離散時間・有限次元概線形系の実現理論[†]

長谷川 泰 道*・松 尾 強**

Realization Theory of Discrete-Time Finite-Dimensional Almost-Linear Systems

Yasumichi HASEGAWA* and Tsuyosi MATSUO**

In the paper (*), the realization problem of almost-linear systems which are special classes of pseudo-linear systems was presented with the following result. 「For any invariant and affine input-response map $\mathcal{A}$ (equivalently, any input/output map with causality, time-invariance and affinity), there exist at least two canonical (quasi-reachable & observable) almost-linear systems which realize $\mathcal{A}$. And any two canonical almost-linear system with the same behavior (equivalently, input/output relation) are isomorphic each other.」

Moreover it is shown that the time-invariant and affine input-response map is completely characterized by a modified generalized impulse response map. And it is also shown that there exist “so-called” linear systems as examples of almost-linear system. Where “so-called” linear systems mean linear systems with non-zero initial state. Being based on the above results, we will investigate finite-dimensional almost-linear systems. Then we will obtain the following results.

1) : a necessary and sufficient condition for finite-dimensional almost linear system to be canonical. 2) : There exist uniquely a quasi-reachable standard system and an observable standard system as representatives of finite-dimensional canonical almost-linear systems. 3) : a necessary and sufficient condition for the invariant and affine input-response map to be the behavior of finite dimensional almost-linear systems. 4) : For a given invariant and affine input response map, there is given a realization procedure to obtain a canonical finite-dimensional almost system with the same behavior as it.

(*) : Y. Hasegawa and T. Matsuo ; Realization theory of Discrete-time Almost linear systems, Transaction on SICE, 30-2(1994)

Key Words : realization theory, almost linear system non-linear systems, pseudo linear system discrete-time system

1. はじめに

離散時間系を取り扱う。論文(1)において擬線形系^{2),3)}の特殊な系である概線形系の実現問題を提起し、つぎの実現定理を得た。実現定理：「任意の時不変・アファイン入力応答関数(因果律, 時不変およびアファイン性を満たす任意の入出力写像)に対し, それを実現する正準(擬可到達であり, 可観測である)概線形系が必ず存在し, 任意

の二つの正準実現系は互いに同形である。」また, 時不変・アファイン入力応答関数が補正一般インパルス応答により特徴付けられること, 更に, 概線形系の具体例として, “いわゆる”線形系(初期状態が零でない線形系)があることを示した。

そこで, 本論文の目的はその成果に基づいて有限次元概線形系を究明することにある。第2章ではそのための準備を行う。第3章では, 有限次元概線形系が擬可到達, 可観測であるための必要十分条件をそれぞれ与える。有限次元正準概線形系として擬可到達標準系および可観測標準系を導入する。そして, 有限次元正準概線形系の同形類が擬可到達標準系, 可観測標準系により一意に表わされることを示す。第4章では, 時不変・アファイン入力応答関数が有限次元正準概線形系の挙動であるための

† 第12回制御理論シンポジウムで発表(1983・5)

* 岐阜大学工学部 岐阜市柳戸 1-1

** 東邦大学理学部 船橋市三山 2-2-1

* Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu

** Faculty of Science, Toho University, Funabashi

(Received October 22, 1993)

(Revised February 4, 1994)

同等な条件を与える。それは無限入出力行列の階数による条件である。第 5 章では与えられた時不変・アフィン入力応答関数からそれを実現する擬可到達標準系を求める手順を与える。

以上の理論が Kalman⁴⁾ らが展開した有限次元定係数線形系の理論体系の有限次元概線形系への拡張であることが容易にわかる。

なお、諸成果の証明は付録において行い、主に概線形系が擬線形系の特殊な系であることに注目して行う。

[記号]

N は非負の整数の集合, K はある体 (field) である。 $F(A, B)$ は集合 A から集合 B への関数の全体, $L(A, B)$ は線形空間 A から線形空間 B への線形写像の全体, $L(A) = L(A, A)$ をそれぞれ表わす。《 X 》は集合 X を含む最小の線形空間を表わす。

2. 準備

本章で、有限次元概線形系を究明するに必要な準備を行う。この章の内容は主に文献 1) から抽出したものである。

2.1 入出力関係

最初に本論文で取り扱う入出力写像を考察する。入力系列の集合 U^* を入力値集合 U (入力を取りうる値の集合) をアルファベットとするワード (語) の集合とする。入力 $\omega = \omega(n)\omega(n-1)\cdots\omega(1) \in U^*$ の長さ $|\omega|$ を n と定義する。ただし $n \in \mathbb{N}$ 。

