数理計画法とヒューリスティック法を組み合わせた動的配分計画技法の 上水道運用計画問題への適用

栗栖 宏 充*・西谷 卓 史*・館 仁 平**・安達 弘***

A Dynamic Distribution Method Composed of Mathematical Programming and Heuristic Method and Its Application to Water Management

Hiromitsu KURISU*, Takushi NISHIYA*, Nihei TACHI** and Hiromu ADACHI***

This paper describes a two-step method for a dynamic water distribution considering storage at reservoirs. The dynamic distribution is reduced to a minimum cost flow problem by an extended network model. At first a minimum cost flow which satisfies preservation conditions at each node and limit conditions at each arc is found very rapidly with a kind of split simplex method. This is because the method, which we call multi stage primal method, described by only integral operations. Next, the flow is modified along the loops which have zero cost and the minimum cost does not increase. This heuristic method make the flow satisfy conditions for convenient operation of pumps and vultes.

Waterworks bureaus in large cities want a good method for dynamic water distribution to make effective use of limited water resource. However, the scale of the problem is too large to solve under limited machine environment. Moreover, it is very difficult to get the solution that satisfies conditions for the operation of pumps and vultes. The proposed method can get over such trouble. Wide-area water management system applied this method has already realized in a certain large city and its merit has been verified.

Key Words : wide-area water management, dynamic distribution, multi stage primal method, heuristic method, minimum cost flow problem

1. 緒 言

大都市では水需要増加に応じた新規水源の獲得は難しく、多額の開発費を要するため、限られた水資源の有効利用を図っている。ところが、大規模で複雑化した水系全体を効率良く円滑にコントロールすることは、非常に困難な問題である。上水道の水系は、取水源から浄水場を経て配水池に至る導送水系統と、配水池および需要分岐点から需要家に至る配水系統で構成される。通常の広域水運用では、導送水系統上の各配水池や需要分岐点の

受けもつ給水区域の需要を予測し、管路流量および配水池貯水量を計画する。常に時間変動のある需要を満足する安定した供給を実現するには、配水池のもつ貯水機能を有効に利用した運用を行わねばならない。そのためには、水の動的な配分計画を行う必要があるが、問題規模が大きくなりすぎるため、従来は時間ごとに問題を区切って解いたり¹⁾、地域ごとの動的問題として、局所解を求めたり²⁾していた。本論文では、限られた計算機環境下で、実用可能な計算時間内に、大規模水系全体の動的配分計画を可能にする高速アルゴリズムを提案する。

上水道の導送水系統における動的配分問題は、拡張したネットワークモデルを導入することによって、最小費用流問題に帰着できる³⁾。最小費用流問題の代表的な方法としては、プライマル-デュアル法とプライマル法が挙げられる⁴⁾。前者は、流量が0である状態から始めて、最短路問題と最大流問題を交互に解くことによって流量を増やしていく方法であり、配水ブロック内の流量圧力配分を求める管網解析にも適用例がある⁵⁾。後者は、制約条件を満足する初期解を、費用が小さくなるように改善し

* (株)日立製作所システム開発研究所 川崎市麻生区
王禅寺 1099

** (株)日立製作所大みか工場 日立市大みか町 5-2-1

*** (株)日立製作所機電事業部 東京都千代田区神田駿河台
4-6

* Systems Development Lab., Hitachi, Ltd., Kawasaki

** Omika Works, Hitachi, Ltd., Hitachi

*** Industrial Computer & System Dept., Hitachi Ltd.,
Chiyoda-ku, Tokyo

(Received September 28, 1992)

(Revised May 6, 1993)

ていく方法である。本論文では動的な線形計画問題の高速アルゴリズムとして提案されている多段線形計画法⁶⁾を適用し、さらに最小費用流問題の性質を利用した整数演算化を施すことにより、これらの方法に比べて大幅な計算時間短縮を実現した。この解法は、プライマル法の一種であり、以後多段プライマル法と呼ぶ。

多段プライマル法では、各ノードにおける物質保存の条件と各アークにおける流量上下限のみを制約条件とした問題を解く。ところが現実には、バルブ操作に適した流量の平滑化や、ポンプの送水能力に応じた離散値流量の設定といった、運用の都合上要求される条件がある。多段プライマル法で得られる解は、これらの条件が満足されないため流量変動が激しくなるケースが多い。しかし、運用上要求される条件を制約条件に加えて、多段線形計画法を適用すると、問題が複雑化する上に整数演算化も不可能となり、大幅に計算量が増大する。

そこで、1度多段プライマル法で最小費用流を求めておき、費用の変化しない経路をヒューリスティックに探索しては修正することを反復することによって、最小費用を保持しつつ、運用上要求される条件をも満足させるように、解を改善していく手法を考案した。このように最適化を2段階にしたことが提案手法の特徴である。

以下、2章では拡張されたネットワークを導入することによって、動的問題を扱うために多層ネットワークモデルを導入し、配分計画問題をこのモデル上の最小費用流問題として定式化する。3章では、多段プライマル法を記し、4章では、ヒューリスティックな解の改善方法について述べる。5章では、提案手法とプライマル-デュアル法との比較を行いその有効性を示す。

