離散時間予見繰返し制御系とその安定性に関する一考察†

中 村 裕 司*

Discrete-Time Preview-Repetitive Control Systems and a Study on the Stability

Hiroshi NAKAMURA*

In our previous paper, a discrete-time preview-repetitive control method was presented. The experimental results on motor position control systems demonstrated the applicability of the method. In this paper, a more generalized discrete-time preview-repetitive control method is presented. It is shown that the control systems include phase lead compensations that depend on the prediction horizons. The sufficient conditions for the stability of the systems are derived and the relations between the design parameters and the stability are studied. For motor position control systems, the results of simulations and experiments show that the robust stability against the modeling errors due to the inertial load's changes can be improved by increasing the prediction horizon, which is the dominant parameter.

Key words: repetitive control, model predictive control, motor position control

1. ま え が き

近年, NC 工作機械や産業用ロボットの高速高精度追従動作を実現する方法として, 繰返し制御が注目されている。繰返し制御では, 1 周期前の偏差を用いて制御入力 of 補正を繰り返すことによって, 高精度な追従動作が実現される。

しかし, 制御対象が真にプロパーである場合, 制御系が不安定になることが知られており¹⁾, この問題は, むだ時間部分にローパスフィルタを挿入することにより解決されている²⁾。

また, 離散時間繰返し制御系の場合には, 1 周期分のむだ時間を含んだ拡大系における制御系設計^{3), 4)}, あるいは, 前向きのむだ時間要素を利用した位相進み補償⁵⁾, によっても系の安定化が図られている。

前者では, 繰返し周期が長い場合, 拡大系の次数が非常に大きくなるという問題がある。文献 4) において江上らは, 離散時間予見制御系の設計法が繰返し制御にも応用できることを示しており, この設計法は, 最適レギュ

レータの安定性および最適性を有した予見繰返し制御系が得られるという, 優れた特徴をもつ。しかし, 拡大系の次数と同次数の Riccati 方程式の解, および, 同数個の状態フィードバックが必要であり, 繰返し周期や評価関数の重み行列を変更するたびに, この Riccati 方程式を解かねばならない。

これに対し, 後者の位相進み補償によるものは応用の観点から考えられた設計法であり³⁾, より実用的である。ただし, ここでの位相進み補償は, 安定化補償器として設計されるものであり, 予見制御的考慮からなされたものではない。

筆者らは, 繰返し制御とモデル予測制御とを組み合わせた制御則を提案し, モータ位置制御系への適用実験によりその効果および実用性を確認したが⁶⁾, 安定性に関する理論的考察は行っていない。

本論文では, 文献 5) の制御則を包含する, 離散時間予見繰返し制御則を提案する。また, 予見繰返し制御系に, 予測区間分の位相進み補償要素が内在することを示し, 系の安定条件を求め, 各設計パラメータと安定条件との関係について考察する。

さらに, モータ位置制御系を対象として, 主な設計パラメータである予測区間を大きくすることにより, 系が安定化され, モデル誤差に対するロバスト性も向上することを, 数値例および検証実験で確認する。

† 第 30 回計測自動制御学会学術講演会で一部発表(1991・7)

* (株)安川電機つくば研究所 つくば市東光台 5-9-10

* Tsukuba Research Lab., Yaskawa Electric Corp.,
Tsukuba

(Received January 21, 1993)

(Revised May 21, 1993)

2. 予見繰返し制御

予見繰返し制御系の構成を Fig. 1 に示す。\$r(i)\$ は、同じパターンを周期 \$L \cdot T\$ で繰り返す目標指令であり、\$T\$ はサンプリング周期である。制御対象 \$G_p(z)\$ は、1 入力 1 出力の線形時不変離散時間系で、真にプロパーで安定かつ零でない定常ゲインをもつものとする。

時刻 \$i\$ において、制御入力 \$u(i)\$ を、1 周期前の時刻 \$i' = i - L\$ の制御入力 \$u(i')\$ から補正量 \$\sigma(i)\$ だけ補正する。

$$u(i) = u(i') + \sigma(i) \quad (1)$$

ここで補正量 \$\sigma(i)\$ は、未来時刻 \$i + S\$ 以降の補正量を一定としたときの、区間 \$[i + M1, i + M]\$ の未来偏差予測値をできるだけ小さくするように決定される。ここでの予測は、モデル予測制御と同じ手法で行い、\$M\$ は予測区間、\$M1\$ から \$M\$ までは一致区間、\$S\$ は操作量決定区間と呼ばれ、\$1 \leq M1 \leq M, 1 \leq S \leq M\$ である。

偏差 \$e(i)\$ から補正量 \$\sigma(i)\$ までの伝達関数 \$G_s(z)\$ は、以下の手順で求められる。

いま制御対象 \$G_p\$ のモデルとして次式を考える。

$$\hat{y}(i) = \sum_{n=d}^{N-1} \hat{H}_n \Delta u(i-n) + \hat{H}_N u(i-N) \quad (2)$$