考察対象に入力 ω_1 を加えて、更に入力 ω_2 を加えた入力 $\omega_2|\omega_1$ により定義し、空な入力系列を I とし、 $|I| = 0$ とする。

出力値集合 Y (出力を取りうる値の集合) を体 K 上の線形空間とする。そこで、ブラック・ボックスの入出力関係に関してつぎの事実がある⁶⁾。

[事実: 任意の因果律を満たす入出力写像は入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ により, $\gamma(|\omega|) = \alpha(\omega)$, $\omega \in U^*$ で与えられる。]

ただし, $\gamma(|\omega|)$ は入力 ω を入れた終わったときの時刻 $|\omega|$ の出力値を表わす。

本論文で考察対象とする入出力関係としてつぎの定義 (2.1) を満たす入力応答関数を取り扱う。ただし, U を多入力系として扱えるが、記号の簡単化のため, 1 入力系すなわち $U = K$ とする。ある整数 $m \in \mathbb{N}$ に対し, $U^*(m) = \{\omega \in U^*; |\omega| = m\}$ とする。更に, $u \in U$, $t \in \mathbb{N}$ に対し $u^t \in U^*$ を $u^t(i) = u$ (ただし, $0 \leq i \leq t$) と定義する。また, $u^0 = I$ 。

(2.1) 定義

$\alpha \in F(U^*, Y)$ を入力応答関数とし、時不変性、アファ

イン性をつぎのようにする。

時不変性:

$$\alpha(\omega_1|\omega) - \alpha(\omega_1) = \alpha(\bar{\omega}_1|\bar{\omega}) - \alpha(\bar{\omega}_1)$$

ただし任意の $\omega, \omega_1, \bar{\omega}_1 \in U^*$, $|\omega_1| = |\bar{\omega}_1|$ 。

アファイン性:

$$\begin{cases} \alpha(\bar{\omega} + \omega) + \alpha(o^m) = \alpha(\bar{\omega}) + \alpha(\omega) \\ \alpha(\lambda\omega) = \lambda\alpha(\omega) + (1-\lambda)\alpha(o^m) \end{cases}$$

ただし, 任意の $\bar{\omega}, \omega \in U^*(m)$, $\lambda \in K$, $m \in \mathbb{N}$ 。

そのとき、時不変性およびアファイン性を満たす α を時不変・アファイン入力応答関数という。

(2.2) 定義

時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し関数 $GI_\alpha: \{0, 1\} \rightarrow F(\mathbb{N}, Y); u \mapsto GI_\alpha(u)[\cdot; t \mapsto \alpha(u^t) - \alpha(u^{t-1})]$ を α の補正一般インパルス応答 (modified generalized impulse response) という。

(2.3) 定理

時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し補正一般インパルス応答 $GI_\alpha: \{0, 1\} \rightarrow F(\mathbb{N}, Y); u \mapsto GI_\alpha(u)[\cdot; t \mapsto \alpha(u^t) - \alpha(u^{t-1})]$ が対応し、この対応は全単射である。

この逆対応は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) = & \alpha(I) + \sum_{j=1}^n \{\omega(j) \cdot GI_\alpha(1)(n-j+1) \\ & + [1 - \omega(j)] \cdot \{GI_\alpha(0)(n-j+1)\} \} \end{aligned}$$

ただし $n = |\omega|$ である。

(注意) 本定理により時不変・アファイン入力応答関数 α が補正一般インパルス応答 GI_α によって特徴付けられることがわかる。

2.2 概線形系

この節では、概線形系に関しての最小限の準備を行う。

(2.4) 定義

次式で表わされる系を概線形系といい、概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \hat{g}, h, h^0)$ と書く。その σ の構成図は Fig. 1 で与えられる。

Fig. 1 A construction diagram of almost-linear system σ

$g^0, \hat{g} \in X, h$ は線形写像 $h: X \rightarrow Y, h^0 \in Y$ である。

更に、任意の $t \in N$ に対し $\omega(t+1) \in U, \gamma(t) \in Y$ である。また、対 (X, F) を自由運動という。

概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \hat{g}, h, h^0)$ に対し

$$\begin{aligned} \text{関数 } \alpha_\sigma: U^* \rightarrow Y; \omega \mapsto \alpha_\sigma(\omega) \\ = h^0 + h \left(\sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} \{g^0 + \hat{g}\omega(j)\} \right) \end{aligned}$$