2. 問題の定式化

本章では、上水道運用計画の概要を示し、提案手法の適用対象となる動的配分問題を明らかにする。つぎに、時間を表現できるように拡張された多層ネットワークモデルを導入し、動的配分問題を最小費用流問題に帰着する。

2.1 上水道運用計画問題

上水道における運用計画の目的は、常に変動する需要に対して安定した供給を実現することである。計画立案にあたっては、需要を満足させる送水量と需要変動を吸収できる適切な貯水量を確保することが要求される。かつ、浄化プロセスへの負荷や、ポンプおよびバルブ操作への負担軽減から、送水量の時間的変動は少ないほうが望ましい。一方、水源によって水質が異なるため、浄化費用には差異がある。また、自然流下の管路に比べてポンプによる圧送を必要とする管路では輸送費用がかかる。求めるべき計画値は、要求される条件を満足し、か

つ全体の費用を最小にする経済的運用を実現するものである。Fig. 1に、運用計画の手順を示す。需要予測では、天候気温などを指標として、各配水池ごとの需要量を時間単位で計算する。取水計画では、需要の総量に基づいて取水量と隣接都市などほかの団体との契約による分水量および受水量を決定する。配分計画では、これらを入力とし、各配水池の貯水量や各管路の流量を時間単位の計画値として出力する。運用計画の中核である配分計画が、本論文の提案する手法の適用対象である。

2.2 多層ネットワークモデル

導送水系統を構成する各管路の単位流量当たりの費用を設定すれば、配分計画はネットワーク上の最小費用流問題と考えられる。ところが、配水池には貯水機能があるため、このままでは通常のネットワークアルゴリズムを適用することができない。貯水機能には、需要変動の吸収、安全性の確保といった役割があり、これをいかに有効に活用するかが、運用計画の優劣を決定する鍵となる。貯水機能を考慮した動的な計画を行うため、導送水系統の空間的接続関係に加えて、貯水量の時間変化を表現できる多層ネットワークを導入する。Fig. 2にその一例を示す。各層は、単位時間ごとの離散的時刻それぞれに対して導送水系統の空間的接続関係を表わすネットワークである。ただし、取水源は取水上限量の日量を初期貯水量とした配水池とみなす。これら空間的ネットワークの中で、同一の配水池に対応するノード同士がアークで結ばれている。このアークによって各配水池の貯水量は、つぎの時刻の層への流量として表現される。ソース、シンクは、計画の対象となる全水量の仮想的な流出点と流入点である。ソースから初期時刻の各配水池へ向かうアークは初期貯水量を、最終時刻の各配水池からシンクへ向かうアークは、最終貯水量を表わす。また、各時刻各点での需要量は、その点から直接シンクへ向かうアークとして表現する。この多層ネットワークモデルにより、貯水量も流量と全く同等に考えることができる。

2.3 最小費用流問題への帰着

前節で述べた多層ネットワークを用いて、動的配分計画を最小費用流問題として定式化する。ここで、各層が有するノード数、すなわち配水池数と分岐点数の和を m 、各層内と次層へ向かうアーク数、すなわち管路数と配水池数の和を n とする。Fig. 2の例では $m=4$ 、 $n=7$ となる。また、層の枚数、すなわち計画する時間の長さを K とする。各アーク流量の費用係数は、浄化費用やポンプ運転費用を加味し、安全性や運用上の都合を反映させた相対的な費用係数を人為的に設定して与える。この係数は、ポンプの吐出流量や配水池の水位には関係しない定数である。また、同一の管路で時間の異なるアークの費用係数は、

原則として同一とする。ただし、整備などの特殊事情で著しく流量を制限する場合には、その時間帯の費用を高く設定する。このとき、時刻 t における各アークの費用係数を要素とする n 次元ベクトルを c^t 、各アークの流量を要素とする n 次元ベクトルを $x(t)$ とすると、総費用は、

$$z = \sum_{t=1}^K c^t x(t) \quad (1)$$

と表わされる。 $x(t)$ が満足すべき制約条件に、多層ネットワーク上の各ノードで成り立つべき物質収支の等式条件と、各アークで成り立つべき貯水量や流量の上下限に対する不等式がある。これらを列挙すると以下のように表わされる。

$$A_1 x(t-1) + A_2 x(t) = d^t \quad (t=1, \dots, K) \quad (2)$$

$$l^t \leq x(t) \leq h^t \quad (t=1, \dots, K) \quad (3)$$

となる。ただし、 A_1, A_2 は m 行 n 列の係数行列である。また、 d^t は時刻 t における各ノードでの需要量を要素と

する m 次元ベクトル、 l^t, h^t はそれぞれ各アークの流量の下限値、上限値を要素とする n 次元ベクトルである。 $x(0)$ 、すなわち初期貯水量および初期流量は、

$$x(0) = x^0 \quad (4)$$

として与える。ここで、 $x(t)$ ($1, \dots, K$) の各成分を並べてできるベクトルを x とし、ほかのベクトルについても同様の表現にすると、(1)~(4)式は以下ようになる。

$$z = cx \quad (5)$$

$$Ax = d \quad (6)$$

$$l \leq x \leq h \quad (7)$$

ただし、 A は次式に示されるような階段構造となり、その構成要素がすべて 0, ± 1 からなる疎行列である。

$$A = \begin{bmatrix} A_2 & & & \\ A_1 A_2 & & & \\ & \dots & & \\ & & A_1 A_2 & \\ & & & A_1 A_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