ただし \$\hat{H}_n (n=d, \dots, N)\$ は、制御対象の単位ステップ応答サンプル値で、\$d > 0, \hat{H}_n = 0 (0 \leq n < d), \hat{H}_d \neq 0\$ である。\$N\$ は応答が十分に整定するよう選び、\$\hat{H}_n = \hat{H}_N (n > N)\$ とする。\$\Delta u(i) = u(i) - u(i-1)\$ である。

上式のモデルを用いれば、

$$\delta(i) = y(i) - y(i') \quad (3)$$

で定義される出力変化分 \$\delta(i)\$ のモデルは (1) 式より、

$$\hat{\delta}(i) = \sum_{n=d}^{N-1} \hat{H}_n \Delta \sigma(i-n) + \hat{H}_N \sigma(i-N) \quad (4)$$

で与えられる。ただし、\$\Delta \sigma(i) = \sigma(i) - \sigma(i-1)\$ である。

そこで時刻 \$i\$ において、未来時刻 \$i + m (m = M1, \dots, M)\$ の出力変化分を、(4) 式のモデルと実際値 \$\delta(i)\$ を用いて、次式のように予測する。

$$\begin{aligned} \delta^*(i+m) &= \hat{\delta}(i+m) + \delta(i) - \hat{\delta}(i) \\ &= \delta(i) + \sum_{n=d}^m \hat{H}_n \Delta \sigma(i+m-n) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{N-1} (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) \Delta \sigma(i-n) \end{aligned} \quad (5)$$

(3), (5) 式より、偏差予測値 \$e^*(i+m)\$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} e^*(i+m) &= e(i'+m) - \delta^*(i+m) \\ &= e(i'+m) + e(i) - e(i') \\ &\quad - \sum_{n=d}^m \hat{H}_n \Delta \sigma(i+m-n) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{N-1} (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) \Delta \sigma(i-n) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、時刻 \$i + S (1 \leq S \leq M-d)\$ 以降の補正量は一定、すなわち、

$$\Delta \sigma(i+j) = 0 \quad j = S, S+1, \dots, M-d \quad (7)$$

とすると (\$S = M-d+1\$ はこの制約なしを意味する)、区間 \$[i + M1, i + M]\$ の未来偏差ベクトル \$\mathbf{e}_F\$ は、(6) 式より次式で表わせる。

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_F &= \mathbf{e}_P - \mathbf{H}_P \Delta \sigma_P - \mathbf{H}_F \Delta \sigma_F \\ \mathbf{e}_F &= [e^*(i+M1), \dots, e^*(i+M)]^T \in \mathbf{R}^{(M-M1+1) \times 1} \\ \mathbf{e}_P &= [e(i'+M1) + e(i) - e(i'), \\ &\quad \dots, e(i'+M) + e(i) - e(i')]^T \in \mathbf{R}^{(M-M1+1) \times 1} \\ \Delta \sigma_P &= [\Delta \sigma(i-1), \dots, \Delta \sigma(i-N+1)]^T \in \mathbf{R}^{(N-1) \times 1} \\ \Delta \sigma_F &= [\Delta \sigma(i), \dots, \Delta \sigma(i+S-1)]^T \in \mathbf{R}^{S \times 1} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{H}_P = \begin{bmatrix} \hat{H}_{M1+1} - \hat{H}_1 & \hat{H}_{M1+2} - \hat{H}_2 & \dots & \hat{H}_{M1+N-1} - \hat{H}_{N-1} \\ \hat{H}_{M1+2} - \hat{H}_1 & \hat{H}_{M1+3} - \hat{H}_2 & \dots & \hat{H}_{M1+N} - \hat{H}_{N-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{H}_{M+1} - \hat{H}_1 & \hat{H}_{M+2} - \hat{H}_2 & \dots & \hat{H}_{M+N-1} - \hat{H}_{N-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(M-M1+1) \times (N-1)}$$

$$\mathbf{H}_F = \begin{bmatrix} \hat{H}_{M1} & \hat{H}_{M1-1} & \dots & \hat{H}_{M1-S+1} \\ \hat{H}_{M1+1} & \hat{H}_{M1} & \dots & \hat{H}_{M1-S+2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{H}_M & \hat{H}_{M-1} & \dots & \hat{H}_{M-S+1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(M-M1+1) \times S}$$

$$\text{ただし、} \hat{H}_n = 0 (0 \leq n < d), \hat{H}_n = \hat{H}_N (n > N) \quad (10)$$

いま、評価関数を

$$\begin{aligned} J &= \mathbf{e}_F^T \mathbf{W} \mathbf{e}_F + \Delta \sigma_F^T \mathbf{C} \Delta \sigma_F \\ \mathbf{W} &= \begin{bmatrix} w_{M1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_{M1+1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & w_M \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(M-M1+1) \times (M-M1+1)} \\ &\quad w_m > 0, m = M1, \dots, M \\ \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{S-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{S \times S} \\ &\quad c_j \geq 0 \quad j = 0, \dots, S-1 \end{aligned} \quad (11)$$