を σ の挙動 (behavior) という。

時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し $\alpha_\sigma = \alpha$ となる概線形系 σ は α を実現するという。

$\sigma = ((X, F), g^0, \hat{g}, h, h^0)$ を概線形系とする。可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} \{g^0 + \hat{g}\omega(j)\}; \omega \in U^* \right\}$ の線形包が X に一致するとき σ を擬可到達であるという。任意の $m \in N$ に対し $hF^m x_1 = hF^m x_2$ ならば $x_1 = x_2$ が成り立つとき σ を可観測であるという。擬可到達であり、可観測である σ を正準であるという。

(2.5) 概線形系の例

$A(N \times \{0, 1\}, K) := \{\text{関数 } \lambda: N \times \{0, 1\} \rightarrow K; \lambda = \sum \lambda(n, u) e_{(n, u)} \text{ (有限個の和)}, \lambda(n, u) \in K, n \in N, u \in U\}$ 。ただし

$$e_{(n, u)}(m, u') = \begin{cases} 1 & (m=n \text{ 及び } u'=u \text{ のときのみ}) \\ 0 & (m \neq n \text{ 又は } u' \neq u \text{ のとき}) \end{cases}$$

$A(N \times \{0, 1\}, K)$ は明らかに線形空間である。

$A(N \times \{0, 1\}, K)$ の基底 $e_{(n, u)}$ に対し、 $S_r e_{(n, u)} = e_{(n+1, u)}$ とすれば $S_r \in L(A(N \times \{0, 1\}, K))$ である。したがって、対 $(A(N \times \{0, 1\}, K), S_r)$ は自由運動である。 $\hat{\eta} := e_{(0, 1)} - e_{(0, 0)} \in A(N \times \{0, 1\}, K)$ とする。任意の時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し線形写像 $\underline{\alpha}: A(N \times \{0, 1\}, K) \rightarrow Y$ を $\underline{\alpha}(e_{(n, u)}) = \alpha(u^{n+1}) - \alpha(u^n)$, $e_{(n, u)} \in A(N \times \{0, 1\}, K)$ と定義する。ただし、 $u^0 := I$ 。そこで

$$\begin{aligned} \text{組 } \sigma = ((A(N \times \{0, 1\}, K), S_r), e_{(0, 0)}, \\ \hat{\eta}, \underline{\alpha}, \alpha(I)) \end{aligned}$$

は α を実現する擬可到達な概線形系である。

(2.6) 概線形系の例

$F(N, Y) := \{\text{関数 } f: N \rightarrow Y, \gamma \in F(N, Y), t \in N \text{ に対し}, (S_t \gamma)(t) := \gamma(t+1) \text{ とすれば } S_t \in L(F(N, Y)) \text{ となり対 } (F(N, Y), S_t) \text{ は自由運動である。任意の時不変・アファイン入力応答関数 } \alpha \in F(U^*, Y) \text{ に対し } \hat{\xi} \in F(N, Y) \text{ を } \hat{\xi}(t) := \alpha(\omega|1) - \alpha(\omega|0), \omega \in U^*(t) \text{ とする。} \hat{\xi} \in F(N, Y) \text{ を } \xi(t) = \alpha(\omega|0^t) - \alpha(\omega), \omega \in U^*(t) \text{ により定義する。更に線形写像 } 0: F(N, Y) \rightarrow Y \text{ を } \gamma \mapsto \gamma(0) \text{ により定義する。そこで}$

組 $\sigma = ((F(N, Y), S_t), \xi, \hat{\xi}, 0, \alpha(I))$ は α を実現する可観測な概線形系である。

(2.7) 定義

$(X_1, F_1), (X_2, F_2)$ を自由運動とする。

$TF_1 = F_2 T$ を満たす線形写像 $T: X_1 \rightarrow X_2$ を $(X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ の自由運動射という。

$\sigma_1 = ((X_1, F_1), g_1^0, \hat{g}_1, h_1, h^0), \sigma_2 = ((X_2, F_2), g_2^0, \hat{g}_2, h_2, h^0)$ を概線形系とする。 $Tg_1^0 = g_2^0, T\hat{g}_1 = \hat{g}_2$ および $h_1 = h_2 T$ を満たす自由運動射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の概線形系射という。 T が全単射であるとき $T: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ を同形射という。

(2.8) 補題

$\sigma_1 = ((X_1, F_1), g_1^0, \hat{g}_1, h_1, h^0), \sigma_2 = ((X_2, F_2), g_2^0, \hat{g}_2, h_2, h^0)$ を概線形系とし T を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の概線形系射とする。

