偏導関数の自動計算を用いたブロック線図の安定な解析法[†]

田 沼 正 也*

A Stable Analysis Method of Block Diagram Using Automatic Partial Derivative Computation Algorithm

Masaya TANUMA*

For stable and efficient transient analysis of complicated block diagram used in process simulation, quasi state variable method is newly proposed. For stiff system appeared in many fields, implicit formula is known to be robust for stabilizing the transient analysis. One of the problems occurred in using implicit formula is to solve simultaneous equations at each time step. The state variable model can produce the smallest computation model but it is difficult to develop state variable equation analytically from nonlinear block diagram.

The proposed method generates numerically the computation model equivalent to that derived from state variable model by applying an automatic partial derivatives computing algorithm to block diagram of a kind of directed graph. The proposed method has several advantages. (1) The model of small dimension permits the efficient analysis. (2) The computation model for nonlinear block diagram can be generated by regular procedure. (3) The proposed method can be applied to steady state analysis.

Simulations for steam in super heater of boiler show that the quasi state variable method is effective for realizing stable and efficient analysis of stiff systems.

Key Words: block diagram, transient analysis, steady state analysis, simulation algorithm, automatic computation of partial derivatives

1. はじめに

大規模プラントの動特性シミュレーションにブロック線図解析システムが用いられることが多い。ブロック線図はグラフであり、変数間の関係を把握するのに便利な表現形態であるが、モデルとしては冗長であり、効率的な計算法が必要となる。

ブロック線図、特に硬い系の安定な計算方法として、タブロー法が提案されている¹⁾。個々の要素の入出力式を導き、それを連立させて解くタブロー法は複雑な系でも陰解法を用いた計算モデルが規則的に生成できる強力な方法であるが、計算モデルの次数が代数要素を含めた全要素数と等しく、大規模システムでは連立方程式の計

算量が問題になる。一方、ブロック線図を状態変数モデルに変換する状態変数法は、計算は効率的に行えるが非線形系では、モデルの生成を自動的に行うのが困難である。

本報では、ブロック線図が有向グラフであり、伊理らにより開発された偏導関数の自動計算法²⁾の計算グラフと等価なことを利用して、状態変数モデルと同じ次数の計算モデルを数値的に生成する準状態変数法を提案する。準状態変数法は、(i)陰解法を用いた計算モデルが規則的な手順で導ける、(ii)モデルの次数が小さく、計算が効率的に行える、(iii)初期値の設定は、動的要素のみで良く簡単である、などの特長をもつ。また、代数方程式の未知数に対応するループ要素を用いることにより代数方程式を含むブロック線図の時間応答計算も可能となる。

さらに、準状態変数法による定常解析方法を提案し、初期値計算、時間応答の連続処理が容易に実現できることを示す。

[†] 第 32 回計測自動制御学会学術講演会で発表(1993・8)

* バブcock日立(株)呉研究所 横浜市磯子区磯子 1-2-10

* Kure Research Lab., Babcock-Hitachi K. K.,
Yokohama

(Received October 22, 1993)

(Revised January 21, 1994)

Fig. 1 Block diagram for steam in boiler

2. 準状態変数法による時間応答解析

2.1 計算モデルの生成方法

(1) 陰解法を用いた時間応答計算モデル

非線形ブロック線図の例として、ボイラの過熱器の蒸気の流量 (W_i), エンタルピ (h_i), 温度 (θ_i), 密度 (ρ_i), 圧力 (P_i) および管壁温度 (θ_{mi}) のモデルを Fig. 1 に示す^(註1).