として最小 2 乗法を用いれば、現在時刻 \$i\$ において決定すべき補正量 \$\Delta \sigma(i)\$ は、

$$\begin{aligned} \Delta \sigma(i) &= \mathbf{b} [\mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \mathbf{H}_F + \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{H}_F^T \mathbf{W} [\mathbf{e}_P - \mathbf{H}_P \Delta \sigma_P] \\ \mathbf{b} &= [1, 0, \dots, 0] \in \mathbf{R}^{1 \times S} \end{aligned} \quad (12)$$

Fig. 1 Preview-repetitive control system

となる。上式は、さらに次式のように書き直せる。

$$\Delta\sigma(i) = Q\{e(i) - e(i')\} + \sum_{m=M_1}^M q_m e(i' + m) - \sum_{n=1}^{N-1} g_n \Delta\sigma(i - n) \quad (13)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} [q_{M_1}, \dots, q_M] &= \mathbf{b}[\mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \mathbf{H}_F + \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \\ Q &= \sum_{m=M_1}^M q_m \\ [g_1, \dots, g_{N-1}] &= \mathbf{b}[\mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \mathbf{H}_F + \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \mathbf{H}_P \\ g_n &= \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) \quad n=1, \dots, N-1 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以上より $G_s(z)$ は、次式で与えられる。

$$G_s(z) = \frac{Q(1 - z^{-L}) + C(z)z^{-L}}{D(z)} \quad (15)$$

ただし $C(z), D(z)$ は次式で与えられ、

$$\left. \begin{aligned} C(z) &= \sum_{m=M_1}^M q_m z^m \\ D(z) &= (1 - z^{-1}) \left(1 + \sum_{n=1}^{N-1} g_n z^{-n} \right) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

特に(11)式の重み行列 $\mathbf{C}$ を零行列とした場合は $D(z)$ を、

$$\left. \begin{aligned} D(z) &= 1 + \sum_{n=1}^N \Delta g_n z^{-n} \\ \Delta g_n &= \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n) \quad n=1, \dots, N \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

と書き直せる(付録1参照)。

また、 $M_1=1, M \geq d, S=1, \mathbf{C}=\mathbf{c}_0=0$ とすると、 $\mathbf{H}_F = [\hat{H}_1 \dots \hat{H}_M]^T, \mathbf{b}=1$ より、

$$q_m = \frac{w_m \hat{H}_m}{\sum_{j=1}^M w_j \hat{H}_j^2} \quad m=1, \dots, M \quad (18)$$

となり、文献5)で提案した制御則と一致する。

3. 安定条件

Fig. 2 は、Fig. 1 と(15)式のむだ時間 z^{-L} を1カ所にまとめたもので、同図より、 Q は速応性を改善するフィードフォワード項に、 $C(z)$ は進み位相をもつ安定化補償器に相当することがわかる³⁾。ただし $Q, C(z), D(z)$ は、評価関数(11)式を最小にするように、(14)、(16)式に従って設定される。

Fig. 2 より、つぎの関係が成立する。

Fig. 2 A system equivalent to Fig. 1

$$\left. \begin{aligned} E(z) &= R(z) - Y(z) \\ Y(z) &= \frac{G_P(z)}{D(z)} \left(Q + C(z) \frac{z^{-L}}{1 - z^{-L}} \right) E(z) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式より、最初の1周期目(後半 M ステップは除く)では $Y(z) = Q G_P(z) D(z)^{-1} E(z)$ となり、 $D(z)^{-1}$ が(16)式より1個の積分器をもつため1型の制御系となる。すなわち制御系が安定であれば、1周期目からステップ状の指令および外乱に対して定常偏差は生じない。

(19)式において目標指令 $r(i) \equiv 0$ とし、さらに、

$$G_1(z) = \frac{C(z)G_P(z)}{D(z) + QG_P(z)} \quad (20)$$

とおくと、簡単な計算により、

$$E(z) = z^{-L}(1 - G_1(z))E(z) \quad (21)$$

となるため、スモールゲイン定理により、

$$\left. \begin{aligned} \text{条件1: } G_1(z) &= \frac{C(z)G_P(z)}{D(z) + QG_P(z)} \text{ は漸近安定} \\ \text{条件2: } g &= \sup_{0 \leq \omega T \leq \pi} |1 - G_1(e^{j\omega T})| < 1 \end{aligned} \right\}$$