そのとき σ_1 の挙動 α_{σ_1} と σ_2 の挙動 α_{σ_2} とは等しい。すなわち $\alpha_{\sigma_1} = \alpha_{\sigma_2}$ が成り立つ。

(2.9) 定義

概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \hat{g}, h, h^0)$ に対し線形写像 $G: A(N \times \{0, 1\}, K) \rightarrow X; e_{(n, u)} \mapsto F^n(g^0 + \hat{g}u)$ は自由運動射 G :

$(A(N \times \{0, 1\}, K), S_r) \rightarrow (X, F)$ であり、 G は $g^0, \hat{g}$ に対応する線形入力写像といわれ、線形写像 H :

$X \rightarrow F(N, Y); x \mapsto Hx[t \mapsto hF^t x]$ は自由運動射 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ であり、 H は h に対応する線形観測写像といわれる。自由運動射 A :

$(A(N \times \{0, 1\}, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ を線形入出力写像という。

(注意) 本定義はつぎの補題(2.10), 定義(4.1)および定理(4.2)で用いられる。入出力行列, 有界入出力行列の導入および有限次元概線形系の存在判定条件に重要となる。

(2.10) 補題

任意の線形入出力写像 $A: (A(N \times \{0, 1\}, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ に対し次式により時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が対応し、この対応は全単射である。

$$\alpha(\omega|u) - \alpha(\omega) = (A(e_{(0, u)}))(t).$$

ただし $\omega \in U^*, u \in \{0, 1\}, |\omega| = t$ である。

(2.11) 実現の存在と一意性の定理

$\alpha \in F(U^*, Y)$ を任意の時不変・アファイン入力応答関数とする。そのときつぎの1). 2). の概線形系は α を実現する正準系である。

1).

$$((A(N \times \{0, 1\}, K)/\ker A, \hat{S}_r), [e_{(0, 0)}],$$

$$[\hat{\eta}], \underline{\alpha}, \alpha(I))$$

ただし $\hat{A}$ は A に対応する線形入出力写像であり、 $\hat{S}_r$ は S_r から $(A(N \times \{0, 1\}, K)/\ker A)$ に誘導された写像である。

$$[\hat{\eta}] = [e_{(0, 1)} - e_{(0, 0)}],$$

$\alpha: A(N \times \{0, 1\}, K)/\ker A \rightarrow Y$ は $\alpha[e_{(n, u)}] = \alpha(u^{n+1}) - \alpha(u^n)$, $u \in \{0, 1\}$ である。

ただし, 任意の $y \in A(N \times \{0, 1\})$ に対して, $[y]$ は商空間 $A(N \times \{0, 1\}, K)/\ker A$ の要素を表わす。

2). $((F(N, Y), S_i), \xi, \bar{\xi}, 0, \alpha(I))$

$((S^N(\xi(U))), S_i), \xi, \bar{\xi}, 0, \alpha(I))$.

ただし, $S^N(\xi(U)) := \{S(\xi + \bar{\xi}u); u \in \{0, 1\}, \xi(t) = \alpha(\omega|0^1) - \alpha(\omega), \bar{\xi}(t) := \alpha(\omega|1) - \alpha(\omega|0^1), \omega \in U^*(t)\}$ (存在部分)

σ_1, σ_2 を $\alpha \in F(U^*, Y)$ を実現する正準系とする。そのとき同形射 $T: \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ がただ一つ存在する。(一意部分)

(2.12) 命題

次式で表わされる任意の“いわゆる”線形系に対しそれと同じ入出力関係をもつ概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \bar{g}, h, h^0)$ が得られる。

ただし, $g^0 = Fx^0 - x^0, h^0 = hx^0$ である。

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + \bar{g}\omega(t+1) \\ x(0) = x^0 \\ \gamma(t) = hx(t) \end{cases}$$

ただし $x(t), \bar{g} \in X, F \in L(X)$ 。

(2.13) 命題

$\sigma = ((X, F), g^0, \bar{g}, h, h^0)$ を可観測な概線形系とする。 σ がつぎのシステム方程式で与えられるための必要十分条件は $x^0 \in X$ が存在して, $[F - I]x^0 = g^0$ と表わされることである。

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + \bar{g}\omega(t+1) \\ x(0) = x^0 \\ \gamma(t) = h^0 - hx^0 + hx(t) \end{cases}$$