導送水システムの運用にあたっては、(6)、(7)式で示される条件のほかさらにつぎのような要求がある^(注1)。

- (i) バルブによる流量制御を行っている管路では、流量の時間変動が少ないほうが好ましい。また、切替はなるべく定められた時刻に行いたい。
- (ii) ポンプによる圧送をする管路では、設置されている各ポンプを送水能力のピーク状態で運転できるほうが効率的であるため、流量はポンプの最大吐出量の和に近いほうが望ましい。

これらの要求は、単一のノードやアークについての条件ではなく、最小費用流問題の制約条件としての定式化が困難である。要求(i)は、対象管路の流量の時間変動を、大きな費用係数をもつ新たな変数とした、線形計画法への定式化が考えられる。要求(ii)については、離散的流量の設定が要求されるため、同様な解決はできない。そこでまず、物質保存の条件(6)と変数上下限の条件(7)を満足する最小費用流を求める。つぎに、条件を崩さず、最小費用も維持できる範囲で、ポンプやバルブに関する条件を満足するように修正し、運用上の要求を最大限に満足する最小費用流を求めるという2段階の方式にする。第1段階の問題については、係数行列 A がネットワークの既約接続行列を表わすことになる。後述するようにこの行列については、整数演算化に都合が良い性

Fig. 1 Block diagram of scheduling water management

Fig. 2 Multi layer network

(注1) 24時間ごとの周期性を重視するならば、 $x(0) = x(24)$ を条件に加えるのが望ましい。しかし、設備点検などの一時的な異常の場合には、初期状態復帰を後日にもち越す運用も考えられるため、 $x(24)$ についてもほかの時刻と同様上下限の設定を運用計画者に委ねている。初期状態復帰の条件は、 $x(24)$ の許容範囲を初期値の近傍することで設定可能である。

質を有しており、非常に高速に逆行列演算を行うことが可能となる。2段階にすることによって、この利点を活かすことができ、限られた計算機環境下で大規模計画問題を実用可能な計算時間で解くことが可能となった。次章では、第1段階の問題の解法を示す。

3. 多段プライマル法を用いた費用最小化

前章で示した、(5)～(7)式の問題は、動的な線形計画問題であり、多段線形計画法が適用できる。この方法は、動的な線形計画問題における制約条件の係数行列が、(8)式のように小行列が階段状に並ぶ疎行列になることに着目し、基底分解法により基底逆行列計算を小行列の逆行列計算を逐次行う形式に表現することにより、記憶容量、計算量の削減をしたものである。これを最小費用流問題の解法と見ると、反復計算の各サイクルは、ネットワーク上で一巡の費用係数の和が負になる閉路の探索とその閉路上での流量変更に相当する。係数行列は、多層ネットワークの既約接続行列で、その要素はすべて、0, ± 1 である。この場合、基底逆行列の要素もまたすべて、0, ± 1 である。これらの性質を利用して、上記アルゴリズムで必要となる行列演算を、すべて和差算のみで行うようにしたものが、多段プライマル法である。以下、アルゴリズムを示す。

シンプレックス法は、以下の3段階の処理を基本的なサイクルとした反復計算である。

- 1) シンプレックス乗数の計算
- 2) 相対費用係数の計算
- 3) 最適性のチェックおよび基底の入れ替え

特に、処理1)における基底逆行列計算が大規模となる。

いま、一時刻のノード数を m 個、アーク数を n 個、計画する時間数を K とする。この時係数行列 A は、 mK 行 nK 列の行列で m 行 n 列の小行列 A_1, A_2 が階段状に並ぶ構成となっている。このとき、基底が各時間からちょうど m 個ずつで構成される特殊な状態にある基底行列 $\bar{B}$ を考える。すなわち、 $\bar{B}$ はつぎのような構造になっているものとする。

$$B = \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} & & & & \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \bar{B}_{K-1,K-2} \bar{B}_{K-1,K-1} \\ & & & & \bar{B}_{K,K-1} \bar{B}_{K,K} \end{bmatrix} \quad (9)$$

このとき、シンプレックス乗数の計算は、小行列 $\bar{B}_{t,t}$ ($t=1, \dots, K$) の逆行列計算を逐次行う形式に表現できる。一般の基底行列 B については、各時刻で基底となる変数の個数は、同じ個数である必要はなく必ずしも $\bar{B}$ の

ような構造にはならないが、できるだけ多くの列が B と共通となるような $\bar{B}$ を構成したとし、

$$F = \bar{B}^{-1}B \quad (10)$$

とすると、 F は適切に行と列を並べ替えることによってつぎのような構造に表現できる。

$$F = \begin{bmatrix} G & O \\ H & I \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 B と $\bar{B}$ で互いに異なる列の数を k として、 G は k 次の正方行列、 I は $(mK-k)$ 次の単位行列である。上記の表現を用いれば、 F の逆行列は以下のように計算できる。

