磁気浮上系の H_2/H_∞ 準最適設計

杉 江 俊 治*・田 内 豊*

H_2/H_∞ Suboptimal Controller Design of Magnetic Levitation Systems

Toshiharu SUGIE* and Yutaka TANAI*

In this paper, we propose a robust controller design method for magnetic levitation systems based on H_2/H_∞ control theory. As a feedback controller, an H_∞ suboptimal controller is designed via the loop shaping procedure to obtain the satisfactory feedback properties. And in order to obtain the desired command response, an H_2 optimal controller is adopted. The obtained controller also achieves the robust tracking for step command signals. The effectiveness of the controller is evaluated by experiments of magnetic levitation.

Key Words: H_2 control, H_∞ control, robust tracking, two-degree-of-freedom control, magnetic levitation systems

1. はじめに

制御系の設計に関して、近年、閉ループ伝達関数のノルムを評価関数とし、これをある一定の値以下に抑える補償器を系統的に求める設計理論の有効性が広く認められてきており、その代表的なものとして H_∞ 制御理論や H_2 制御理論がよく知られている^{1),2)}。

H_∞ 制御は周波数領域での閉ループ特性の整形やロバスト安定化に適しており、フィードバック特性の改善に有効な手法である。一方、 H_2 制御は、LQG 最適制御を中心に 1960 年代より活発に研究されてきたが、主として時間領域で、制御入力の大きさを考慮しながら、過渡応答特性の最適化を図るといった問題に対して、その有効性を発揮してきた。それゆえ、目標値応答の改善には、 H_2 ノルムでの評価を用いることが適切であると思われる。筆者らとは独立に Liu ら³⁾ もこの場合に H_2 ノルムを用いることの妥当性を議論している。また、 H_2 あるいは H_∞ 制御を用いる際、モデル化誤差にもかかわらずステップ目標値に定常偏差なく追従する、いわゆるロバスト・サーボ特性を考慮に入れることも実用上はきわめて重要であろう。

そこで、本論文では、非線形系ではあるが不安定な制御対象として興味深い磁気浮上系を例にとり、 H_∞ 制御と H_2 制御の両者の長所を生かしたロバスト・サーボ補

償器の一つの設計法を提案する。すなわち、(a) H_∞ 準最適なフィードバック特性、(b) H_2 最適な目標値応答特性、および(c)ロバスト・サーボ特性のすべてを同時に実現する補償器の設計法を与える。さらに、提案する手法の妥当性を示すため、磁気浮上実験系に対して具体的な設計例を示し、実験によりその有効性を検証する。

本文では以下の記号を用いる。安定かつプロパーな実有理行列の集合を $\mathbf{RH}_\infty$ で表わす。安定な伝達行列 $G(s)$ に対してその H_2 および H_∞ ノルムは

$$\|G\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{trace} [G(j\omega)^* G(j\omega)] d\omega \right)^{1/2}$$

$$\|G\|_\infty := \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|$$

で定義される。ここで、 $\|\cdot\|$ は最大特異値である。文献1)に準じて、伝達関数 $G(s)$ の状態空間表現を (A, B, C, D) とするとき

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

と表わす。また、

$$\begin{bmatrix} G_1(s) \\ G_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix}$$

などは $G_i(s) = D_i + C_i(sI - A)^{-1}B$ ($i=1, 2$) を表わすものとする。本文中では $\mathbf{RH}_\infty$ 上の既約分解を用いるが、これに関する詳細は教科書⁴⁾などを参照されたい。

2. 磁気浮上系のモデル化

2.1 磁気浮上系の運動方程式

本稿では、Fig. 1 に示すような、直流電磁石の吸引力を

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

* Faculty of Engineering, Kyoto University, Uji

(Received December 1, 1993)

(Revised February 4, 1994)

