一般化制御対象が無限遠点に零点をもつ場合の H_∞ 制御問題

宮崎 孝*・細江 繁幸*・章 菲菲**

H_∞ Control Problem for a Plant Possessing Zeros at Infinity

Takashi MIYAZAKI*, Shigeyuki HOSOE* and Feifei ZHANG**

In this paper we consider the H_∞ control problem for a plant possessing zeros at infinity. Namely it is not assumed that direct-feedthrough matrices are of full rank. A necessary and sufficient condition is derived for the solution to exist. It depends on the solvability of two generalized Riccati equations. An algorithm is proposed with which the generalized Riccati equations can be solved by reducing them into usual Riccati equations. A parametrization is given for all compensators that are not necessarily proper. Also the existence of the proper compensator is proved. We use the properties of J-lossless matrix and the descriptor form representation to solve the problem.

Key Words: H_∞ control, generalized Riccati equation, descriptor form system

1. はじめに

近年, H_∞ 制御問題について盛んに研究されている^{5),6)}. しかし, 従来の結果では一般化制御対象が無限遠点も含め虚軸上の零点をもたない仮定がおかれることが多い. この仮定は, 実システムに適用する場合, 満たされない場合もある. そのため, この条件をゆるめた研究がなされている. 文献 8) では, 1 ブロックについての研究がなされている. 文献 9) では, 制御対象に零点をキャンセルする補償器を置いて, それを含んだ系に対して問題を解くアプローチが提案されている. 文献 10) では, パラメータ ε を導入して解く方法が提案されている. しかし, 実際に適用する上でこの ε の導入は, あまりいい性質をもっていない. 文献 7) では, 本論文と同じ直達項のランク条件をゆるめた場合の必要十分条件としてリカッチ方程式に対応する行列不等式の可解性が求められている.

本論文では, 無限遠点に零点を有する場合, つまり直達項 D_{12}, D_{21} のランク条件をゆるめた場合の H_∞ 制御問題を考える. 問題の必要十分条件は, ある意味で拡張し

た二つの一般化リカッチ方程式の可解性で表わされることを示す. また, この一般化リカッチ方程式を通常のリカッチ方程式に帰着させ解くアルゴリズムも提案する. さらに, すべてのプロパーとは限らない補償器のパラメトリゼーションとプロパーな補償器の存在性も示す. 解の導出は, J-lossless 行列の性質に基づき, システムの表現方法としてディスクリプタ形式¹¹⁾を利用している.

本論文はつぎのように構成される. 2 章で問題の定式とその解を与える. 3 章では一般化リカッチ方程式の解法のアルゴリズムを提案する. 4 章では, 伝達関数での解の代数的構造, 解のディスクリプタ形式での表現と定理の証明, プロパーな補償器の存在性の順で示す.

本論文での記号の意味はつぎのとおりである.

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \text{ に対して,}$$

$$HM(M; S) := (M_{11}S + M_{12})(M_{21}S + M_{22})^{-1},$$

$$LFT(M; S) := M_{11} + M_{12}S(I - M_{22}S)^{-1}M_{21}.$$

$$\left[\begin{array}{c|c} -sE + A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sE - A)^{-1}B + D.$$

$$A^*(s) := A^*(-s), J := \text{diag}(I, -I).$$

$$\text{J-unitary 行列 } \Theta(s) : \Theta^*(s)J\Theta(s) = J.$$

$$\text{J-lossless 行列 } \Theta(s) : \text{J-unitary かつ}$$

$$\Theta^*(s)J\Theta(s) \leq J, \forall \text{Res} \geq 0.$$

$-sE + A$ が安定: $\det(-sE + A)$ のすべての有限零点が複素開左半平面に存在する.

* 名古屋大学工学部 名古屋千種区不老町
** 東京商船大学工学部 東京都江東区越中島 2-1-6
* Faculty of Engineering, Nagoya University, Nagoya
** Faculty of Engineering, Tokyo University of Mercantile Marine, Koto-ku, Tokyo
(Received May 17, 1993)
(Revised September 2, 1993)

有理関数行列 $G(s)$ が安定: $G(s)$ のすべての有限極が複素開左半平面に存在する。

RS: 安定な伝達関数の集合

RH_∞: 安定かつプロパーな伝達関数の集合

RL_∞: 虚軸上で有界な伝達関数の集合

BH_∞: 無限大ノルムが 1 より小さな **RH_∞** の部分集合

BL_∞: 無限大ノルムが 1 より小さな **RL_∞** の部分集合

2. H_{∞} 制御問題

2.1 問題の設定

つぎの制御対象について考える。

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z = C_1 x + D_{12} u \\ y = C_2 x + D_{21} w \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $x \in \mathbf{R}^n$ は状態変数, $w \in \mathbf{R}^{m_1}$ は外部入力, $u \in \mathbf{R}^{m_2}$ は制御入力, $z \in \mathbf{R}^{p_1}$ は被制御量, $y \in \mathbf{R}^{p_2}$ は観測出力である。これは最小実現系であるとする。