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} G^{-1} & O \\ -HG^{-1} & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

以上の準備のもとに、処理1)のシンプレックス乗数の計算手順を示す。シンプレックス乗数を π 、基底変数に対応するコスト係数ベクトルを c_B とすると(10)式を用いて、

$$\begin{aligned} \pi &= c_B \bar{B}^{-1} \\ &= c_B F^{-1} \bar{B}^{-1} \\ &= c'_B \bar{B}^{-1} \end{aligned} \quad (13)$$

という関係を導ける。これより

$$\pi \bar{B} = c'_B \quad (14)$$

であるから、 $\bar{B}$ の構造を考慮して各小行列ごとに計算することにより、シンプレックス乗数について以下のような漸化式を得る。

$$\begin{aligned} \pi^K &= c'_B \bar{B}_{K,K}^{-1} \\ \pi^{K-1} &= (c'_B - \pi^K \bar{B}_{K,K-1}) \bar{B}_{K-1,K-1}^{-1} \\ &\dots \end{aligned} \quad (15)$$

$$\pi^1 = (c'_B - \pi^2 \bar{B}_{21}) \bar{B}_{11}^{-1}$$

ただし、 π^t および c'_B はそれぞれ、 π および c'_B の時刻 t に対応する成分からなる m 次元ベクトルである。上記の関係をを利用して、大規模な行列のシンプレックス乗数を、小行列の逆行列計算の繰返しに分解することができ、記憶容量、計算量ともに大きく改善することが可能となる。

つぎに、処理2)の相対費用係数の計算手順について述べる。相対費用係数ベクトルを λ とすると、

$$\lambda = c_N - \pi N \quad (16)$$

ここで、 N は非基底行列、 c_N は非基底変数に対応するコスト係数ベクトルである。 B と同様に N も大規模な行列であるため、 π_N の計算は容易ではない。そこで、最適化の対象とする変数を x_B と $x_N(t)$ に限定した問題を $t=1, \dots, K$ について、繰返し解くことによって計算量の削減を図る。限定された問題では、相対費用係数の計算は、 λ^t すなわち

$$\lambda^t = c'_N - (\pi^{t-1} N_{t,t-1} + \pi^t N_{t,t}) \quad (17)$$

のみ行えばよい。ただし $N_{t,t-1}$ 、 $N_{t,t}$ は N を(9)式と同

様に分割した小行列である。

こうして、計算した λ^t 、非基底変数 $x(t)$ および上下限 h^t, l^t のすべての要素 j について以下の関係を満たしていれば、時刻 t については最適化終了である。

$$(\lambda_j^t > 0 \text{ and } x_j(t) = l_j^t) \text{ or } (\lambda_j^t < 0 \text{ and } x_j(t) = h_j^t) \quad (18)$$

最適でない場合には、上記の条件を満たさない j について、

$$|\lambda_j^t| = \max |\lambda_j^t| \quad (19)$$

となる番号 s を選択する。 p_s^t を対応する列ベクトルとして、

$$x_B^{(NEW)} = x_B^{(OLD)} - \theta B^{-1} p_s^t \quad (20)$$

により、解の更新をする。ここで、 θ は更新された上記の変数のうちどれかが上下限に到達する最小の数である。最初に上下限に到達した変数が、基底の場合は、基底変数の入れ替えを行い、非基底の場合は再び最適化のチェックを行う。なお、(20)式における、 $B^{-1} p_s^t$ の計算もシンプレックス乗数と同様の計算により高速化ができる。以上述べたことをまとめると、Fig. 3 のフローチャートに示すようなアルゴリズムとなる。

ところで、上記のアルゴリズムは、基底行列が定まった状態、すなわち初期可能解が求まった状態を出発点としている。シンプレックス法の場合、初期可能解は人工変数を付加した問題を設定して求めるが、その際に問題がさらに大規模になってしまう。そこで、 $t=1$ のみの問題を解き、その解を $t=2$ の初期解として使用し、感度解析を応用して条件を満たさないものについてのみ人工変数を付加して $t=1, 2$ の問題を解く。この操作を繰り返して時間段数を増やしていき、その都度上記アルゴリズムを適用し、 $t=1, \dots, k$ の問題を解く。 $k=K$ となるまで行うことにより、人工変数の付加を最小限に抑えて問題を解くことができる。

一般に整数演算化は、計算誤差が増大するために限界があり、反復計算では誤差管理に非常な注意を要する。ところが、多段プライマル法では、完全に誤差を生じることなく整数同士の和差算のみで表現することができる。これは、計算機への大幅な負荷軽減を意味する。

4. ヒューリスティック法による平滑化处理

前述したように、多段プライマル法で得られる解は、非常に時間変動の激しい計画値となることが多く、浄化設備への負荷やバルブ操作を考えると現実的ではない。そこで、多段プライマル法で得られた解を、費用を維持しながら、2章に述べた運用上の条件(i), (ii)を満たすように改善することにより、現実運用に適した解を得る、第2段階のアルゴリズムについて述べる。