Fig. 1 Magnetic levitation system

用いて鋼球を指定した位置に浮上させる磁気浮上系を考える。鋼球は鉛直方向のみに運動するものとする、この系の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mg + \frac{1}{2}i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \quad (1)$$

$$e = Ri + \frac{d}{dt}(Li) \quad (2)$$

となる⁵⁾。ここで、 x は鋼球と電磁石の間のギャップ長 [m], M は鋼球の質量 [kg], g は重力加速度 [m/s²], i は電流 [A], e は入力電圧 [V], R はコイル抵抗 [Ω], L はそのインダクタンス [H] である。インダクタンスはつぎのモデルに従うとする^{5),6)}。

$$L(x) = \frac{Q}{X+x} + L_0 \quad (3)$$

ここで、 Q , X , L_0 は実験から定まるパラメータである。いま、系の入力と出力をそれぞれ $u_{\text{real}} = e$, $y_{\text{real}} = x$ とし、状態ベクトルを

$$\mathbf{y} := [y_1 \ y_2 \ y_3]^T = [x \ \dot{x} \ \ddot{x}]^T \quad (4)$$

と選ぶと、系は

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_3 \\ f_3(\mathbf{y}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3(\mathbf{y}) \end{bmatrix} u_{\text{real}} \quad (5)$$

$$y_{\text{real}} = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{y} \quad (6)$$

と表現できる。ここで、 y_3 , $f_3(\mathbf{y})$, $g_3(\mathbf{y})$ は

$$y_3 = g - \frac{Qi^2}{2M(X+x)^2} \quad (7)$$

$$f_3(\mathbf{y}) := \frac{2(g-y_3)}{Q+L_0(X+y_1)}(L_0 y_2 + R(X+y_1)) \quad (8)$$

$$g_3(\mathbf{y}) := -\sqrt{\frac{2Q}{M}} \frac{\sqrt{g-y_3}}{Q+L_0(X+y_1)} \quad (9)$$

で与えられる⁷⁾。

2.2 線形化モデル

いま、一つの平衡点を

$$\mathbf{y}_{\text{nom}} = [x_0 \ 0 \ 0]^T, u_{\text{nom}} = u_0 \quad (10)$$

とし、 $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1 \ \tilde{y}_2 \ \tilde{y}_3]^T$, $\tilde{u}$ をそれぞれの変動分、すなわち、

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{nom}} + \tilde{\mathbf{y}}, u_{\text{real}} = u_{\text{nom}} + \tilde{u} \quad (11)$$

とする。このとき、この平衡点まわりでの系の1次近似線形モデルは

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix} \tilde{u} \quad (12)$$

となる。ここで、 $X_c := X + x_0$, $i_0 := u_0/R$ とおくと、 $a_i (i=1, 2, 3)$, b_3 は次式で定まる。

$$a_1 = \frac{QRi_0^2}{MX_c^2(Q+L_0X_c)}, a_2 = \frac{QL_0i_0^2}{MX_c^2(Q+L_0X_c)}$$

$$a_3 = \frac{-MX_c^3R}{MX_c^2(Q+L_0X_c)}, b_3 = \frac{-QX_c i_0}{MX_c^2(Q+L_0X_c)}$$

よって、入力の変動分 $u := u_{\text{real}} - u_0$ から出力の変動分 $y := y_{\text{real}} - x_0$ までの伝達関数は次式で与えられる。

$$P(s) = \frac{b_3}{s^3 - a_3s^2 - a_2s - a_1} \quad (13)$$

3. H_2/H_∞ 準最適設計

目標値応答とフィードバック特性を共に良好なものとするには、通常の直結フィードバック系では困難な場合が多く、一般には、2自由度制御系を用いることが必要となる⁴⁾。本章では2自由度制御系の基礎事項について簡単に整理した後、 H_2/H_∞ 準最適設計法について述べる。

3.1 2自由度制御系

(A) 2自由度系の構造

次式で記述される線形制御系 $\Sigma(C, P)$ を考える。

$$\mathbf{y} = P\mathbf{u}, u = C \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 P はスカラー制御対象であり、 C は目標値 r と出力 y から制御入力 u を算出する最も一般的な2自由度補償器である。このとき、つぎの結果が知られている。

《定理1》⁸⁾ 与えられた P に対して、系 $\Sigma(C, P)$ を内部安定にするすべての2自由度補償器 C は次式で記述される。

$$C = [P^{-1}F + KF \quad -K] \quad (15)$$

ただし、 F , K は

$$F \in \mathbf{RH}_\infty, P^{-1}F \in \mathbf{RH}_\infty \quad (16)$$

$$K = \Omega(P) \quad (17)$$

を満たす範囲で自由に選べるパラメータである。ここで、 $\Omega(P)$ は閉ループ系 $y = Pu$, $u = -Ky$ を安定化する補償器 K の集合である。□