いくつかの仮定を設ける。

[仮定 1] (A, B_2, C_2) は可安定, 可検出である。

[仮定 2] $m_1 \geq p_2, p_1 \geq m_2$ である。

[仮定 3] つぎのランク条件を満たす。

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} -j\omega + A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} &= n + m_2, \forall \omega \in \mathbf{R}, \\ \text{rank} \begin{bmatrix} -j\omega + A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} &= n + p_2, \forall \omega \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

ここで, D_{12}, D_{21} に関してランク条件を設けないことに注意。一般性を失うことなく

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I_{q_1} & 0 \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{q_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおく。伝達関数では,

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} -sI + A & B_{11} & B_{12} & B_{22} \\ \hline C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & 0 & 0 & I_{q_1} \\ \hline C_{21} & 0 & I_{q_2} & 0 \\ C_{22} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

と表現される。

本論文で考える H_{∞} 問題はつぎのように定式化される。

H_{∞} 制御問題: Fig. 1 の閉ループ系が内部安定で, w から z までの伝達関数 $\Phi = \text{LFT}(G; K)$ がノルム条件

$$\|\Phi\|_{\infty} < 1 \quad (2)$$

を満たす補償器 K を求める。

2.2 問題の解

前節で設定した H_{∞} 問題に関して, 本論文の主結果で

Fig. 1 Closed loop control system

あるつぎの定理が得られる。

《定理》 仮定を満たす (1) 式で表わされる制御対象に対する H_{∞} 問題の解が存在するための必要十分条件は, つぎの一般化リカッチ方程式

$$\begin{cases} X\bar{A} + \bar{A}^t X + X\bar{P}X + \bar{Q} - V^t V = 0 \\ X\bar{B}_{22} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} Y\bar{A}^t + \bar{A}Y + Y\bar{P}Y + \bar{Q} - W^t W = 0 \\ Y\bar{C}_{22}^t = 0 \end{cases} \quad (4)$$

を満たす $-sE_{\bar{K}} + A_{\bar{K}}$ の安定化解 $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $V \in \mathbf{R}^{(m_2 - q_1) \times n}$ と $-sE_{\bar{K}} + A_{\bar{K}}$ の安定化解 $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $W \in \mathbf{R}^{(p_2 - q_2) \times n}$ が存在し,

$$\begin{bmatrix} X & XY \\ YX & Y \end{bmatrix} \geq 0, \det \begin{bmatrix} I & Y \\ X & I \end{bmatrix} \neq 0 \quad (5)$$

を満たすことである。このとき, すべての H_{∞} 問題の解は,

$$\{Q | \det(\bar{K}_{21}Q + \bar{K}_{22}) \neq 0, Q \in \text{BH}_{\infty}\} \quad (6)$$

に対して,

$$K = \text{HM}(\bar{K}; Q) \quad (7)$$

で表わされる。また, プロパーな補償器が存在する。ただし, 各行列は,

$$\bar{A} := A - B_{21}C_{12}, \bar{A} := A - B_{12}C_{21},$$

$$\bar{P} := B_1 B_1^t - B_{21} B_{21}^t, \bar{Q} := C_1^t C_1,$$

$$\bar{P} := C_1^t C_1 - C_{21}^t C_{21}, \bar{Q} := B_{11} B_{11}^t,$$

$$-sE_{\bar{K}} + A_{\bar{K}} := \begin{bmatrix} -sI + \bar{A} & B_{22} \\ V & 0 \end{bmatrix},$$

$$-sE_{\bar{K}} + A_{\bar{K}} := \begin{bmatrix} -sI - \bar{A} & W^t \\ C_{22} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{A} := \bar{A} + \bar{P}X + ZYV^t,$$

$$\bar{A} := \bar{A} + Y\bar{P} + W^t W X Z, Z := (I - YX)^{-1},$$

$$B_{t1} := B_{21} + YC_{12}^t, B_{s1} := B_{12} + YC_{21}^t,$$

$$C_{u1} := C_{12} + B_{21}^t X, C_{y1} := C_{21} + B_{12}^t X,$$

$$\bar{K} := \left[\begin{array}{cc|cc} -sI + \bar{A} - B_{22} & -ZB_{t1} & 0 & \\ \hline V & 0 & 0 & I_{m_2 - q_1} \\ C_{u1} & 0 & I_{q_1} & 0 \\ \hline 0 & I_{m_2 - q_1} & 0 & 0 \\ \hline -C_{y1} & 0 & 0 & 0 \\ -C_{22} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c|c} ZB_s, ZW^t & \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline -I_{q_2} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix}$$