3. 有限次元正準概線形系

この章では状態空間が有限次元である概線形系を考察する。状態空間 X が有限次元 $[n$ 次元] の自由運動 (X, F) を有限次元 $[n$ 次元] 自由運動といい, それを状態構造とする概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \bar{g}, h, h^0)$ を有限次元 $[n$ 次元] 概線形系という。

体 K 上の n 次元空間に関してつぎの事実がある⁷⁾。

事実: 「体 K 上の線形空間は K^n に同形であり, $L(K^n)$ は $K^{n \times n}$ ($n \times n$ 行列の集合) に同形である。」

したがって n 次元自由運動 (X, F) を一般性を失うことなく (K^n, F) , ただし $F \in K^{n \times n}$ と仮定することができる。出力値集合は Y は K^p , すなわち, 多出力系として議論できるが以後記号の簡単化のため, 1 出力系すなわち $Y = K$ と仮定する。そのとき線形出力機構 $h: X \rightarrow K$ は $h \in K^{1 \times n}$ と考えられる。

3.1 擬可到達性

本節では有限次元概線形系の擬可到達性を論じる。

(3.1) 定義

概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, \bar{g}, h, h^0)$ の中の

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g^0 + \bar{g}\omega(t+1) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

をアファイン入力写像付き自由運動といい, $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ と書く。可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{\omega} F^{\omega-j} \{g^0 + \bar{g}\omega(j)\}; \omega \in U^* \right\}$ の線形包が K^n に一致するときアファイン入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ を擬可到達であるという。

$K^n = \left\{ \sum_{j=1}^{\omega} F^{\omega-j} \{g^0 + \bar{g}\omega(j)\}; \omega \in U^* \right\}$ のときアファイン入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ を可到達であるという。アファイン入力写像付き自由運動 $((X_1, F_1), g_1^0, \bar{g}_1), ((X_2, F_2), g_2^0, \bar{g}_2)$ に対し, $Tg_1^0 = g_2^0$ および $T\bar{g}_1 = \bar{g}_2$ を満たす自由運動射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $((X_1, F_1), g_1^0, \bar{g}_1) \rightarrow ((X_2, F_2), g_2^0, \bar{g}_2)$ のアファイン入力写像付自由運動射という。

(3.2) 命題

$((K^n, F), g^0, \bar{g})$ をアファイン入力写像付き自由運動とする。そのとき $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ が擬可到達であるための必要十分条件は $\text{rank} [g^0 \ Fg^0 \cdots F^{n-1}g^0 \ \bar{g} \ F\bar{g} \cdots F^{n-1}\bar{g}] = n$ が成り立つことである。

[証明] 付録(C.1)

定義から容易につぎの命題が得られる。

(3.3) 命題

$((K^n, F), g^0, \bar{g})$ をアファイン入力写像付き自由運動とする。そのとき $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ が可到達であるための必要十分条件は $\text{rank} [\bar{g} \ F\bar{g} \cdots F^{n-1}\bar{g}] = n$ が成り立つことである。

擬可到達なアファイン入力写像付自由運動の同形類の代表元を求めるためにつぎの数値を導入する。

(3.4) 定義

写像 $\|: N \times \{0, 1\} \rightarrow N; (t, u) \mapsto \|(t, u)\| = 2t + u$ と定義し, $\|(t, u)\|$ を $(t, u) \in N \times \{0, 1\}$ の数値という。ここで集合 $N \times \{0, 1\}$ に対し全順序関係をこの数値により定義する。すなわち $(s, u_1) \geq (t, u_2) \Leftrightarrow \|(s, u_1)\| \geq \|(t, u_2)\|$ とする。

(3.5) 定義

$((K^n, F_s), g_s^0, \bar{g}_s)$ を擬可到達なアファイン入力写像付き自由運動とし正数 $i \in N (1 \leq i \leq n)$ に対し $I_i \in N, J_i \in \{0, 1\}$ とする。そのとき $e_i := F_s^{I_i}(g_s^0 + \bar{g}_s J_i)$ なる系列 $\{(I_i, J_i) \in N \times \{0, 1\}; 1 \leq i \leq n\}$ がつぎの条件を満たすとき $((K^n, F_s), g_s^0, \bar{g}_s)$ を擬可到達標準形という。

$$F_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{31} & 0 & f_{51} \\ 0 & 0 & f_{32} & 0 & f_{52} \\ 1 & 0 & f_{33} & 0 & f_{53} \\ 0 & 1 & f_{34} & 0 & f_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f_{55} \end{bmatrix}$$