(注意1) (16)式は、 P の $\mathbf{RH}_\infty$ 上の既約分解 $P = ND^{-1}$ を用いれば

$$F = NR, \forall R \in \mathbf{RH}_\infty \quad (18)$$

に等しく、文献8)では F のかわりにこれを用いている。

なお, このときには $P^{-1}F=DR$ となる. $\square$

上記の定理より, 補償器 C を設計することは (16), (17) 式の条件の下で, パラメータ対 (F, K) を選ぶことに等しいことがわかる. この (F, K) を陽に示す形で系 $\Sigma(C, P)$ を表現すれば, Fig. 2 のブロック線図を得る. Fig. 2 において, r から y への伝達関数 G_{yr} を計算すると

$$G_{yr}=F \quad (19)$$

を得る. すなわち, K の選び方とは無関係に $y=Fr$ となり, F により目標値特性を指定できる. また, 逆に, 制御対象のモデル化誤差や未知外乱除去などのフィードバック特性は F の選択とは無関係に P と K から定まる.

(B) ロバストサーボ条件

制御対象 P にモデル化誤差があるにもかかわらず, 系の安定性が保存されている範囲において

$$r(t)-y(t) \rightarrow 0 \quad t \rightarrow \infty \quad (20)$$

が成立するとき, 系はロバスト・サーボ特性をもつという. これに関してつぎの結果が知られている.

《定理 2》⁹⁾ 系 $\Sigma(C, P)$ がステップ目標値 r に対してロバストサーボ特性をもつための必要十分条件は, C の設計パラメータ対 (F, K) が (16), (17) 式および

$$F(0)=1, D_K(0)=0 \quad (21)$$

を満たすことである. ここで, $K=N_K D_K^{-1}$ は RH_∞ 上の既約分解である. $\square$

(21) 式は公称値において r から y への伝達関数がステップ目標値に定常偏差なく追従すること ($F(0)=1$), および K が積分器を含み目標値のモード ($s=0$) でゲインが無限大になることを示している.

以下では, 安定条件 (16), (17) 式とロバストサーボ条件 (21) 式のもとで, (K, F) を選択する方法について述べる.

3.2 フィードバック補償器の設計

良好なフィードバック特性を得るには, H_∞ 制御が有効なので, 補償器 K の設計に際してはこれを利用する. 種々の方法の中でも, ここでは, 使いやすさの観点から, McFarlane and Glover⁹⁾ によって提案されているループ整形法を採用する. これは以下のような手順で K を定めるものである.

(Step 1): 開ループ伝達関数 $P_s := PW$ が望みの周波数特性をもつように重み関数 W を選ぶ.

(Step 2): P_s に対して, 次式の評価関数を考え, その

Fig. 2 Two-degree-of-freedom control system

最適値を計算する.

$$J_{FB} = \left\| \begin{bmatrix} K_s \\ I \end{bmatrix} (I - P_s K_s)^{-1} [I \ P_s] \right\|_\infty \quad (22)$$

これはつぎのように計算できる⁹⁾. P_s の最小実現を (A, B, C) とし,

$$A^T V + VA - VBB^T V + C^T C = 0 \quad (23)$$

$$AZ + ZA^T - ZC^T CZ + BB^T = 0 \quad (24)$$

の正定対称解 (V, Z) を求める. このとき, J_{FB} の最小値 $\gamma_{\min}$ は

$$\gamma_{\min} = (1 + \lambda_{\max}(ZV))^{1/2} \quad (25)$$

で与えられる. ここで, $\lambda_{\max}$ は最大固有値を表わす.

もし, $\gamma_{\min} \gg 1$ であれば, (Step 1) にもどり重み W を選び直す.

(Step 3): 適当な $\gamma > \gamma_{\min}$ を選び, $J_{FB} < \gamma$ を満たす準最適 K_s を求める. そのような K_s の一つは次式によって計算できる⁹⁾.

$$K_s = \left[\begin{array}{c|c} \frac{A - BB^T V + \gamma^2 W_a^{-T} Z C^T C}{B^T V} & \frac{\gamma^2 W_a^{-T} Z C^T}{0} \end{array} \right] \quad (26)$$

$$W_a := I + (VZ - \gamma^2 I) \quad (27)$$

そして, 重み W とあわせ K を

$$K = WK_s \quad (28)$$

と求める.