と定義される。□

(注意1) $Q=0$ としたいわゆる central solution が問題の解となるとは限らない。(7)式の補償器はプロパーとは限らず、閉ループ系のプロパー性は保証されない。

(注意2) 文献7)で Stoorvogel は、本論文と同じ問題について考えている。そこでは、問題の可解性は、行列不等式の可解性として表わされ、補償器の存在性は、問題を後述の補題8を適用できる形に帰着させることにより示されている。

本論文では、まずプロパーとは限らない補償器のパラメトリゼーションを一般化リカッチ方程式の解を用いて、J-lossless 行列の性質に基づき求め、その後プロパーな解の存在性について議論する。

3. 一般化リカッチ方程式の解法

3.1 解法のアプローチ

前定理(3)式の一般化リカッチ方程式はディスクリプタシステムのスペクトル分解に用いられるもので、定理の証明にも関係する。この節ではこの一般化リカッチ方程式を解くためのアルゴリズムを提案する。アルゴリズムは通常のリカッチ方程式に帰着させて解くものである。

アルゴリズム

1. 初期値として、つぎの値をとる。

$$i := 1, n_i := n, b_i := m_2 - q_1,$$

$$\tilde{A}_i := \tilde{A}, \tilde{P}_i := \tilde{P}, \tilde{B}_i := B_{22}, \tilde{C}_i := C_{11}$$

$$2. \tilde{B}_{R_i} := [\tilde{B}_i^* \tilde{B}_i], \tilde{B}_{L_i} := \tilde{B}_{R_i}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^+ \\ \tilde{B}_i^* \end{bmatrix},$$

$$n_{i+1} := n_i - b_i, \tilde{B}_i^+ \in \mathbf{R}^{n_{i+1} \times n_i}, \tilde{B}_i^* \in \mathbf{R}^{b_i \times n_i}$$

とおく。 $\tilde{B}_i^* \in \mathbf{R}^{n_i \times n_{i+1}}$ は、 $\tilde{B}_{R_i}$ が正則となるよう選ぶ。直交行列 $\tilde{T}_{V_i} = [\tilde{T}_{V_i}^* \tilde{T}_{V_i}]$ で、

$$\tilde{T}_{V_i}^* \tilde{B}_i^* \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_i \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\tilde{A}_i (\in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}) > 0, b_{i+1} := b_i - r_i,$$

$$\tilde{T}_{V_i}^* \in \mathbf{R}^{b_i \times b_{i+1}}, \tilde{T}_{V_i} \in \mathbf{R}^{b_i \times r_i}$$

となるものを選ぶ。

3. 分岐

X.1 $\tilde{B}_i$ が縦長で $\tilde{B}_i^* \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i \tilde{B}_i > 0$ のとき ($0 < r_i = b_i < n_i$)

$$\tilde{A}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{B}_i^*, \tilde{C}_{i+1} := \tilde{C}_i \tilde{B}_i^*,$$

$$\tilde{P}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ (\tilde{P}_i - \tilde{A}_i \tilde{U}_i^* \tilde{U}_i \tilde{A}_i^*) \tilde{B}_i^*,$$

$$\tilde{B}_i^* := (I - \tilde{U}_i \tilde{U}_i^* \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i) \tilde{B}_i^*, \tilde{U}_i := \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i}^* \tilde{A}_i^{-\frac{1}{2}}$$

とおく。 $l := i+1$ として5へ進む。

X.2 $\tilde{B}_i$ が正方で $\tilde{B}_i^* \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i \tilde{B}_i > 0$ のとき ($0 < r_i = b_i = n_i$)

$$\tilde{U}_i := \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i}^* \tilde{A}_i^{-\frac{1}{2}} \text{とおく。} l := i+1 \text{ として4へ進む。}$$

X.3 $\tilde{C}_i \tilde{B}_i = 0$ のとき ($0 = r_i < b_i < n_i$)

$$\tilde{B}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i}^*, \tilde{A}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{B}_i^*,$$

$$\tilde{C}_{i+1} := \tilde{C}_i \tilde{B}_i^*, \tilde{P}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{P}_i \tilde{B}_i^*, \tilde{B}_i^* := \tilde{B}_i^*$$