4.1 目標流量の設定と改善可能個所の選択

すでに得られている計画値を、第1段階での制約条件を満足し、かつ最小費用を保持したまま改善するには、後述するような費用係数の和が0となる多層ネットワーク上の閉路に修正量を加える操作を行えば良い。この操作を反復することによって、所望の解に近づけることができる。

まず、平滑化が必要とされる管路について、目標流量を設定する。目標流量は、最小費用流計算で得られた計画値の、対象管路における時間平均流量をもとに計算する。ただし、上水運用では、絶えず変化する需要を満足させる必要があるため、常に一定流量での運用は事実上不可能である。そこで、通常の運用計画では、流量切替の時刻を数回設定している。時間平均流量は、この標準切替時刻間ごとに求める。バルブにより流量制御をする管路については、時間平均流量を目標流量とする。ポンプで送水する管路については、時間平均流量に最も近く、稼働ポンプの最大吐出量の和に等しい流量を目標流量とし、かつ1日の総流量が元の計画値に最も近いようにする。

つぎに、多層ネットワーク上で、修正したい管路に対応するアークを含み一巡の費用係数の和が0の閉路を探索し、修正流量を加える。探索と修正を反復することによって、目標流量に計画値を近づける。ところが、上記のような閉路を、多層ネットワーク上からすべて探索するためには、大規模な問題では膨大な計算量を必要とする。そこで、修正箇所を二つのタイプの閉路に限定することによって計算時間の短縮を図った。

第1のタイプの閉路は、Fig. 4 に示すように、多層ネッ

Fig. 3 Flow diagram of multi stage primal method

トワーク上で異なる二つの時刻 i と j に対応する二つの層を通る閉路である。各層内は、平滑化対象管路に対応するアークを含み、配水池に対応するノードを両端とする同一の経路を通る。この経路は反対方向の管を含んでも良い。層間は、両端の配水池の貯水量に対応するアークを通る。このような閉路は、各層内の互いに対応するアークを反対方向に通過するので修正流量の費用は相殺される。ただし、対応するアークの費用係数が一致しない場合は相殺されないため修正対象から除外する。また、本論文で対象とした問題については、貯水池の優先順位は存在せず、貯水量の費用は等しいから、閉路を一巡する費用係数の和は 0 となる。この閉路上の修正は、ある配水池から配水池に至る経路の流量を時刻 i と j で互いに増減し、それに応じて両端の配水池の貯水量を変更することに相当する。

第2のタイプの閉路は、Fig. 5 に示すように、多層ネットワーク上である時刻 k に対応する層とシンクノードを通る閉路である。層内は、第1のタイプと同様に、平滑化対象管路に対応するアークを含み、配水池に対応するノードを両端とする経路をとる。両端のノードからシンクノードまでは、それぞれの配水池の貯水量に対応したアークをとる。ただし、層内の経路に沿った費用係数の和は 0 であるものに限る。経路がすべて自然流下系統で費用係数 0 の管で構成される場合と、経路が反対方向の管を含んでおり、それぞれの方向の費用係数の和が等しくなる場合がこれに相当する。この閉路上の修正は、ある配水池から配水池に至る費用のかからない経路の流量を時刻 k に修正し、それに応じて両端の配水池の貯水量を変更することに相当する。第1のタイプの閉路では、各管路での流量の時間配分が変わるのみで、総流量は変化しないのに対し、第2のタイプの閉路では、総流量が変化し、両端の配水池に送られる総供給量も変化する。

修正量の絶対値は、両方のタイプとも、閉路を構成する各アークの流量が上下限内を維持する範囲で、平滑化対象管路の流量が目標流量に近づく最大量である。閉路を一巡する方向とアークの方向が反対のときは、修正量の符号は反対となる。

上記二つのタイプの閉路は、多層ネットワークの一つの層、すなわち空間的なネットワーク上の経路を探索し、費用を計算することで得られるため、多層ネットワーク全ての探索よりも容易である。

4.2 修正順序

平滑化をする際に、その対象管路の優先順位を決定しておく。これは、平滑化されていたある管路の流量が、別の管路の平滑化をしたために変化してしまう可能性があるからである。優先順位は、運用計画者によって入力される

ものとして、この優先順に平滑化を行っていき、現在の平滑化対象管路よりも優先順位が高い管路を含む経路は修正しないようにする。また、平滑化対象管路は必ず配水池に直接流入するか流出する管に限る。ポンプやバルブは配水池の流入量や流出量を制御するものが大部分なので、この仮定は運用計画上大きな障害とはならない。

閉路の探索と修正を反復していく処理を、Fig. 6 に示す。まず全ての平滑化対象管路の目標流量を算出する。各対象管路について優先順に以下の処理をする。対象管路に直接接続している配水池を始点として、その管路を通り、ほかの配水池を終点とする経路を全て探索する。全ての配水池を終点とした場合についてそれぞれ経路を列挙し、各経路に修正処理をしていく。ただし、対象管路よりも優先順位の高い管路を含む経路は候補から除外する。各経路についてはまず、対象管路の流量が、目標流量に比べて最も下回っている時刻を i 、最も上回っている時刻を j として、多層ネットワーク上で第1のタイプの閉路に沿って、おのおののアークの流量を修正する。