この方法は以下に示すいくつかの長所をもっている.

- (i) P_s が不安定な隠れモードをもたない限り, 常に解 K が得られる. たとえば, P や W が虚軸上に極や零点を有しても, 問題がない.
- (ii) 最適値 $\gamma_{\min}$ が一度に (25) 式で計算できる.
- (iii) 混合感度問題などに比較すると, P の入力端あるいは出力端のどちらかで感度などが極端に悪化することがない⁹⁾.

ロバストサーボ条件 (21) 式を満たすためには重み W に積分器を含ませておけばよい.

3.3 フィードフォワード補償器の設計

(A) H_2 評価関数

先に述べたように H_2 ノルムは時間応答を評価するのに適していると考えられるので, 目標値応答特性の評価にこれを用いる. 評価関数の一つの自然な選択として, ここではつぎの H_2 ノルムでの評価を採用する.

$$J_{FF} = \left\| \frac{1}{s} (1 - G_{yr}) \right\|_2^2 \quad (29)$$

ここで, G_{yr} , G_{ur} はそれぞれ系 $\Sigma(C, P)$ の $r \rightarrow y$, $r \rightarrow u$ の伝達関数を表わし, ρ は定数の重みである. H_2 ノルムの定義から, 上式の第 1 項はステップ目標値に対する

追従誤差の大きさ $\left(\int_0^\infty (r(t)-y(t))^2 dt\right)$ を示し、第2項はインパルス入力に対する制御入力のエネルギー $\left(\int_0^\infty u(t)^2 dt\right)$ を表わしている。よって、第1項を小さくすれば追従性がよくなり、第2項を小さくすれば制御入力が節約される。 ρ はそのトレードオフをとるための重みである。

一見すると、 J_{FF} は Fig. 2 のFB補償器 K の選択に依存するように思われるがそうではない。実際、Fig. 2 において $G_{yr}=F$, $G_{ur}=P^{-1}F$ なので、上式の H_2 評価関数は次式に等しい。

$$J_{FB} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{s}(I-F) \\ \rho P^{-1}F \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (30)$$

(21)式のサーボ条件 $F(0)=1$ は第1項に積分器があるので自動的に満たされる。よって、(16)式の安定条件の下で、(30)式を最小化する最適な F を求めることがこの問題となる。

(注意2) Liu ら³⁾ も同様な考え方の H_2 評価関数を提案しているが、(29)式とは異なる。また、2自由度系の扱い方に若干疑問があり、たとえば、フィードバック補償器との分離は成立していないように思われる。

(B) 状態空間での解の導出

上記の問題を解くために、これを H_2 標準問題の形式に変形する。いま、 $P=ND^{-1}$ を $\mathbf{RH}_\infty$ 上の既約分解とする。このとき、安定条件を満たす F , $P^{-1}F$ は $R \in \mathbf{RH}_\infty$ を自由パラメータとしてそれぞれ $F=NR$, $P^{-1}F=DR$ と書けることに注意すれば、上記の問題は

$$J_{FB} = \left\| \begin{bmatrix} \frac{1}{s}(1-NR) \\ \rho DR \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (31)$$

を最小化する R を求める問題に帰着される。これに対応する一般化制御対象 G は

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & -\frac{1}{s}N \\ 0 & \rho D \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (32)$$

と記述でき、この場合の補償器は

$$u=Ry \quad (33)$$

である。すなわち、(32), (33)の系において w から $[z_1 \ z_2]^T$ への伝達関数の H_2 ノルムを最小化する $R \in \mathbf{RH}_\infty$ を求めればよい。

いま、 P の最小実現を (A_P, B_P, C_P) とし、 L を $A_L := A_P - B_P L$ が安定行列となる任意の定数行列とする。このとき、 P の一つの既約分解対 (N, D) はつぎのように計算できる¹⁰⁾。

$$\begin{bmatrix} N(s) \\ D(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_L & B_P \\ C_P & 0 \\ L & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

これを用いると、一般化制御対象 G の状態空間表現は

$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & -C_P & 1 & 0 \\ 0 & A_L & 0 & B_P \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho L & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