ブロック線図は解析対象のモデルを積分, 1 次遅れ, 和, 差, 積, ステップやランプ入力などの演算要素と, 演算要素間を結ぶ信号線で表わす。

それを状態方程式に変換できれば, 状態変数つまり動的要素の出力 x_i は次式により表わせる。

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_i, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \quad i=1 \sim n \quad (1)$$

ただし, t : 時間, x_i : 状態変数, u_i : 外部入力, F_i : 非線形関数, n, m : 次数

上式に台形公式を適用すると, k ステップの状態量 $x_i(k\Delta t)$ を用いて, 未値数 $x_i((k+1)\Delta t)$ が次式で表わされる⁴⁾.

$$\begin{aligned} x_i((k+1)\Delta t) &= x_i(k\Delta t) + \Delta t \{ \alpha \dot{x}_i(k\Delta t) + (1-\alpha) \dot{x}_i((k+1)\Delta t) \} \\ &= x_i(k\Delta t) + \alpha \Delta t F_i(x_i(k\Delta t), \dots, x_n(k\Delta t), \\ &\quad u_1(k\Delta t), \dots, u_m(k\Delta t)) \\ &\quad + (1-\alpha) \Delta t F_i(x_i((k+1)\Delta t), \dots, x_n((k+1)\Delta t), \\ &\quad u_1((k+1)\Delta t), \dots, u_m((k+1)\Delta t)) \end{aligned} \quad (2)$$

ただし, Δt : 時間刻み, k : 計算ステップ, α : 重み(通

常 0.5)

上式は, 両辺に未知数 $x_i((k+1)\Delta t)$ を含んだ非線形連立方程式となる。上式にニュートン-ラフソン法を適用し, 以下の線形連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} x_i((k+1)\Delta t) - \Delta t(1-\alpha) \sum_{j=1}^n \{ \partial F_i / \partial x_j x_j((k+1)\Delta t) \} \\ = x_i(k\Delta t) - \Delta t(1-\alpha) \sum_{j=1}^n \{ \partial F_i / \partial x_j x_j(k\Delta t) \} \\ + \Delta t \{ (1-\alpha) F_i|_{x_i(k\Delta t), u_i((k+1)\Delta t)} \\ + \alpha F_i|_{x_i(k\Delta t), u_i(k\Delta t)} \} \end{aligned} \quad (3)$$

$\partial F_i / \partial x_i$ は $x_i(k\Delta t)$, $u_i((k+1)\Delta t)$ を用いて計算する。上式を連立させると, つぎのようなベクトル方程式となる。

$$AX((k+1)\Delta t) = B \quad (4)$$

ただし, A : $n \times n$ 行列, X , B : n 次元ベクトル

(4) 式を LU 分解法など⁵⁾ で解くことにより, $x_i((k+1)\Delta t)$ が求められる。

(2) 準状態変数法による計算モデルの生成

ブロック線図から状態方程式およびヤコビアン $\partial F_i / \partial x_j$ を解析的に導くことは, 数式処理の手法を必要とし, 実現が難しい。

本報では, (3) 式の計算モデルを数値的に求める準状態変数法を提案する。準状態変数法では, ブロック線図が有向グラフであり伊理らの用いている計算グラフと等価なことから F_i および $\partial F_i / \partial x_j$ が数値的には規則の手順で求められることに着目し, Fig. 2 に示すようにつぎのステップで時間応答を計算する。

(ステップ 1) 動的要素および外部入力を起点にして, 信号の流れに沿って(順方向)に各要素の出力 z_i , 入力に対する要素偏導関数 $\partial \phi_i / \partial v_j$ を計算する (ϕ_i : 要素

(注 1) 添え字 i は集中定数化のために分割した区間を示す。モデルは (i) 連続の式, (ii) エネルギー保存式, (iii) 運動量保存式, (iv) 蒸気の状態方程式で構成している³⁾。

関数). 動的要素の入力 f_i から (3) 式の F_i を決定する.

(ステップ2) 動的要素から信号の流れを上流方向(逆方向)に辿り, 動的要素の入力 f_i の状態変数 x_j に関する偏導関数 $\partial f_i / \partial x_j$ を求める. これを用いてヤコビアン $\partial F_i / \partial x_j$ を計算する.