Fig. 4 A sample of loop (type1)

Fig. 5 A sample of loop (type2)

これを、同じ経路上で時刻を変えて修正できなくなるまで繰り返す。さらに、経路に沿った費用係数の和が 0 の場合は、目標流量から最も離れている時刻を k として、第 2 のタイプの閉路に沿って同様に修正できなくなるまで繰り返す。全終点配水池の全経路について修正処理を行ってから、つぎの優先順位の管路流量を平滑化する。以上、全ての平滑化対象管路に対する一連の処理で、1 ヶ所でも修正があった場合は最初からの処理を繰り返す。すべての平滑化対象管路について全く修正箇所がなくなるまで反復する。

5. 評価

本論文での提案手法を、実在する大規模上水道水系でのデータを用いて検討する。最小費用流計算については、プライマル-デュアル法との比較を行う。さらに、平滑処理の効果について検討する。

Fig. 6 Smoothing process

5.1 多段プライマル法とプライマル-デュアル法の比較

Table 1 に、数値実験で用いた送水系統の規模を示す。これらは、いずれも同一の上水道水系で得られた実データであるが、小規模な管路を省略することによって規模を変えている。Table 2 に、それぞれのケースでの計算時間と実行に必要な記憶容量を示す。計算は、いずれもワークステーション 2050/32 E+(5.4MIPS)を使用した。記憶容量は、大きなものを必要とするが、計算速度での改善が、非常に大きい。近年のハードウェアの急速な性能向上を考慮すれば、記憶はほとんど問題にならない。

一般に、プライマル-デュアル法は、ノード数に比べて、アーク数が比較的多い網目状のネットワークに適している。これに対してプライマル法は、逆にノード数に比べてアーク数があまり多くない樹木状のネットワークに適している。Table 1 からわかるように、これらのネットワークは、いずれも樹木状に近いネットワークである。

さらに、プライマル-デュアル法では、多層ネットワークを通常の大規模ネットワークと同様に扱っているのに対し、多段プライマル法では、基底分解により多層ネットワークの各層の類似性を利用している。このように、ネットワークの幾何学的特徴を生かした点が、高速化に寄与したものと思われる。

5.2 平滑化の評価

2 章で述べたように、運用に際しては、浄水設備への負荷軽減、ポンプおよびバルブ運転の簡単化といった制約から、流量の時間変動が少ないということが望ましい。多段プライマル法から得られる計画値は、物質保存の条件のみを制約としており、費用関数も線形であることから、時間変動の極端に激しい計画値が算出されてしまう。

Fig. 7 と Fig. 8 に、ネットワーク B でのデータについて、平滑化処理前後の計画値の一部を示す。No. 25 は貯水池、No. 116 と No. 119 はこの貯水池に流入する管路でバルブによる操作をするもの、No. 121 は貯水池から流出する管路でポンプによる送水をするものである。平滑化の優先順位は No. 121, No. 116, No. 119 の順に高い。グラフ中に示された点線は、本論文で対象とした上水道で設定される標準切替時刻を表わしている。Fig. 8 に示す平滑化処理後の結果では、切替時刻以外では、流量変動が

減少し、貯水量が有効に利用されている。ただし、No. 119 は、16時から22時の流量変動が増加しているが、これは No. 116の平滑化が優先したためである。Table 3に、各ケースでの平滑化前後での、平滑指数を示す。ただし、平滑指数 SI は目標流量からの平均誤差で、つぎのよう

Table 1 Network scale

	reservoirs	pipes	layers	nodes	arcs
Network A	29	66	24	1440	2280
Network B	40	120	25	3000	4000

Table 2 Computational efficiency

		Proposed method (Multi-stage primal)	Primal-dual method
Network A	CPU time (sec)	40.0	1,533.1
	Required storage (k bytes)	199	128
Network B	CPU time (sec)	151.6	7,673.6
	Required storage (k bytes)	373	128

に定義した。

$$SI^2 = \frac{\sum_{j \in I} \sum_{t=1}^K (x_j(t) - g_j(t))^2}{|I|K} \quad (21)$$

ただし、 x 、 g はそれぞれ計画値と目標流量を表わす。 I は、平滑化対象管路に対応する変数の添字集合である。平滑指数が6割程度に減少し、平滑化处理が有効であることを示している。計算時間については、最小費用流計算の必要時間と合せても、プライマル-デュアル法より大きく削減されている。本手法によって、300万人規模のある大都市で、水の配分計算が毎日実際に行われている。

6. 結 言

多層ネットワークモデルを導入することにより、実在する水系について、その動的運用計画を最小費用流問題に帰着し、高速アルゴリズム多段プライマル法によって限られた計算機環境のもとでの求解を可能とした。従来は、記憶容量と計算速度の制限から各時間ごとに計画する方式であったが、本方式により配水池貯水量を有効に利用でき、様々な要因による需要変動に十分対応可能である柔軟な計画の立案が可能となった。また、数理計画法による解は極端な値をとることが多く、そのままでは