ただし

$$\begin{aligned} S_l^2 \zeta &= f_{31} \zeta + f_{32}(\zeta + \bar{\zeta}) + f_{33} S_l \zeta \\ &\quad + f_{34} S_l(\zeta + \bar{\zeta}), \\ S_l^3(\zeta + \bar{\zeta}) &= f_{51} \zeta + f_{52}(\zeta + \bar{\zeta}) + f_{53} S_l \zeta \\ &\quad + f_{54} S_l(\zeta + \bar{\zeta}) + f_{55} S_l^2(\zeta + \bar{\zeta}) \end{aligned}$$

である。

⑤ $h^* := \alpha(I)$ とする。

9. おわりに

以上、時不変・アファイン入力応答関数(同等的に因果律、時不変およびアファイン性を満たす任意の入出力写像を取り扱うことと同等である)に対する概線形系による実現定理および概線形系が擬線形系のサブクラスであることに基いてわれわれは有限次元概線形系を究明した。そこで、擬線形系と同じようなつぎの成果が得られた。有限次元概線形系が正準であるための必要十分条件、有限次元正準概線形系の同形類の代表元として擬可到達標準系、可観測標準系があることおよび時不変・アファイン入力応答関数が有限次元概線形系の挙動であるための必要十分条件を示した。更に与えられた時不変・アファイン入力応答関数から概線形系を求める実現手順を与えた。

以上の概線形系の理論体系は Kalman らが確立した線形系の理論体系の拡張になっている。たとえば、擬可到達標準系は線形系のコンパニオン・フォームに対応する。また、入力行列は線形系の Hankel 行列に対応する。

本論文の成果は概線形系だけでなく“いわゆる”線形系(初期状態が零でない線形系)にも有効である。“いわゆる”線形系を求めようとするには線形系の実現問題と未知の状態を既知としようとする推定問題との二つの問題を解かなければならない。命題(2.12)、(2.13)によれば概線形系は“いわゆる”線形系を含むのでそれら二つの問題が一つの概線形系の実現問題と捉えることができる。このことが可能になったのは概線形系の入出力を補正一般インパルス応答関数によって記述できたことによる。

本論文の有限次元概線形系の実現理論により概線形系の部分実現・オンライン部分実現問題の取扱いが可能になった⁹⁾。それらの詳細については別の論文で論じる。

参考文献

- 1) 長谷川, 松尾: 離散時間・概線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 30-2, 150/157(1994)
- 2) 長谷川, 松尾: 離散時間・擬線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 28-2, 199/207(1992)
- 3) 長谷川, 松尾: 離散時間・有限次元擬線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 29-9, 1071/1080(1993)
- 4) R. E. Kalman, P. L. Falb & M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory McGraw-Hill(1969)
- 5) 長谷川, 松尾: 離散時間・擬線形系の部分実現及び実時間部分実現理論, 計測自動制御学会論文集, 投稿中
- 6) T. Matsuo: Realization Theory of Continuous Time Dynamical Systems, Lecture Notes in Control & Information Sciences, 32, Springer-Verlag(1981)
- 7) P. R. Halmos: Finite-Dimensional Vector Spaces, D. Van. Nos. Com. (1958)
- 8) 松尾, 長谷川: 離散時間・概線形系の実時間部分実現理論, 第35回自動制御連合講演会前刷, 71/72(1992)

《付録 A 時不変入力応答関数》

本論文の諸結果を証明するに必要な入出力写像について列挙する。詳細については文献1)~3)を参照。

(A.1) 定義

$\alpha \in F(U^*, Y)$ を入力応答関数とし, 時不変性をつぎのように定義する。

時不変性:

$$\alpha(\omega_1 | \omega) - \alpha(\omega_1) = \alpha(\bar{\omega}_1 | \omega) - \alpha(\bar{\omega}_1)$$

ただし任意の $\omega, \omega_1, \bar{\omega}_1 \in U^*, |\omega_1| = |\bar{\omega}_1|$. そのとき時不変性を満たす α を時不変入力応答関数といい, α_l と書く。

(A.2) 定義

時不変入力応答関数 $\alpha_l \in F(V^*, Y)$ に対し関数 $GI_\alpha: V \rightarrow F(N, Y); u \mapsto GI_\alpha(u)[\cdot; t \mapsto \alpha_l(u^t) - \alpha_l(u^{t-1})]$ を α_l の補正一般インパルス応答(modified generalized impulse response)という。ただし, V^* は $V = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ をアルファベットとするワード(語)の集合であり, $V \subset U$ である。