となる。後は、 H_2 制御の解法の手順に従えばよいが、評価関数に含まれている積分器のモードは可検出でなく、文献11)にみられる標準的な仮定を満たさないので、解を陽に求めておく。以下の H_2 問題の解法自身は H_∞ 制御を扱っている Zhang ら¹³⁾, Liu ら¹²⁾ と本質的に同じである。

通常の手順に従い、(35)式に対して解くべき二つの Riccati 方程式を求めるとつぎようになる。

$$A_X^T X + X A_X + X R_X X - Q_X = 0 \quad (36)$$

$$A_Y^T Y + Y A_Y^T = 0 \quad (37)$$

ここで、

$$A_X := \begin{bmatrix} 0 & -C_P \\ 0 & A_P \end{bmatrix}, A_Y := \begin{bmatrix} 0 & -C_P \\ 0 & A_L \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$R_X := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -B_P B_P^T / \rho^2 \end{bmatrix}, Q_X := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

このとき、 X に関しては、(36)式の安定化解 ($A_X + R_X X$ を安定にする解) を求める。 Y に解しては、積分重みによる A_Y の不安定固有値を無視して、解を求めると、 $Y=0$ を得る。これらから H_2 最適解が次式で計算される。

$$R_*(s) = \begin{bmatrix} A_X + R_X X & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline [0 \ L] + [0 \ -B_P^T / \rho^2] X & 0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

いったん、 R_* が求まれば、これを F に変換すればよい。(34)式とあわせて、フィードフォワード部分は

$$\begin{bmatrix} P^{-1}F(s) \\ F(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DR_* \\ NR_* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_X + R_X X & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \hline [0 \ -B_P^T / \rho^2] X & 0 \\ [0 \ C_P] & \end{bmatrix} \quad (41)$$

と求められる。得られた結果は、既約分解の選び方 (L の選び方) に無関係であることに注意されたい。

(C) 2自由度補償器の状態空間表現

前節で求めたフィードバック補償器 K の最小実現を

(A_K, B_K, C_K) とおき、これと (41) 式のフィードフォワード補償器をあわせると、(14) 式の 2 自由度補償器 C は x_c を状態ベクトルとして次式のように得られる。

$$\dot{x}_c = \begin{bmatrix} A_x + R_x X & 0 \\ B_K [0 \ C_P] & A_K \end{bmatrix} x_c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ y \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$u = [[0 - B_K^T / \rho^2] X \ C_K] x_c$$

これより、補償器全体の次数は F の次数と K の次数の和より大きくなることはないことがわかる。また、全体として (23), (24), (36) 式の 3 本の Riccati 方程式を解きさえすれば、補償器が求められ、特別なソフトウェアを必要としない。

なお、フィードフォワード補償器 F の設計は制御対象 P の公称値に基づいているので、実際の応答は F の応答とは一般に異なる。両者の応答の差を小さくするためにも、 K により制御系を十分低感度化することが重要となる。

4. 実験検証

4.1 実験装置の概略と同定実験

Fig. 1 の磁気浮上系において、電磁石は E 形鋼を積層したものにコイルを 2500 回巻いたもので、鋼球は直径 44.5 (mm) 重さ 357 (g) のものを使用した。また、鋼球の位置の検出には、レーザ式の変位センサを用いている。補償器は、高速演算処理のためにトランスピュータを用いて実装しており、サンプリング時間は 0.5 (msec) である。

この装置において、(1)~(3) 式に現れる物理パラメータを同定した結果、

$$M = 0.357 \text{ (kg)}, R = 27.0 \text{ (}\Omega\text{)}, Q = 0.0036 \text{ (Hm)}$$

$$X = 0.0066 \text{ (m)}, L_0 = 2.05 \text{ (H)}$$

を得た。同定実験のとき、コイルのインダクタンス L とギャップ x の関係を求めた結果を Fig. 3 に示しておく。実線は上記のパラメータと (3) 式から計算されたもので