が成立するならば、Fig. 2 の制御系は漸近安定となる。

3.1 条件1

条件1は、モデル予測制御系の安定性⁹⁾と密接な関係をもつ。以下、各設定パラメータと条件1との関係を考察する。

(1) 操作量決定区間 S

まず、 $S = M - d + 1$ として(7)式の制約をなくし、重み行列 $\mathbf{C}$ を零行列とし、さらに $M_1 = d$ とすると、

$$\mathbf{H}_F = \begin{bmatrix} \hat{H}_d & 0 & \dots & 0 \\ \hat{H}_{d+1} & \hat{H}_d & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \hat{H}_M & \hat{H}_{M-1} & \dots & \hat{H}_d \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(M-d+1) \times (M-d+1)} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} [q_d, \dots, q_M] &= \mathbf{b} \mathbf{H}_F^{-1} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{H}_F^T \mathbf{H}_F^T \mathbf{W} \\ &= [1/\hat{H}_d, 0, \dots, 0] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となり、 $M_1 = M = d, c_0 = 0$ として一段予測を行った場合と一致する。このとき $G_1(z)$ は次式となる(付録2参照)。

$$G_1(z) = \frac{z^d \hat{G}_P(z)}{(z^d - 1) \hat{G}_P(z) + G_P(z)} \quad (24)$$

ただし $\hat{G}_P(z)$ は、測定値 $\hat{h}_n (n=d, \dots, N)$ により、

$$\hat{G}_P(z) = \sum_{n=d}^N \hat{h}_n z^{-n} \quad (25)$$

で定義される、 $G_P(z)$ の近似式である。

いまモデル誤差が小さく $z^d \hat{G}_P + (G_P - \hat{G}_P) \approx z^d \hat{G}_P$ ならば、(24)式より $G_1 \approx G_P / \hat{G}_P$ となり極零相殺が行われるため、制御対象に不安定零点がある場合条件1は成立しない。

また、不安定零点がない場合は条件1は満足され、特に $\hat{G}_P = G_P$ のときは、(19)式より1周期目 $y(i) = r(i)$

—d) となり、 $G_1=1$ および (21) 式より 2 周期目で偏差零となる。しかし、このような繰返し制御系は、周期 L と非同期的な外乱に対して応答が悪化することが知られている⁷⁾。

(7) 式の制約は、最適化問題の変数を減らすのみでなく、補正量の変化を小さく抑え、上述のような過激な補正を避ける効果をもつ。本論文では、以下、操作量決定区間を $S=1$ として (7) 式の制約を与えるものとする。

(2) 一致区間 $M, M1$

一致区間 $[i+M1, i+M]$ は、補正量 $\sigma(i)$ が出力に影響を及ぼし始める時刻より先に、すなわち、 $M \geq M1 \geq d$ と設定する。しかし、最小値設定 $M=M1=d$ では、前項で述べた不具合が生じてしまう。そこで本項では、 M および $M1$ を大きくとることと条件 1 との関係について述べる。なお、ここでも補正量にける重みは $c_0=0$ とする。

《定理 1》伝達関数 $G_p(z)$ が、

$$G_p(z) = \frac{G_N(z)}{G_D(z)} = \frac{b_1 z^{N_p-1} + \dots + b_{N_p}}{z^{N_p} + a_1 z^{N_p-1} + \dots + a_{N_p}} \\ = \sum_{n=1}^N h_n z^{-n} + \frac{G_{ND}(z)}{G_D(z)} \quad (26)$$

と表わせる安定な制御対象において、ある N_B 以上の任意の N に対して、

$$|\hat{H}_N| > \sum_{n=1}^N |h_n - \hat{h}_n| \quad N \geq N_B \quad (27)$$

が満足されるならば、任意の $M1 \geq d$ に対して、ある M_A , N_A が存在し、 $S=1$, $c_0=0$, $w_m=1/|\hat{H}_m|$, $M \geq M_A$, $N \geq N_A$ とすることにより条件 1 は成立する。

(証明) 付録 3 参照。

《定理 2》伝達関数 $G_p(z)$ が (26) 式で表わせる安定な制御対象において、(27) 式が満足されるならば、ある N_A が存在し、 $S=1$, $c_0=0$, $w_m > 0$, $M1=M \geq N \geq N_A$ とすることにより条件 1 は成立する。

(証明) 付録 4 参照。

定理 1 は、 N をステップ応答が十分整定する値とし、モデル誤差が (27) 式の範囲内であれば、適当な重み行列 W を設定し、 M を大きくすることによって条件 1 が必ず成立することを示しており、定理 2 は、さらに $M1=M$ とすることで、より少ない制約で条件 1 が成立することを示している。

(3) 補正量にける重み c_0

ここでは、これまで零としてきた重み c_0 と条件 1 との関係について述べる。

《定理 3》安定で、零でない定常ゲイン $G_p(1)$ をもつ制御対象 $G_p(z)$ に対して、

$$\sum_{m=M1}^M w_m \hat{H}_m G_p(1) > 0 \quad (28)$$

が満足されるならば、ある c_A が存在し、 $S=1$, $c_0 \geq c_A$ とすることにより条件 1 は成立する。

(証明) 付録 5 参照。

(28) 式の条件は、モデルが

$$\text{sign}(\hat{H}_n) = \text{sign}(G_p(1)) \quad n=d, \dots, N \quad (29)$$

を満足すれば、 $M, M1, W$ の値に関係なく常に成立する。また上式を満足しなくても、 $\text{sign}(\hat{H}_n) = \text{sign}(G_p(1))$ という非常に緩い条件さえ満たせば、 M を大きくすることにより (28) 式は必ず成立する。