(A.3) 定理

時不変入力応答関数 $\alpha_l \in F(V^*, Y)$ に対し補正一般インパルス応答 $GI_\alpha: V \rightarrow F(N, Y); u \mapsto GI_\alpha(u)[\cdot; t \mapsto \alpha_l(u^t) - \alpha_l(u^{t-1})]$ が対応し, この対応は全単射である。

この逆対応は次式で与えられる。

$$\alpha_l(\omega) = \alpha_l(I) + \sum_{j=1}^n \{GI_\alpha(\omega(j))\}(|\omega| - j)$$

ただし $n = |\omega|$ である。

(A.4) 定義

$A_l S_r = S_l A_l$ を満たす線形写像 A_l :

$A(N \times V, K) \rightarrow F(N, Y)$ をも線形入出力写像(定義(2.9)参照)といい, 定義(2.9)と区別するために線形入出

力写像 $A_I: (A(N \times V, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_I)$ と書く。ただし, $A(N \times V, K) := \{\text{関数 } \lambda: N \times V \rightarrow K; \lambda = \sum \lambda(n, v) e_{(n, v)} \text{ (有限個の和)}, n \in N, v \in V, \lambda(n, v) \in K\}$, ただし $e_{(n, v)}$ は次式により与えられる, $m, n \in N, v, v' \in V$ に対し $e_{(n, v)}(m, v') = 1 (m=n, v'=v \text{ のときのみ}), e_{(n, v)}(m, v') = 0 (m \neq n \text{ または } v' \neq v \text{ のとき})$. 更に S_r は $S_r e_{(n, v)} = e_{(n+1, v)}$ であり, $S_r \in L(A(N \times V, K))$ である。

(A.5) 補題

任意の線形入出力写像 $A_I: (A(N \times V, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_I)$ に対し次式により時不変入力応答関数 $a_I \in F(V^*, Y)$ が対応し, この対応は全単射である。

$$a_I(\omega|u) - a_I(\omega) = (A_I(e_{(0, u)}))(t).$$

ただし $\omega \in V^*, u \in V, |\omega| = t$ である。

《付録 B 擬線形系から概線形系へ》

本節では有限次元概線形系を論じるに必要となる擬線形系および概線形系に関する最小限の事柄を述べる。詳細については文献 1)~3) を参照されたい。

(B.1) 定義

次式で表わされる系を擬線形系といい, 擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ と書く。その σ の構成図は Fig. 3 で与えられる。

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g(\omega(t+1)) \\ x(0) = 0 \\ \gamma(t) = h^0 + hx(t), \quad t \in N \end{cases}$$

ただし, X は体 K 上の線形空間, $F \in L(X)$ であり, 写像 $g: V \rightarrow X$, 線形写像 $h: X \rightarrow Y, h^0 \in Y$ である。

更に, $\omega(t) \in U, \gamma(t) \in Y$ である。また, 対 (X, F) を自由運動という。

擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ の中の

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g(\omega(t+1)) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

を入力写像付き自由運動 $((X, F), g)$ という。

(B.2) アファイン入力写像付き自由運動

定義(B.1)の擬線形系 σ の入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g)$ は $\{g(u_j): 1 \leq j \leq m\}$ により完全に特徴づ

けられる。それに対して g がアファイン写像 $U \rightarrow X: u \mapsto g(0) + \bar{g}u$ を満たすとき入力写像付き自由運動 $((X, F), g)$ をアファイン入力写像付き自由運動という。そのとき $g(1) = g(0) + \bar{g}$ の関係がある(文献 1)参照)。ここで, 記号を簡素化するために $g^0 := g(0)$ と置く。そのアファイン入力写像付き自由運動は $\{g^0, g^0 + \bar{g}\}$ により完全に特徴づけられる。ただし, $U = K$ である。

《付録 C》

本節では 3 章で述べた結果に対しての証明を行う。

(C.1) 命題(3.2)の証明

文献 3) において有限次元擬線形系の擬可到達性を定義(B.1)の入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g)$ に基づいて考察した。(B.2)により, アファイン入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ が入力写像付き自由運動の特殊な場合になる。したがって, 文献 3) での入力写像付き自由運動 (K^n, F, g) の擬可到達性について得られた成果はアファイン入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ の擬可到達性として容易に書き換えられる。(証明終)

(C.2) 定理(3.6)の証明

文献 3) の定理(3.15)において入力写像付き自由運動の同形類の表現定理を得た。本定理はアファイン入力写像付き自由運動に関する同形類の表現定理である。(B.2)からわかるように文献 3) の定理(3.15)においての U を $\{0, 1\}$ と置き換えられた場合に当たる。したがってその定理から容易に得られる。(証明終)