(ステップ3) F_i および $\partial F_i / \partial x_j$ を用いて計算モデル (3), (4) 式を生成し, それを LU 分解法などで解き, $x_i((k+1)\Delta t)$ を求める.

2.2 準状態変数法の実現方法

時間応答計算の処理フローを Fig. 3 に示す. 計算の前処理として, ブロック線図の有向グラフ化および計算順序付けを行う.

(1) ブロック線図データの入力

準状態変数法の検証のために開発した Xsim では, 各演算要素の出力変数(以下, 変数と記す)およびほかの要素との関係をつぎのような入出力式で表わす.

変数 = 演算子(入力変数 $_1, \dots$, 入力変数 $_m$ \$

係数 $_1, \dots$, 係数 $_k$) (5)

演算子には, 積分・1次遅れ・2次遅れなどの動的演算子, 和・差・積・商・平方・平方根・sin・cos などの代数演算子, ステップ・ランプ・正弦波等の外部入力演算子がある.

Fig. 2 Quasi state variable method for block diagram analysis

変数は名称つまり文字列で入力されるので, 全データの入力後, 内部処理を容易にするため, ハッシュ法を用いて, 変数番号に変換する.

(2) ブロック線図の有向グラフ化

ブロック線図は要素を頂点, 信号線を辺とする有向グラフである. (5) 式は有向グラフを表現しているが, 信号の流れを逆に辿るのに便利な形式であり, 信号を下流方向(順方向)に辿るには適していない. このため, グラフのリスト表現として, つぎの関係を内部的に生成する.

変数: 下流変数 $_1, \dots$, 下流変数 $_d$ (6)

下流変数は, 対象変数を入力変数とする変数である. このため, 変数ごとに, その入力変数の下流変数リストに自身を追加することにより, (6) 式の関係表を作成できる.

(3) 計算順序付け

F_i を計算するために順方向, $\partial F_i / \partial x_j$ を求めるために逆方向への計算順序付けを行う. ここでは, ブロック線図は代数変数のみの閉回路(代数ループ)は含まないとする.

(a) 順方向の順序付けは, 動的変数, 外部入力変数

Fig. 3 Procedure for transient analysis

を起点したトポロジカルソーティングであり、下流変数リストを用いた幅優先探索⁶⁾により実現できる。探索は、全てのパスが下流変数をもたない変数か動変数に到着したとき、完了する。

- (b) 逆方向計算順序付けは、1 個の動変数を起点に(5)式を用いた上流方向への幅優先探索により行う。探索の終点は、動変数か外部入力変数である。 $\partial f_i / \partial x_j$ は各動変数に対して求めるため、探索は全動変数について行い、逆方向計算リストを各動変数ごとに作成する。

(4) 初期値の設定

動変数に初期値を設定する。後述する定常解析機能を用いることにより、自動設定も可能である。

(5) 時間応答計算

2.1 節の(ステップ1)～(ステップ3)を各時間ステップごとに実行し、時間応答を求める。

動変数の入力 f_i および状態変数に関する偏導関数 $\partial f_i / \partial x_j$ から状態方程式の F_i 、ヤコビアン $\partial F_i / \partial x_j$ への変換は、Table 1 に示すように動変数のタイプに対応して行う。

2.3 偏導関数の自動計算

(1) 計算グラフを用いた偏導関数の計算方法

偏導関数の計算法としては、独立変数を微少変動させて従属変数の変化を求める方法や数式処理を用いる方法などがあるが、伊理らにより開発された方法²⁾が計算グラフを基にしている、また正確な値が計算できることからブロック線図の解析に適している。

その方法では、Fig. 4 に示すように、関数の和や積のように要素の出力と入力に対する偏導関数が解析的に求められる基本的な演算要素を頂点とする有向グラフ(計算グラフ)に展開し、上流から下流へ各要素の出力と要素偏導関数を求める。つぎに、計算グラフを下流から上流へ辿り、チェーンルールにより、偏導関数をつぎのように計算していく。