3.2 条件 2

条件 2 は、 $G_1(e^{j\omega T})$ のベクトル軌跡が中心 (1, 0) 半径 1 の円内にあることであり、(16) 式より $C(z)$ が進み位相 z^m ($m=M1, \dots, M$) をもつため、予測区間 M を大きくすることによる安定化補償が有効である³⁾。

(14), (16), (20) 式より $G_1(1)=1$ であり、 G_1 のベクトル軌跡は、安定円の中心 (1, 0) から出発する。

さらに $\hat{G}_p = G_p$ のときは、 $M1=M=d$, $c_0=0$ の設定で (24) 式より $G_1=1$ となり、ベクトル軌跡はナイキスト周波数に至るまでの全ての周波数において安定円中心に留まる。しかし通常 $\hat{G}_p = G_p$ は成立せず、仮に成立したとしても、この設定は前節で述べた理由により好ましくない。

条件 2 においても条件 1 と同様 M を大きくすることにより、モデル誤差に対してロバストとなると思われ、この様子は次章以下において数値例および実験により確認する。

また、Fig. 2 のむだ時間 z^{-L} 部分にローパスフィルタを挿入し⁸⁾、高周波領域において安定円の半径を拡げ、安定化することもむろん可能である。

4. モータ位置制御系適用時の安定性と予測区間との関係

予見繰返し制御系では、 $M, M1, c_0$ を大きくするほど、モデル誤差に対するロバスト性は向上するが、その分追従精度は劣化してしまう。

本章と次章で制御対象とするモータ位置制御系は、モデル予測制御が主に適用される化学プラントに比べ、モデル誤差は小さい反面、追従精度に対する要求はかなり厳しい。

そこで本章では、 $M1=d$, $c_0=0$ とし、予測区間 M と安定条件との関係を数値例を用いて考察する。

いま、制御対象 G_p として、Fig. 3 に示すモータの位置制御系を考える。ここで、 u は位置指令、 y はモータの位置、 K_p は位置ループゲイン、 H_0 は 0 次ホールド、 $G_v(s)$ は速度制御系であり、 $K_p=50 \text{ s}^{-1}$, $T_v=10 \text{ ms}$, $T_0=0.33 \text{ ms}$, $T_g=1.6 \text{ ms}$ とした。また定数 K は、モータおよび

直結された負荷の慣性モーメント J_M, J_L により, $K = 31400 \cdot (2J_M)/(J_M + J_L) \text{ s}^{-2}$ で与えられる. なお, これらの値は次章の実験で用いた制御系 (Fig. 9 参照) の同定値である.

$J_L = J_M (K = 31400)$ のとき, $G_p(z)$ は 6 ms 以下のサンプリング周期 T で不安定零点をもち, $T = 4 \text{ ms}$ では次式となる.

$$G_p(z) = \frac{(z+1.3)(z-0.67)(z-0.068)(z+0.025)}{(z-0.83)(z-0.27 \pm j0.51)(z-0.41)(z+0.0014)} \quad (30)$$

このとき, 制御対象 $G_p(z)$ の帯域幅は約 8 Hz で, そのステップ応答は約 120 ms で整定し, $d=1$ である. 以下,

Fig. 3 Position control system $G_p(z)$

(a) $M=1$

(b) $M=2$

Fig. 4 Poles and zeros of $1/(D+QG_p)$, $J_L = J_M$

$T = 4 \text{ ms}$, $N = 30$, $M = 1$, さらに $w_m = \exp\{-(m-1)/2\}$ とした.

モデル誤差を考えるために, $\hat{H}_n (n=1, \dots, N)$ は $J_L = J_M$ として求め, $J_L = J_M, 0.5J_M, 2J_M$ と変化させた場合の $G_p(z)$ に対する, M と安定条件との関係を以下に示す.

4.1 条件 1

モデル誤差なし, すなわち $J_L = J_M$ での $1/(D+QG_p)$ の極と零点を Fig. 4 に示す. $M=1$ では, G_p の不安定零点 -1.3 に対する不安定極が生じるが, $M=2$ では, その極は単位円内に移動し, 条件 1 は満足される.

$J_L = 0.5J_M, 2J_M$ と変化させた場合の, $M=2$ での $1/(D+QG_p)$ の極と零点を Fig. 5 に示す. この程度のモデル誤差ならば, $M=2$ で条件 1 は満足され, M を 30 まで上げても同様であった.

4.2 条件 2

(1) $J_L = J_M, 0.5J_M$ の場合

$J_L = J_M$ と $J_L = 0.5J_M$ の場合の, $M=2$ での G_1 のベクトル軌跡を Fig. 6 に示す. いずれの場合も, ベクトル軌跡は安定円内に入っており, 条件 2 は満足される.