Fig. 7 A part of result (before smoothing)

Fig. 8 A part of result (after smoothing)

Table 3 Effect of smoothing process

	Number of target pipes	SI (before smoothing) (10 ³ m ³)	SI (after smoothing) (10 ³ m ³)	CPU time (sec)
Network A	18	2.17	1.40	12.0
Network B	20	1.77	1.11	14.7

運用に使えないケースが多かったが平滑化処理により、最適解を計算できるようになった。さらに、異常時の再計画についても十分可能な高速性を実現できた。

参考文献

- 1) 松本, 大成: 上水道トータルシステムの実績, 電気学会誌, 101-3, 191/195(1981)
- 2) 平林, 吉川, 中西: 計算機による送水制御の試行, 第 43 回全国水道研究発表会講演集, 584/586(1992)
- 3) 志水清隆: システム最適化理論, 392/397, コロナ社(1976)
- 4) 伊理正夫: ネットワーク理論, 85/101, 日課技連(1976)
- 5) 宮岡, 松本: 最小費用流計算による管路網解析法, 電気学会論文集 C, 56-11, 261/268(1980)
- 6) T. Nishiyama, M. Funabashi: Basis Factorization Method for Multistage Linear Programming Problem with an Application to Optimal Energy Plant Operation, IEEE Transactions on Automatic Control, AC-32-10, 851/857(1987)
- 7) M. Iri: Network Flow, Transportation and Scheduling: Theory and Algorithm, 28/74, Academic Press(1969)

《付録 多段プライマル法における 整数演算化可能性の証明》

グラフ理論を適用して、多段プライマル法における計算が和差算のみで表現できることの証明を行う。まず準備として、証明に用いるグラフ理論に関する用語の定義をし、必要となる定理を挙げておく。

A.1 準備

いま、 p 個からなるノードの集合と q 本からなるアークの集合をそれぞれ、

$$\Phi = \{\phi_1, \dots, \phi_p\} \quad (\text{A.1})$$

$$\Psi = \{\psi_1, \dots, \psi_q\} \quad (\text{A.2})$$

とし、それらで構成されるグラフを $G(\Phi, \Psi)$ とする。本章では、2.2 節で導入した多層ネットワークのうち、定数部分に相当するアーク、すなわち初期貯水量と需要量を表わすアークを取り除いてできるグラフを対象とする。よって、 Φ はソースノード以外の全ノードの集合で

$$p = mK + 1 \quad (\text{A.3})$$

Ψ は初期貯水量以外の貯水量と各時刻の管路流量に対応するアークの集合で

$$q = nK \quad (\text{A.4})$$

である。ノード-アーク形式の G の接続行列を A' とする。 A' は p 行 q 列である。 G は明らかに連結であるから、 Φ から一つ、ここではシンクノードを選び、 A' から

このノードに対応する行を除いてできる行列は、既約接続行列であり、係数行列 A に一致することは容易に確かめられる。

グラフ G に対して、二つのベクトル空間を以下のように定義する。いま、各ノードに整数を対応させてできる p 次元ベクトルをノードベクトル、そのベクトル空間を $V(\Phi)$ とする。同様に、各アークに整数を対応させてできる q 次元ベクトルをアークベクトル、そのベクトル空間を $V(\Psi)$ とする。 $\eta \in V(\Psi)$ について、非ゼロの成分に対応するアークの集合を $\text{car } \eta$ と表わすことにする。

特に、 $\text{car } \eta$ がカットセットであるとき、 η をカットセットベクトル、その成分が、0, ± 1 のみのとき、初等的カットセットベクトルと呼ぶ。さらに、互いに独立な最大のカットセットベクトルを各行とする行列をカットセット行列と呼ぶ。

グラフ理論では、以下のような定理が知られている。

《定理 1》 既約接続行列、初等的カットセット行列の任意の小行列の行列式は 0, ± 1 である。

《定理 2》 p 個のノードと q 本のアークからなる連結グラフにおいて、カットセットを含まない $(q-p+1)$ 個のアークは、補木である。

A.2 証明

グラフ理論に基づいて、3 章で述べたアルゴリズムが、すべて和差算で表現できることを示す。一般に、ある行列の任意の小行列の行列式が 0, ± 1 のときは、その逆行列の要素もまた、0, ± 1 であり、このような行列の積演算は、すべて和差算で表現できる。したがって、任意の基底行列 B 、補正行列 F がそのような行列であることを示せばよい。 B を構成する各列ベクトルは、係数行列 A のいずれかの列ベクトルに等しく、 F を構成する各列ベクトルは、基底形式の係数行列、すなわち $B^{-1}A$ のいずれかの列ベクトルに等しい。すでに述べたように、係数行列は既約接続行列に一致する。以下、基底形式の制約条件行列が、初等的カットセット行列になることを示す。これと、定理 1 より所期の主張が証明されたことになる。