(C.3) 定理(3.12)の証明

文献 3) の定理(3.19)において正準擬線形系の同形類の表現定理を得た。擬線形系に対しては定義(2.4)および(B.2)からわかるようにその定理の U を $\{0, 1\}$ に置き換えた場合に当たる。したがって本定理は文献 3) の定理(3.19)から容易に得られる。(証明終)

(C.4) 定理(3.13)の証明

3.2 節の最初に述べたように概線形系の出力機構付自由運動と擬線形系のそれとは同じである。したがって文献 3) の定理(3.20)と同様にして得られる。(証明終)

《付録 D》

(D.1) 定理(4.2)の証明

最初に定理(4.2)の条件③について考察する。文献 3) の定理(4.2)において時不変入力応答関数が有限次元擬線形系の挙動であるための条件を与えた。ここでは, 時不変入力応答関数 $a_I \in F(V^*, Y)$ に対して同等的に線形入出力写像 $A_I: (A(N \times V, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_I)$ を導出した(定理(A.3)参照)。

そのとき任意の $(s, u) \in N \times V, t \in N$ に対し

Fig. 3 A construction diagram of pseudo-linear system σ

$$(A_I(e_{(s,u)}))(t) = a_I(u^{s+t+1}) - a_I(u^{s+t})$$

であるので a_I は同等的につぎの入出力行列 H_a で表わすことができた.

$$H_a := \begin{matrix} & (s, u) \\ \begin{matrix} t \\ \vdots \\ t \end{matrix} & \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots a_I(u^{s+t+1}) - a_I(u^{s+t}) \end{bmatrix} \end{matrix}$$

ただし $u \in V := \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$.

本定理は時不変・アファイン入力応答関数が有限次元概線形系の挙動であるための条件である. 補題(2.10)からわかるように時不変・アファイン入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し同等的に線形入出力写像 A :

$(A(N \times \{0, 1\}, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_l)$ が考えられ, 定義(4.1)により α に対して同等的に入出力行列 H_a が得られる. したがってこれらの二つ入出力行列の違いは V と $\{0, 1\}$ だけにある. それ以外については入出力行列の表現である定理(4.2)の条件③と文献3)の定理(4.2)の条件③とは全く同じである.

つぎに定理(4.2)の条件②について考察する. (B.2)で考察したアファイン入力写像付き自由運動 $((K^n, F), g^0, \bar{g})$ を定理(2.11)の2)の $((\langle S_I^r(\zeta(U)) \rangle, S_l), \zeta, \bar{\zeta})$ に置き換える. そこで, 定理(4.2)の条件②は文献3)の定理(4.2)の条件②においての U (本論文では V に相当する)が $\{0, 1\}$ に置き換えたものに相当することが容易に

わかる. 以上により, 条件②と条件③とは同等である. 条件①と②との同等性は定理(2.11)から明らかである. (証明終)

(D.2) 定理(5.1)の証明

集合 $\{S(\zeta + \bar{\zeta} \cdot u); (i, u) \in N \times \{0, 1\}, 0 \leq i \leq n-1\}$ に対し線形写像 $T: \langle S_I^r(\zeta(U)) \rangle \rightarrow K^n$ を $T(S_I^r(\zeta + \bar{\zeta} \cdot J_i)) = e_i, 1 \leq i \leq n$ とする. ②により $T\zeta = g_s^0, T\bar{\zeta} = \bar{g}_s$ であり, ③により $h_s T = 0$ が成立する. ④により $TS_l = F_s T$ が成り立つ. したがって T は $((\langle S_I^r(\zeta(U)) \rangle, S_l), \zeta, \bar{\zeta}, 0, \alpha(1)) \rightarrow ((K^n, A_s), g_s^0, \bar{g}_s, h_s, h^0)$ の全単射な概線形系射である. ゆえに補題(2.8)により σ_s の挙動は α に等しい.

$\sigma_s = ((K^n, F_s), g_s^0, \bar{g}_s, h_s, h^0)$ が擬可到達標準系であることは写像 T の性質と集合 $\{(I_i, J_i) \in N \times \{0, 1\} : 1 \leq i \leq n\}$ の選び方による. (証明終)

[著者紹介]

長谷川 泰 道 (正会員)

(Vol. 30, No. 2 参照)

故 松 尾 強

(Vol. 30, No. 2 参照)