16$
D: $K_2/K_1 = 32$
E: $K_2/K_1 = 64$

Fig. 16

K_{eq} for S. V. G. and deadband

$\zeta = 0.4$, $K_1 = 1.5$, $K_2 = 6.0$, $T = K_0$

..... Estimated trajectories

— Experimental trajectories

Fig. 17 Trajectories on the phase plane

Fig. 18 The effect of S.V.G. on the system containing a deadband

に示す。

これを用いて位相面軌跡を描き、アナログ計算機による実験との比較を行なった結果を **Fig. 17** に示す。等価要素が非励振的であるため、過渡応答が特にその初期において多少異なることはやむを得ない。実験の例は、特に、S.V.G. の変動周波数を $\phi=0.6 \text{ c/s}$ というやや小さめの値にしたものなので、この弱みが目立っているが、定常応答については一応の一致を示している。**Fig. 18** には、S.V.G. の効果を、それを用いない場合と対比して示した。

4.3 S.V.G. とその他の N についての例

その他の N が用いられた場合についても、手順は前節と全く同じである。以下に基本的な二、三のものにつきその式と特性とを列挙しておく。

(a) K_{eq} for S.V.G. and saturation

A: $K_2/K_1=4.0$ B: $K_2/K_1=8.0$

(b) K_{eq} for S.V.G. and relay

C: $K_2/K_1=16$ D: $K_2/K_1=32$

(c) K_{eq} for S.V.G. and relay with deadband

E: $K_2/K_1=64$

Fig. 19 K_{eq} 's for S.V.G. and some fundamental nonlinear elements

S.V.G. と飽和要素：

$$\frac{R_i}{S} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{kA}{S} E_i \left\{ \theta_1 + \theta_1' - \frac{K_2}{K_1} (\cos \theta_1 - \cos \theta_1') \right\} + (\theta_1' - \theta_1) \right]$$

ただし、 S ：飽和のレベル

$$\theta_1 = \sin^{-1} \left| \frac{1}{K_2/K_1} \left(\frac{1 - \frac{kA}{S} \cdot E_i}{\frac{kA}{S} \cdot E_i} \right) \right|$$

$$\theta_1' = \sin^{-1} \left| \frac{1}{K_2/K_1} \left(\frac{-1 - \frac{kA}{S} \cdot E_i}{\frac{kA}{S} \cdot E_i} \right) \right|$$

S.V.G. と飽和のある不感帯：

N が不感帯および飽和である場合の 2 例から合成することができる。

S.V.G. Relay：

$$R_i = \frac{S}{2\pi} \{ (2\pi - \theta_2 + \theta_1) - (\theta_2 - \theta_1) \} = \frac{2S}{\pi} (\theta_1 - \pi)$$

ただし、 S ：Relay 出力のレベル

$$\theta_1 \text{ および } \theta_2 = \sin^{-1} \left(-\frac{K_1}{K_2} \right)$$

S.V.G. と不感帯のある Relay：

$$R_i = \frac{S}{2\pi} \{ (\theta_2 - \theta_1) - (\theta_2' - \theta_1') \} = \frac{S}{\pi} (\theta_1' - \theta_1)$$

ただし、

$$\theta_1 = \sin^{-1} \frac{1 - \frac{A}{D} \cdot E_i}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} \cdot E_i}, \quad \theta_1' = \sin^{-1} \frac{-1 - \frac{A}{D} \cdot E_i}{\frac{K_2}{K_1} \cdot \frac{A}{D} \cdot E_i}$$

Fig. 19 にこれらの特性を示した。

5. む す び

正弦的に変動するゲイン要素を含む非線形二次系の安定性およびステップ応答を簡便に知るための記述関

数法的手法を提示し、いくつかの非線形要素についての計算例を示し、アナログ計算機による解析例と対比してその有効なことを確かめた。

参 考 文 献

- 1) 田川, 本多, 小山, 三浦: 周期変化するゲイン要素によるサーボ系の特性改善法, 計測自動制御学会第1回学術講演会論文集, No. 104 (1962)

- 2) 榎木: 非線形振動論, p. 65~p. 89 (共立出版-1958)
- 3) 国井, 榎木, 高橋: 減衰を伴う擬調和振動における不安定限界線図の決定, 機械学会論文集, 17-64, p. 9~13 (1951)
- 4) R. Oldenburger and R. C. Boyer: Effects of extra sinusoidal inputs to nonlinear systems, J. of Basic Eng., Dec., p. 559~p. 570 (1962)

討 論

〔江尻正員*〕 非線形要素を含む変係数系の解析法の一つとして、かなり実効的な手法と思います。しかしなお下記の点について不明ですのでご教示ください。

入力 e_0 にステップ A を考え、そのときの非線形要素の入出力特性をもとに解析されていますが、このことはある入力 A のときの開ループ的な安定性であって、閉ループでは A が刻々変化するので最終的なサーボ機構の安定性とはかなり大きな差が出ると思いますがいかがでしょうか。すなわち、Fig. 8 において、原点を通る直線のこう配だけでなく、 δ', ϵ' の値そのものも A/D の関数であり、したがって閉ループでは、 A の変化につれて点 (δ', ϵ') が $\delta'-\epsilon'$ 平面上で複雑に動くと思われます。それゆえ、ステップを与えた瞬間

では安定（あるいは不安定）と目されても、系が動作して e_0 が小さくなっていく（あるいは大きくなっていく）途中段階で、ふたたび不安定領域（あるいは安定領域）に入る可能性も非線形性の種類によっては生じうると思います。この点、いかがでしょうか。

〔筆者〕 ご指摘いただいた点は、まさに最も警戒を要する点なので、アナログ計算機解との比較も十分気をつけて行ないましたが、本文に示したとおり、かなりの一致を見た次第です。その理由を、 N が不感帯要素である場合を例にとって考察して見ます。まず、Fig. A に見られるように、(S.V.G.+ N) 要素への入力信号があるレベル以上の大ききとなると、安定判別直線のこう配がほとんど一定となることがわかります。このために、最初から不安定領域にある場合には、(S.V.G.+ N) 要素への入力信号が比較的長い時間、小さい値にとどまっていることは期待できず、したがって安定領域に移行してゆくことも考えられないと思います。一方、はじめ安定領域内にあれば、さらに安定度の大きい領域には入り込んでゆくことが期待できます。その他の N については定量的な検討は行なっていませんが、系内の信号レベルがよほどひどく変動しないかぎり、アナログ計算機解との対比から見ても、やはり同じような性質が存在しているものと思われます。

Fig. A Characteristics of $\epsilon_e/(\delta_e - \zeta^2)$ for S.V.G. and deadband

* 日立製作所中央研究所