とおく。 $i \leftarrow i+1$ として2を繰り返す。

X.4 その他 ($0 < r_i < b_i < n_i$)

$$\tilde{B}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i}^*, \tilde{A}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{B}_i^*,$$

$$\tilde{C}_{i+1} := \tilde{C}_i \tilde{B}_i^*, \tilde{P}_{i+1} := \tilde{B}_i^+ (\tilde{P}_i - \tilde{A}_i \tilde{U}_i^* \tilde{U}_i \tilde{A}_i^*) \tilde{B}_i^*,$$

$$\tilde{B}_i^* := (I - \tilde{U}_i \tilde{U}_i^* \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i) \tilde{B}_i^*, \tilde{U}_i := \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i}^* \tilde{A}_i^{-\frac{1}{2}}$$

とおく。 $i \leftarrow i+1$ として2を繰り返す。

4. 任意の直交行列 $\tilde{T}_{U_{l-1}} \in \mathbf{R}^{n_{l-1} \times n_{l-1}}$ を選び、

$$X_{l-1} := 0, V_{l-1} := \tilde{T}_{U_{l-1}} \tilde{U}_{l-1}$$

と定める。 $i \leftarrow l-1$ として7へ進む。

5. 通常のリカッチ方程式

$$X_l \tilde{A}_l + \tilde{A}_l^* X_l + X_l \tilde{P}_l X_l + \tilde{C}_l^* \tilde{C}_l = 0 \quad (9)$$

について、 $\tilde{A}_l + \tilde{P}_l X_l$ の安定化解 $X_l \geq 0$ を求める。

解が存在しないとき 一般化リカッチ方程式の解は存在しない。終了

6. 任意の直交行列 $\tilde{T}_{U_{l-1}} \in \mathbf{R}^{b_{l-1} \times b_{l-1}}$ を選び、

$$X_{l-1} := \tilde{B}_{l-1}^* X_l \tilde{B}_{l-1}, \tilde{V}_{l-1} := \tilde{A}_{l-1}^* X_{l-1} + \tilde{C}_{l-1}^* \tilde{C}_{l-1},$$

$$V_{l-1} := \tilde{T}_{U_{l-1}} [\tilde{U}_{l-1}^* \tilde{V}_{l-1} \tilde{B}_{l-1}^* \tilde{A}_{l-1}^* \tilde{T}_{U_{l-1}}^*] \tilde{B}_{L_{l-1}}$$

と定める。 $i \leftarrow l-1$ とする。

7. 分岐

$i=1$ のとき 一般化リカッチ方程式の一つの解は、 $X=X_i$,

$V=V_i$ となる。終了

その他 $i \leftarrow i-1$ とする。

8. 分岐

$\tilde{C}_i \tilde{B}_i = 0$ のとき 任意の直交行列 $\tilde{T}_{U_i} \in \mathbf{R}^{b_i \times b_i}$ を選び、つぎのように定める。

$$X_i := \tilde{B}_i^* X_{i+1} \tilde{B}_i^*, V_i := \tilde{T}_{U_i} [V_{i+1} \ 0] \tilde{B}_{L_i}$$

その他 任意の直交行列 $\tilde{T}_{U_i} \in \mathbf{R}^{b_i \times b_i}$ を選び、

$$X_i := \tilde{B}_i^* X_{i+1} \tilde{B}_i^*, \tilde{V}_i := \tilde{A}_i^* X_i + \tilde{C}_i^* \tilde{C}_i$$

$$V_i := \tilde{T}_{U_i} \begin{bmatrix} V_{i+1} & 0 \\ \tilde{U}_i^* \tilde{V}_i \tilde{B}_i^* \tilde{A}_i^* \tilde{T}_{U_i}^* \end{bmatrix} \tilde{B}_{L_i}$$

とする。

9. 7を繰り返す。□

(注意) 後述するが仮定3が成り立つとき、5または、4まで進むことは保証される。

3.2 アルゴリズムの証明

前節のアルゴリズムの証明をする。アルゴリズムが途中で止まらないことを示すため、つぎの補題について考

える。

【補題 1】 仮定 3 が成り立つならば、 $i=1, 2, \dots, l-1$ で、

$$-j\omega E_{Z_i} + A_{Z_i} := \begin{bmatrix} -j\omega I + \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ \tilde{C}_i & 0 \end{bmatrix}, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

は列フルランクである。

(証明) $i=1$ では仮定 3 より $-j\omega E_{Z_1} + A_{Z_1}$ は列フルランクとなる。 $i=k$ までに対して成立すると仮定する。