Fig. 3 Coil inductance L vs. gap distance x

あるが、(3) 式のモデルの妥当性を示していると思われる。

平衡点は、アンプの最大出力電圧が 60 V であることを考慮して、平衡電圧が 30 V 前後であるギャップ長 2 cm の点に設定した。すなわち、(10) 式において

$$x_0 = 0.02, u_0 = 31.7$$

とした。これらの値を用いて、(12), (13) 式の線形モデルを計算すると、それぞれ以下のようであった。

$$\dot{\bar{y}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 9104 & 691 & -12.4 \end{bmatrix} \bar{y} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -7.65 \end{bmatrix} \bar{u} \quad (43)$$

$$P(s) = \frac{-7.65}{(s+25.4)(s+13.5)(s-26.6)} \quad (44)$$

4.2 H_2/H_∞ 補償器の設計

上記の線形モデルに基づいて、2 自由度補償器を設計する。

(A) フィードバック補償器の設計

3.2 節の手順に従って、フィードバック補償器 K を設計する。選択すべきは重み関数 W であるが、ここでは

$$W(s) = \frac{k((1/20)s+1)^2}{s((1/300)s+1)}, \quad k = 7.0 \times 10^5 \quad (45)$$

とした。これは、開ループのゲインが中域で急激に下がるのを抑えるために $((1/20)s+1)^2$ の項をもっている。また、ロバストサーボ条件を満たすために積分器をもたせ、高域でゲインが上がりすぎないように $((1/300)s+1)$ の項を有している。残りのゲイン k は実験を繰り返した結果、 $k = 7.0 \times 10^5$ のあたりで良好な応答が得られたので、これを採用した。

このときの評価関数 J_{FB} の最適値は $\gamma_{\min} = 3.79$ であった。 K は $\gamma = 1.05 \times \gamma_{\min}$ として

$$K(s) = \frac{1.67 \times 10^6 (s+33.3)(s+b)(s+\bar{b})}{s(s+835)(s+a)(s+\bar{a})} \quad (46)$$

$$a = 273 + 261j, b = 18.5 + 4.6j$$

を得た。確かに積分器を含んでいる。このときの感度関数 $S := 1/(1+PK)$ と相補感度関数 $T := 1-S$ のゲイン

Fig. 4 Gain plots of S and T

を Fig. 4 に示しておく。

(B) フィードフォワード補償器の設計

つぎに、3.2 節の手順に従って、フィードフォワード補償器 F を求める。選択すべきは重み ρ である。 ρ を 10^{-4} ～ 10^{-6} に変化させて、 H_2 最適解のステップ応答とそのときの入力大きさを計算した結果を Fig. 5 に示しておく。平衡電圧を考慮すると、利用可能な入力電圧が ± 20 数 [V] であることから、ここでは

$$\rho = 10^{-5} \quad (47)$$

とした。これに対応する F は

$$F(s) = \frac{7.64 \times 10^5}{(s+c)(s+\bar{c})(s+d)(s+\bar{d})} \quad (48)$$

$$c = 33.4 + 8.74j, d = 13.6 + 21.3j$$

であった。サーボ条件 $F(0)=1$ を満たすことは Fig. 5 から確認できる。

(C) 非線形補償

磁気浮上系は本来非線形なので、文献 7) と同様に、本実験においても、線形モデルが妥当な領域を大きくするため厳密な線形化を目的とした非線形補償を加える。具

体的には、(5)式が(43)式に一致するように実際の入力電圧を

$$u_{\text{real}} = \frac{1}{g_3(\mathbf{y})} (9104 \bar{y}_1 + 691 \bar{y}_2 - 12.4 \bar{y}_3 - 7.65 u - f_3(\mathbf{y})) \quad (49)$$

とする。これは平衡点においては

$$u_{\text{real}} = u_0 + u \quad (50)$$

と一致する。非線形補償の演算のために、電磁石中の電流値をアンプの端子から受けとり、鋼球の速度を位置の差分により算出している。非線形補償の考え方の詳細については文献 7) を参照されたい。

4.3 実験結果

以上の手順で求められた 2 自由度補償器を用いていくつかの磁気浮上実験を行った。

まず、鋼球を平衡点 ($x=0.02$) で浮上させた後、20 V の外乱電圧を制御対象の入力端に加え、そのときの鋼球の応答を見た。結果を Fig. 6 に示す。縦軸は平衡点からの距離を表わしている。鋼球の位置の変動は、平衡電圧の約 60% の大きな外乱にもかかわらず高々 0.8 (mm) 程度であり、低感度な制御系が実現されていることがわかる。