まず、非基底変数に対応するアークの集合を Ω とするとき、 Ω が補木であることを示す。2.3 節の多段線形計画問題において、非基底変数の個数は、 $(nK-mK)$ 個であり、(A.3) 式、(A.4) 式より $q-p+1$ に等しいから、 Ω が、カットセットを含まないことを示せばよい。これは、任意のノード間に $\Psi-\Omega$ の要素のみで構成されるパスが存在することと同値である。この条件は、つぎのように表わされる。

第 i 成分を 1, 第 j 成分が -1 であるノードベクトル $e_{ij} \in V(\Phi)$ について

$$\text{car } \xi \subset \Psi - \Omega \quad (\text{A. 5})$$

であるアークベクトル $\xi \in V(\Psi)$ で

$$e_{ij} = A' \xi \quad (i=1, \dots, p, j=1, \dots, p) \quad (\text{A. 6})$$

が成り立つものが存在する。

いま、 $i > j$ としても、一般性は失われない。また、 ϕ_p がシンクノードであるとし、アークの番号を適当に付け替え、

$$\Psi - \Omega = \{\phi_1, \dots, \phi_{p-1}\} \quad (\text{A. 7})$$

$$\Psi = \{\phi_p, \dots, \phi_q\} \quad (\text{A. 8})$$

とする。 $j \neq p$ のときは、

$$\xi = \begin{pmatrix} B^{-1}(e_i - e_j) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A. 9})$$

とおけば、明らかに、(A. 6)式を満たす。ただし、 e_i は、第 i 成分が 1 である $(p-1)$ 次元単位ベクトルである。 $j = p$ のときは、

$$\xi = \begin{pmatrix} B^{-1}e_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A. 10})$$

とおけば、やはり (A. 6)式を満たす。なぜなら、 A' の第 i 行を、 a_i とすると、 A' が接続行列であることから、

$$a_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \quad (\text{A. 11})$$

が成り立つからである。 B^{-1} は 0, ± 1 のみで構成されるから (A. 8)式および (A. 9)式は $\xi \in V(\Psi)$ かつ $\text{car } \xi \subset \Psi - \Omega$ であることを示している。したがって、 Ω はカットセットを含まず、補木である。

さて、 I' を以下のような第 p 列が 0 ベクトルで、それ以外が単位ベクトルである $(p-1)$ 行 p 列の行列とする。

$$I' = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & \dots & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A. 12})$$

このとき、

$$\xi_i = e_i B^{-1} I' \in V(\emptyset) \quad (\text{A. 13})$$

$$\eta_i = e_i B^{-1} A' \in V(\Psi) \quad (\text{A. 14})$$

とすると、

$$A = I' A' \quad (\text{A. 15})$$

であり、

$$\begin{aligned} \eta_i &= e_i B^{-1} I' A' \\ &= \xi_i A' \end{aligned} \quad (\text{A. 16})$$

となるから、 η_i はカットセットベクトルである。

いま、 Ω は補木であるから、これに、 $\Psi - \Omega$ の任意の一つのアークを加えた集合には、必ずカットセットが存在する。すなわち

$$\text{car } \delta_i \subset \{\phi_i\} \cup \Omega \quad (\text{A. 17})$$

なる初等的カットセットベクトル δ_i が存在する。ここで、 η_i の第 i 成分、すなわち ϕ_i に対応する成分を η_{ii} とすると、 $\eta_i - \eta_{ii} \delta_i$ もまたカットセットベクトルである。ところが

$$\text{car } (\eta_i - \eta_{ii} \delta_i) \subset \Omega \quad (\text{A. 18})$$

であるから、

$$\eta_i - \eta_{ii} \delta_i = 0 \quad (\text{A. 19})$$

となる。

$$B^{-1}A = [I, B^{-1}N] \quad (\text{A. 20})$$

であるから、 $\eta_{ii} = 1$ 。したがって $\eta_i = \delta_i$ であり、 $B^{-1}A$ は、初等的カットセット行列である。 証明終

[著 者 紹 介]

栗 栖 宏 充 (正会員)

1988 年、京都大学大学院工学研究科修士課程修了。同年(株)日立製作所に入社。現在、同社システム開発研究所において、上下水道の運用計画システム、制御システムなどの研究に従事。システム制御情報学会の会員。

西 谷 卓 史 (正会員)

1973 年、京都大学工学部電気工学科卒業。同年(株)日立製作所に入社。現在、同社システム開発研究所において上下水道などの監視制御システム、プラント運転支援システム、FA システムなどの研究に従事。IEEE、システム制御情報学会、情報処理学会などの会員。

館 仁 平

1975 年、金沢大学工学部電気工学科卒業。同年(株)日立製作所入社。大みか工場配属。現在に至る。制御用計算機を用いた上下水道監視制御システムなどの設計に従事。電子情報通信学会の会員。

安 達 弘

1980 年、京都工芸繊維大学工学部電気工学科卒。同年(株)日立製作所機電事業部に入社。現在に至る。広域水道分野におけるニーズの調査分析、それを実現するシステム、特に、画像、知識処理などを応用した情報化システムの技術開発に従事。