(2) $J_L = 2J_M$ の場合

$M=2, 4$ での G_1 のベクトル軌跡を, Fig. 7 に示す. さ

(a) $J_L = 0.5J_M$

(b) $J_L = 2J_M$

Fig. 5 Poles and zeros of $1/(D+QG_p)$, $M=2$

Fig. 6 Vector locus of $G_1(e^{j\omega T})$, $\omega=0\sim\pi/T$, $M=2$ Fig. 7 Vector locus of $G_1(e^{j\omega T})$, $\omega=0\sim\pi/T$, $J_L=2J_M$ Fig. 8 Unstable frequency f_x with respect to M , $J_L=2J_M$

らに、ベクトル軌跡が安定円を切る周波数 f_x と M との関係は、Fig. 8 に示す。同図より、予測区間 M を大きくすることによって、系の安定化が期待できる。

また Fig. 7 において、フィルタにより安定円の半径を広げれば、 $M=2$ でも系を安定化できる。

5. 実験結果

Fig. 9 に示す DC サーボモータの位置制御系で、前章の結果との対応実験を行った。制御対象 G_p の各定数および T , N , M , w_m は、前章と同じである。

出力 y は、オプティカルエンコーダの出力を 4 通倍し

Fig. 9 Block diagram of experimental system

Fig. 10 Reference input for experiment

Fig. 11 Summations of squared errors, $J_L=0.5J_M$, $M=2$

たパルス数で、1 パルスは 6.28×10^{-4} rad である。位置ループと補正演算は、パソコン(PC 9801)上で行った。

ここで用いた目標指令 r と、その速度成分 $\dot{r}$ を Fig. 10 に示す。この指令は、位置決め制御の際によく用いられるものである。

前章同様、ステップ応答を $J_L=J_M$ で測定し、制御時に負荷の慣性モーメント J_L を変化させた場合の結果を以下に示す。

(1) $J_L=0.5J_M$ の場合

$M=2$ での、100 周期分の偏差推移を Fig. 11 に示す。縦軸は、各周期の偏差 2 乗和と、補正なし ($u=r$) での偏差 2 乗和との比である。3 周期目で 10^{-5} まで減少し、その後も発散することはない。

(2) $J_L=2J_M$ の場合

$M=2, 4$ での、偏差推移を Fig. 12 に示す。 $M=2$ では、

Fig. 12 Summations of squared errors, $J_L = 2J_M$

約 30 Hz の振動が現れ偏差は発散したが、 $M=4$ では、この振動はなくなり偏差は収束した。Fig. 8 の不安定周波数 f_x が、 $M=2$ では約 30 Hz、 $M=4$ では 75 Hz であることとよく一致する。

また Fig. 12 には、 $M=2$ でローパスフィルタを用いた場合の偏差推移も示している。ここでのフィルタは、カットオフ周波数 30 Hz、81 次の FIR 型を用いた。フィルタの利用により、安定性は確保されているが、目標指令の 30 Hz 以上の成分に対する定常偏差のため、 $M=4$ の場合に比べて追従精度は悪い。

以上のように、実験結果は、前章の結果とかなりよく一致した。

予測繰返し制御系では、まず予測区間 M を大きくすることによって系の安定化を行い、これだけでは不十分な場合にフィルタを用いたほうが、フィルタのカットオフ周波数も高く設定でき、より高精度な追従動作を実現できる。

6. あとがき

離散時間予測繰返し制御系の安定条件を示し、各パラメータと安定条件との関係を考察した。また、モータ位置制御系を対象とした場合、予測区間 M を大きくすることにより、負荷の慣性変化によるモデル誤差に対してロバストとなることを数値例および実験で確認した。

なお、負荷の慣性変化以外のモデル誤差に対しても、予測区間を大きくすることにより安定性が向上することが、実験により経験的に確認されている。これらの解析は、今後の課題である。

最後に、本研究に貴重なご助言をいただいた早稲田大学示村悦二郎教授、広島大学佐伯正美教授、(株)安川電機二見茂氏、榊泰輔氏に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 山本，原：繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性，計測自動制御学会論文集，22-8，830/834 (1986)
- 2) 原，小俣，中野：繰返し制御系の安定条件と設計法，計測自動制御学会論文集，22-1，36/42 (1986)
- 3) 中野，井上，山本，原：繰返し制御，65/72，82/89，計測自動制御学会 (1989)

- 4) 江上，土谷：最適ディジタルサーボ系の初期値補償とその応用，計測自動制御学会論文集，26-3，323/330 (1990)
- 5) 中村裕司：予見学習制御とそのサーボモータ位置制御への応用，計測自動制御学会論文集，27-12，1382/1388 (1991)
- 6) 大嶋，橋本，大野：モデル予測制御—SISO 系の安定性とチューニングガイドライン—，化学工学論文集，16-1，83/91 (1990)
- 7) 井上，中野，久保，松本，馬場：陽子シンクロトロン電磁石電源の繰返し運転における高精度制御，電気学会論文誌 C，100-7，234/240 (1980)
- 8) 井上，岩井，中野：プレイバックサーボ系の高精度制御，電気学会論文誌 C，101-4，89/96 (1981)
- 9) 高木貞治：代数学講義 改訂新版，55，共立出版 (1965)