(ステップ1)初期化

$$\partial f / \partial v_k = 0 \quad (\text{all } k) \quad (7)$$

$$\partial f / \partial v_e = 1 \quad (e \text{ 最終頂点}) \quad (8)$$

f : 関数の出力変数 v_k : 頂点の出力変数

(ステップ2) 計算グラフを逆方向に辿り、各頂点(j)で入力変数 v_k に関し、つぎの計算を行う。

$$\partial f / \partial v_k = \partial f / \partial v_k + \partial f / \partial v_j \partial \phi_j / \partial v_k \quad (9)$$

ϕ_j : 頂点の基本関数

本方法は、(i)計算量が頂点数のオーダーであり、独立変数の個数に依らない効率的な算法である、(ii)正確な計算が可能である、(iii)計算グラフに展開できていれば実現が簡単である、などの利点をもつ。

(2) ブロック線図への適用

ブロック線図は計算グラフであり、2.2 節で示したようにトポロジカルソートにより、逆方向への順序付けが可能である。このため、動変数を起点として、逆方向順序付けリストを用い、(9)式の計算を行うことにより、動変数への入力 f_i の動変数 x_j に関する偏導関数 $\partial f_i / \partial x_j$ が求められる。

具体的には、Fig. 5 に示すように、テーブルを用いることにより、簡単に実現できる。

本方法は計算グラフの頂点において要素出力と要素偏導関数が計算できれば適用できるので、基本的な代数関数のみでなくユーザが計算プログラムを用意する任意の関数を組み込むことも可能である。

計算は全動変数について行うため、計算量は n_a

Fig. 4 Partial derivative computation method using digraph

Table 1 Formula for F_i & $\partial F_i / \partial x_j$

transfer function	state variable equation	F_i	$\partial F_i / \partial x_j$
$\frac{K}{s}$	$dx_i / dt = Kx_i$	$F_i = Kf_i$	$\partial F_i / \partial x_j = K \partial f_i / \partial x_j$
$\frac{K}{1 + Ts}$	$dx_i / dt = (Kx_i - f_i) / T$	$F_i = (Kx_i - f_i) / T$	$\partial F_i / \partial x_j = (K \delta_{ij} - \partial f_i / \partial x_j)$
$\frac{K(1 + Ts)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	$dx_i / dt = x_{i+1}$ $dx_{i+1} / dt = Kf_i - 2\zeta\omega_n x_{i+1} - \omega_n^2 x_i$	$F_i = x_{i+1}$ $F_{i+1} = Kf_i - 2\zeta\omega_n x_{i+1} - \omega_n^2 x_i$	$\partial F_i / \partial x_j = \delta_{i(i+1)j}$ $\partial F_{i+1} / \partial x_j = K \partial f_i / \partial x_j - 2\zeta\omega_n \delta_{(i+1)j} - \omega_n^2 \delta_{ij}$

Fig. 5 Realization of partial derivative computation for block diagram

$\times n_a$ (n_a : 動変数の個数, n_a : 代数変数の個数) のオーダーとなる。

2.4 代数ループへの対応法

これまで、代数変数だけの閉回路(代数ループ)が含まれないと仮定してきた。代数ループは、代数方程式が系に含まれる場合生じるが、そのような微分方程式と代数方程式の混合系の解析が必要な場合もある。Fig. 1 も、ループ要素(LOOP と表記)を無視すれば、 dh_i/dt の計算に代数ループを含んでいる。