つぎに、目標値入力を 1 秒ごとに $r=0.002$ (m), $r=0.012$ (m) とステップ状に変化させたときの目標値応答を Fig. 7 に示す。これは設計したモデル伝達関数 F とほとんど同じ応答を示している。また、比較のため、提案の 2 自由度補償器の代わりに、直結フィードバック補償 (i.e., $u=K(r-y)$) を用いた場合の応答を Fig. 8 に示しておく。オーバーシュートがかなり大きく、制御入力アンプの性能以上の電圧を要求するので、ステップ幅は 2 (mm) とかなり小さくとしている。Fig. 7, 8 より H_2 最適なフィードフォワード補償が非常に有効であることがわかる。

これらの実験結果は、 H_2/H_∞ 制御を用いた 2 自由度制御系の有効性を例証しているといえよう。

(a) Output responses

(b) Input responses

Fig. 5 Step responses of H_2 optimal solutions

Fig. 6 Disturbance response of steel ball

Fig. 7 Step response (proposed method)

Fig. 8 Step response (H_∞ unity feedback)

5. おわりに

本稿では、磁気浮上系を例にとり、(a)目標値応答特性、(b)フィードバック特性、および(c)ロバストサーボ特性のすべてを考慮に入れた H_2/H_∞ 準最適補償器の設計法を提案した。目標値応答に関しては H_2 最適補償器で、フィードバック特性に関しては H_∞ ループ整形法を用いて良好な特性の実現を図り、両特性が独立に指定できる2自由度系の構造を利用している。補償器はRiccati方程式を3本解くだけで、簡単に求められる。さらに、磁気浮上実験系に対する具体的な設計例を示し、実験により提案方法の有効性を検証した。

なお、ここでは議論を磁気浮上系に限定したが、一般的多変数系の場合も全く同様の手順で H_2/H_∞ 準最適設計が実行できることを付記しておく。

参考文献

- 1) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems; IEEE Trans., AC-34-8, 831/847 (1989)
- 2) ミニ特集: ロバスト制御- H_∞ 制御を中心として: 計測と制御, 29-2 (1990)
- 3) K. Z. Liu, Z. H. Luo and T. Mita: Alternative Expressions of Some H^p Norms and Their Implications in Optimal Control; Proc. of 15th SICE Sympo. on DST, 137/142 (1992)
- 4) 前田, 杉江: アドバンス制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)
- 5) 電気学会磁気浮上応用技術調査専門委員会編: 磁気浮上と磁気軸受, コロナ社 (1993)
- 6) 松村, 日月: 大振幅動作に適した磁気吸引下げ系: 電学論 B, 99, 25/32 (1979)
- 7) 杉江, 清水, 井村: 厳密な線形化手法を用いた H_∞ 制御とその磁気浮上系への応用, システム制御情報学会論文誌, 6-1, 57/63 (1993)
- 8) T. Sugie and T. Yoshikawa, General Solution of Robust Tracking Problem in Two-Degree-Of-Freedom

Control Systems, IEEE Trans., AC-31, 552/554 (1986)

- 9) D. C. MacFarlane and K. Glover: Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 138, Springer-Verlag (1990)
- 10) C. N. Nett, C. A. Jacobson and M. J. Balas: A Connection between State-Space and Doubly Coprime Factorizations, IEEE Trans., AC-29, 831/832 (1984)
- 11) K. Glover and J. C. Doyle: State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ -norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems & Control Letters, 11-2, 167/172 (1988)
- 12) K. Z. Liu and T. Mita: Generalized H^∞ Control Theory: Proc. of 1992 ACC, 2245/2249, (Chicago) (1992)
- 13) F. Zhang, S. Hosoe and M. Kono: Synthesis of Robust Output Regulators via H_∞ Control, Proc. of 1st IFAC Meeting on Design Method of Control Systems, 366/371 (1991)

著者紹介

杉江 俊治 (正会員)

1978年, 京都大学大学院修士課程(精密工学専攻)修了。84年同大学院博士課程研究指導認定退学。この間78年より80年まで日本電信電話公社勤務。84年大阪府立大学工学部助手。88年京都大学工学部助教授となり現在に至る。ロバスト制御, ロボット工学の研究に従事。システム制御情報学会, 日本ロボット学会などの会員(工学博士)。

田内 豊

1993年, 京都大学工学部機械工学科卒業。同年同大学大学院修士課程(応用システム科学専攻)入学。現在に至る。