付 録

1. (17) 式の計算

(14) 式の g_n において $n=0$ および $n=N$ とおくと，(14)，(10) 式より，

$$\begin{aligned} g_0 &= \sum_{m=1}^M q_m \hat{H}_m \\ &= b[H_F^T W H_F]^{-1} H_F^T W H_F b^T = 1 \\ g_N &= \sum_{m=1}^M q_m (\hat{H}_{N+m} - \hat{H}_N) = 0 \end{aligned}$$

となることに注意すれば，(16) 式より，

$$D(z) = 1 + \sum_{n=1}^N \{g_n - g_{n-1}\} z^{-n}$$

となり，(17) 式を得る。

2. (24) 式の計算

$q_d = Q = 1/\hat{H}_d = 1/\hat{h}_d$ および，(16)，(17) 式より，

$$\begin{aligned} C(z) &= \hat{H}_d^{-1} z^d \\ D(z) + QG_p(z) &= 1 + \frac{1}{\hat{H}_d} \sum_{n=1}^N (\hat{h}_{n+d} - \hat{h}_n) z^{-n} + \frac{1}{\hat{H}_d} G_p(z) \\ &= \frac{1}{\hat{H}_d} \left\{ (z^d - 1) \sum_{n=d}^N \hat{h}_n z^{-n} + G_p(z) \right\} \end{aligned}$$

したがって，(20)，(25) 式より (24) 式を得る。

3. 定理 1 の証明

$G_p(z)$ の安定性および (16) 式の $C(z)$ より，条件 1 は， $D(z) + QG_p(z)$ が安定多項式であることと等価である。

$S=1$ ， $c_0=0$ では，(14)，(17) 式より，

$$\begin{aligned} D(z) + QG_p(z) &= 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{w_m \hat{H}_m (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n)}{\sum_{j=1}^M w_j \hat{H}_j^2} z^{-n} + \frac{\sum_{j=M+1}^M w_j \hat{H}_j}{\sum_{j=M+1}^M w_j \hat{H}_j^2} \\ &\quad \times G_p(z) \end{aligned} \quad (A.1)$$

となり， $D(z) + QG_p(z) = 0$ より次式を得る。

$$G_D(z)P(z) + z^N G_{ND}(z) = 0$$

$$P(z) = \frac{\sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m \left\{ \hat{H}_m z^N + \sum_{n=1}^N (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n + h_n) z^{N-n} \right\}}{\sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m} \quad (\text{A.2})$$

まず, $N \geq N_B$, $w_m = 1/|\hat{H}_m|$ とし, M を大きくすることにより, 上式で定義される $P(z)$ が安定多項式となることを示す. $P(z)$ の z^n の係数を a_{N-n} とすると, 次式を得る.

$$|a_0| = \frac{1}{S_M} \sum_{m=M_1}^M |\hat{H}_m|, \quad S_M = \left| \sum_{m=M_1}^M \text{sign}(\hat{H}_m) \right|$$

$$\sum_{n=1}^N |a_n| \leq \frac{1}{S_M} \sum_{m=M_1}^M \left\{ \sum_{n=1}^N |\hat{h}_{n+m}| + \sum_{n=1}^N |h_n - \hat{h}_n| \right\} \quad (\text{A.3})$$

$\hat{H}_n = \hat{H}_N (n > N)$ に注意すれば, $M \rightarrow \infty$ では, (A.3) 式の $|a_0|$, S_M , および不等式の右辺は等差級数によって表わされ,

$$|a_0| \rightarrow |\hat{H}_N|, \quad (\text{A.3}) \text{ 不等式右辺} \rightarrow \sum_{n=1}^N |h_n - \hat{h}_n|$$

となる. したがって, (27) 式が成り立つならば, $M \geq M_A$ とすることにより $|a_0| > |a_1| + \dots + |a_N|$ となる M_A が必ず存在する. このとき, 補助定理より $P(z)$ は安定多項式となり, $G_D(z)P(z) = 0$ は, 原点を中心とする単位円からなる閉曲線 $\mathcal{C}_p$ 内部に $N + N_p$ 個の根をもつ.

ところで, (26) 式における h_n は $G_p(z)$ の重み系列であり, $G_{ND}(z)$ は $G_{ND}(z) = f_1 z^{N_p - N - 1} + f_2 z^{N_p - N - 2} + \dots + f_{N_p} z^{-N}$ で表わされ, $N \geq N_p$ では, その係数 f_n は次式で表わされる.

$$f_n = \sum_{j=n}^{N_p} a_j h_{N+n-j} \quad (1 \leq n \leq N_p)$$

上式より, $N \rightarrow \infty$ では $f_n \rightarrow 0$ となるため, $N \geq N_A \geq N_B$ とすることにより, $\mathcal{C}_p$ 上で $|G_D(z)P(z)| > |z^N G_{ND}(z)|$ となる N_A が必ず存在する. このとき, Rouché の定理⁹⁾ より, (A.2) 式は $\mathcal{C}_p$ 内部に $N + N_p$ 個のすべての根をもち, $D(z) + QG_p(z)$ は安定多項式となり, 条件 1 は成立する. **《補助定理》** 実係数方程式 $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ において, $|a_0| > |a_1| + \dots + |a_n|$ のとき, 全ての根は 1 より小さい.