これに対応するため、代数方程式の未知数に対応し、つぎの特性をもつループ要素を導入する。

- (a) 初期値を設定できる。
- (b) 出力変数 x_i は入力と一致するように調整できる。

ループ要素の特性式は、つぎのように表わされる。

$$x_u = F_u(x_1, \dots, x_n, x_n, \dots, x_u, u_1, \dots, u_m) \quad (10)$$

x_u : ループ変数, L : ループ変数の次数

$k\Delta t$ の x_i , x_u を出発値としてニュートン-ラフソン法を適用すると、つぎの計算モデルが得られる。

$$\begin{aligned} & -x_{u_i}((k+1)\Delta t) + \sum_{j=1}^n \{\partial F_{u_i} / \partial x_j x_j((k+1)\Delta t)\} \\ & + \sum_{j=1}^L \{\partial F_{u_i} / \partial x_j x_j((k+1)\Delta t)\} \\ & = \sum_{j=1}^n \{\partial F_{u_i} / \partial x_j x_j(k\Delta t)\} + \sum_{j=1}^L \{\partial F_{u_i} / \partial x_j x_j(k\Delta t)\} \end{aligned}$$

$$-F_{u_i}(k\Delta t) \quad (11)$$

上式を(3)式の計算モデルと連立させて解く。ループ要素には初期値が設定できるので、代数ループを解消でき、微分方程式と代数方程式の混合系の時間応答計算が可能となる。

3. 準状態変数法による定常解析^{(7),(8)}

3.1 定常解析のための計算モデル

定常状態では、状態変数の時間微分値は 0 になるので、次式が成立する。

$$F_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (12)$$

ニュートン-ラフソン法により、定常値を探索する。 k 回計算が進んだときの状態変数値 $x_i(k)$ を次式により、 $x_i(k+1)$ に修正する。

$$\sum_{j=1}^n \{\partial F_i / \partial x_j \Delta x_j\} = F_i|_{x_i(k)} \quad (13)$$

$$x_i(k+1) = x_i(k) - \beta \Delta x_j \quad (14)$$

$\partial F_i / \partial x_j$, F_i は $x_i(k)$ を用いて計算する。 β は緩和係数 ($0 < \beta \leq 1$) である。

F_i , $\partial F_i / \partial x_j$ は時間応答と同様に、順方向計算順序リスト、逆方向計算順序リストを用いて計算できる。

個々の変数ごとに計算モデルを導き、時間応答と同様にベクトル式に集約し、 Δx_i を求める。

全ての x_i について、つぎの条件が満たされれば、計算は収束したと判定する。

$$\text{all } |\Delta x_i| < \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i: \text{微小量}) \quad (15)$$

ループ要素の入出力式は、(10)式が定常状態でも成立するので、(11)式を Δx_i を用いた式に変形することにより計算モデルが得られる。

3.2 定常解析の実現方法

定常解析は時間応答解析とほぼ同様の処理手順で実現できる。Fig. 3 のうち、計算モデルおよび終了判定は(13), (15)式と置き換える。 F_i , $\partial F_i / \partial x_j$ の計算には Table 1 が利用できる。

定常解析と時間応答解析は共通点が多く、定常解析による初期値の決定、それを用いた時間応答解析の連続処理が簡単に実現できる。

4. ケーススタディ

ボイラの過熱器を対象として、時間応答解析、定常解析を準状態変数法の検証のために開発した Xsim を用いて行った。過熱器を 5 分割したモデル (Fig. 1 のブロック線図を 5 個直列に接続した水・蒸気モデル) であり、要素数は 155、状態変数はループ変数を含めて 20 次である。

ケーススタディはワークステーション HP 9000 モデル 715/33 (クロック周波数 33 MHz, 主記憶 16 MB) 上で

行った。Xsim で Fig. 1 のモデルを解析するのに 4.6 MB の記憶容量を必要とした。

(1) 時間応答解析

この系で最も応答が速いのは蒸気状態であり、管壁温度 θ_{mi} との干渉および流量 W_i のセクション間の分布を考慮せず、1 セクションの蒸気の状態のみに着目すると、時定数 τ_s は 0.6 秒である。一方、全ての変数間の干渉を考慮し求めた出口のエンタルピー変化の時定数 τ_h は 15 秒であり、両者の比 τ_h/τ_s は 25 と硬い系である。

時間刻み Δt を 2.0, 5.0 秒に設定した場合の出口流量変化に対するステップ応答を Fig. 6, 7 に示す。Fig. 7 の $\Delta t = 5.0$ ($\Delta t/\tau_s = 8.3$) では、第 5 セクションで振動が出て

Fig. 6 Step response of enthalpy to inlet flow change

Fig. 7 Step response of enthalpy to inlet flow change

いるが、系全体としては安定に計算が行われている。また、Fig. 8 に示すように、セクション間の流量分布という速い応答も安定に解析できている。

これから、提案した方法が硬い非線形系の解析に効果があるといえる。

$t=0 \sim 120$ に対する $\Delta t = 2.0$ の計算時間は 4.30 秒、 $\Delta t = 5.0$ では 1.80 秒、1 ステップの計算時間はそれぞれ 0.072, 0.075 秒であった。

時間刻み Δt と安定範囲の関係を調べるため、 $\Delta t = 10, 15, 20$ 秒の解析も行った。 $\Delta t = 20$ でも安定に計算が行われたが、振動大きくなり、実用的には $\Delta t = 5$ が限界である。

(2) 定常解析

定常解析の結果を Fig. 9 に示す。緩和係数 $\beta = 0.5$, h_i , θ_{mi} , w_i , P_i の初期設定値は全セクション同一とし、収束値から 15% ~ 30% の範囲で設定した。

状態が主に上流側から決定される収束しやすい系でもあり、オーバーシュートも少なく、安定に探索が行われている。なお、Fig. 6, 7 の時間応答計算はこの定常解析結果を初期値としている。

Fig. 8 Distribution of flow rate

Fig. 9 Result of static analysis

5. 結 び

準状態変数法を用いた時間応答計算法、定常解析法を開発した。本方法は、複雑なブロック線図でも、陰解法を用いた計算モデルが規則的手順で導ける、ループ要素の導入により微分方程式と代数方程式の混合系も解析できる、出力とその入力に関する偏導関数が求められれば任意の要素を使用できるなどの長所をもち、大規模システムの解析に適している。

準状態変数法は、数値的にあるが状態変数モデルを内部に生成する手法であり、周波数応答解析や制御系設計の状態変数モデルの自動作成などにも応用できると期待している。

最後に、本研究を支援して頂いた当社呉研究所所長中島史登博士、呉工場火力設計部程塚国男部長に感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 羽根田博正：タブロー法について，計測と制御，18-12，991/1000 (1979)
- 2) 伊理，土屋，星：偏導関数計算と丸め誤差推定の自動化の大規模非線形方程式系への応用，情報処理，26-11，1411/1420 (1985)
- 3) 深山，石黒，川瀬：ボイラプラントシミュレータの開発，火

力原子力発電，37-11，1189/1199 (1986)

- 4) 戸川隼人：微分方程式の数値計算，オーム社 (1981)
- 5) 安藤，田沼，梶原，兼田，名取，藤井：数値解析手法による制御系設計，計測自動制御学会 (1986)
- 6) 石畑 清：プログラミングとデータ構造，岩波書店 (1992)
- 7) T. J. Aprille Jr and T. N. Trick: Steady-state Analysis of Nonlinear Circuits with Periodic Inputs, Proc. IEEE, 60-1, 108/114 (1972)
- 8) F. R. Colon and T. N. Trick: Fast Periodic Steady-state Analysis for Large-signal Electronic Circuits, IEEE J. Solid-State Circuits, SC8-4, 260/269 (1972)

[著 者 紹 介]

田 沼 正 也 (正会員)

1967年，群馬大学機械工学科卒業。同年(株)日立製作所入社，日立研究所にて圧延機制御システムなどの開発に従事。80年よりパブコック日立(株)呉研究所にて，機械系CAE，ボイラ設計支援，シミュレーションシステムの開発を推進。横浜研究第1部部長(工学博士)。日本機械学会，情報処理学会などの会員。