単位円の閉曲線に対して Rouché の定理を適用することにより, 容易に証明される.

4. 定理 2 の証明

$S=1$, $c_0=0$, $M_1=M \geq N$ では, (A.1) 式, および, $D(z) + QG_p(z) = 0$ より,

$$G_D(z) \left\{ \hat{H}_N z^N + \sum_{n=1}^N (h_n - \hat{h}_n) z^{N-n} \right\} + z^N G_{ND}(z) = 0$$

を得, 定理 1 の証明と同様にして証明できる.

5. 定理 3 の証明

$S=1$ のとき, (10), (11), (14) 式より,

$$q_m = w_m \hat{H}_m / W_H \quad m = M_1, \dots, M$$

$$W_H = \sum_{j=M_1}^M w_j \hat{H}_j^2 + c_0 \quad (\text{A.4})$$

であるため,

$$1 = \sum_{m=M_1}^M q_m \hat{H}_m + c_0 / W_H$$

に注意すれば, (14), (16) 式より,

$$D(z) = (1 - z^{-1}) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) z^{-n} \right\}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) z^{-n}$$

$$- z^{-1} - \sum_{n=2}^N \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m-1} - \hat{H}_{n-1}) z^{-n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m} - \hat{H}_n) z^{-n}$$

$$- \sum_{n=1}^N \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{H}_{n+m-1} - \hat{H}_{n-1}) z^{-n} - \frac{c_0 z^{-1}}{W_H}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^N \sum_{m=M_1}^M q_m (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n) z^{-n} - \frac{c_0 z^{-1}}{W_H} \quad (\text{A.5})$$

(14), (A.4), (A.5) 式より,

$$D(z) + QG_p(z) =$$

$$1 + \frac{\sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m \left\{ \sum_{n=1}^N (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n) z^{-n} + G_p(z) \right\} - c_0 z^{-1}}{W_H}$$

$D(z) + QG_p(z) = 0$ より,

$$\sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m \left\{ \hat{H}_m + \sum_{n=1}^N (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n) z^{-n} + G_p(z) \right\} + c_0 (1 - z^{-1}) = 0 \quad (\text{A.6})$$

ここで, $F(z)$ を次式で定義し,

$$F(z) = \sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m \left\{ \hat{H}_m + \sum_{n=1}^N (\hat{h}_{n+m} - \hat{h}_n) z^{-n} + G_p(z) \right\}$$

さらに, $\epsilon = 1/c_0$, $p = z^{-1}$ と置き換えると, (A.6) 式は,

$$(1-p) + \epsilon F(p) = 0 \quad (\text{A.7})$$

となり, $p = z^{-1}$ より, この多項式の根が p 平面上の原点を中心とする単位円の外側にあれば, 条件 1 は成立する.

いま p 平面上で, 原点を中心とし 1 より大きい半径をもつ円からなる閉曲線 $\mathcal{C}_p$ を考えると, $1-p=0$ は, $\mathcal{C}_p$ の内部にただ一つの実根 $p=1$ をもつ. また, ϵ を零に近づければ, 多項式 $\epsilon F(p)$ の係数は零に近づくため, $\mathcal{C}_p$ 上で,

$$|1-p| > |\epsilon F(p)|$$

を成り立たせる ϵ すなわち c_0 が存在する. このとき, Rouché の定理より, (A.7) 式は $\mathcal{C}_p$ の内部にただ一つの実根 x をもち, $\epsilon \rightarrow 0$ ($c_0 \rightarrow \infty$) では $x=1$ である.

ここで, $p=x$ として (A.7) 式を ϵ で微分し, $\epsilon=0$, $x=1$ での微分係数を求めると,

$$\left. \frac{dx}{d\varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon=0 \\ x=1}} = F(1)$$

$$= \sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m \{ \hat{H}_m + \hat{H}_{N+m} - \hat{H}_m - \hat{H}_N \\ + G_p(1) \} \\ = \sum_{m=M_1}^M w_m \hat{H}_m G_p(1) > 0$$

となるため、 $\mathcal{C}_p$ 内の実根 x は実軸上を右から 1 に近づく。したがって、 $c_0 \geq c_A$ とすることにより条件 1 を成立させる c_A が必ず存在する。

[著者紹介]

中村 裕司 (正会員)

1985 年、早稲田大学大学院電気工学専攻修士課程修了。同年(株)安川電機入社。つくば研究所にて、ロボット・工作機械制御技術の研究開発に従事。システム制御情報学会の会員。