$i=1, 2, \dots, l-1$ で

$$\tilde{T}_{L_i} := \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^+ & 0 \\ \tilde{T}_{V_i}^+ \tilde{B}_i^+ & 0 \\ 0 & I_{m_2 - q_i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}_{R_i} := \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^+ \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{V_i} \end{bmatrix}$$

を定義すると

$$\text{rank } \tilde{T}_{L_i}(-sE_{Z_k} + A_{Z_k})\tilde{T}_{R_k}$$

$$= \text{rank} \begin{bmatrix} -sI + \tilde{A}_{k+1} & \tilde{B}_{k+1} & \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k \tilde{B}_k \tilde{T}_{V_k}^+ \\ \tilde{C}_{k+1} & 0 & \tilde{C}_k \tilde{B}_k \tilde{T}_{V_k}^+ \end{bmatrix} + b_k$$

となる。これにより、 $-j\omega E_{Z_{k+1}} + A_{Z_{k+1}}$ は列フルランクである。□

補題 1 により、 $\tilde{B}_i$ は列フルランクとなる。このことより、アルゴリズムが 5 または 4 へ進むことができる。

つぎに (3) 式の一般化リカッチ方程式を等価な一般化リカッチ方程式に変換していくことを考える。 $i=k$ で変数 X_k, V_k に対してつぎの方程式を解くことを考える。

$$\begin{cases} X_k \tilde{A}_k + \tilde{A}_k^+ X_k + X_k \tilde{P}_k X_k + \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k - V_k^+ V_k = 0 \\ X_k \tilde{B}_k = 0 \end{cases} \quad (10)$$

(10) 式より、次式が得られる。

$$\tilde{B}_k^+ (X_k \tilde{B}_{R_k} \tilde{B}_{L_k} \tilde{A}_k + \tilde{A}_k^+ \tilde{B}_{L_k} \tilde{B}_{R_k} X_k + X_k \tilde{B}_{R_k} \tilde{B}_{L_k} \tilde{P}_k \tilde{B}_{L_k} \tilde{B}_{R_k} X_k + \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k - V_k^+ V_k) \tilde{B}_{R_k} = 0.$$

これにより (10) 式は、つぎの等価式に変換される。

$$X_{k+1} \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k \tilde{B}_k^+ + \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k^+ \tilde{B}_k^+ X_{k+1} + \tilde{B}_k^+ \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k \tilde{B}_k^+ + X_{k+1} \tilde{B}_k^+ \tilde{P}_k \tilde{B}_k^+ X_{k+1} - \tilde{B}_k^+ V_k^+ V_k \tilde{B}_k^+ = 0, \quad (11)$$

$$X_{k+1} \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k \tilde{B}_k^+ + \tilde{B}_k^+ \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k \tilde{B}_k^+ - \tilde{B}_k^+ V_k^+ V_k \tilde{B}_k^+ = 0, \quad (12)$$

$$\tilde{B}_k^+ \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k \tilde{B}_k^+ - \tilde{B}_k^+ V_k^+ V_k \tilde{B}_k^+ = 0. \quad (13)$$

ここで、 X_{k+1} を次式で定義する。

$$X_{k+1} = \tilde{B}_k^+ X_k \tilde{B}_k^+. \quad (14)$$

まず、アルゴリズムの X.4 の場合を考える。(13) 式の一般解は、(8) 式よりは任意の直交行列 $\tilde{T}_{U_k} = [\tilde{T}_{U_k}^+ \tilde{T}_{U_k}^-]$ に対して、

$$V_k \tilde{B}_k^+ = [\tilde{T}_{U_k}^+ \tilde{T}_{U_k}^-] \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{A}_k^{1/2} \tilde{T}_{V_k}^+ \end{bmatrix} \quad (15)$$

で与えられる。よって、(12) 式に右から $\tilde{T}_{V_k}$ をかけると、

$$\tilde{T}_{U_k}^+ V_k \tilde{B}_k^+ = \tilde{U}_k (\tilde{A}_k^+ X_k + \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k) \tilde{B}_k^+, \quad (16)$$

$$X_{k+1} \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k \tilde{B}_k^+ \tilde{T}_{V_k}^+ = 0 \quad (17)$$

を得る。 $V_{k+1} = \tilde{T}_{U_k}^+ V_k \tilde{B}_k^+$ とおくと、(16) 式から

$$V_k \tilde{B}_k^+ = \tilde{T}_{U_k}^+ \begin{bmatrix} V_{k+1} \\ \tilde{U}_k (\tilde{A}_k^+ X_k + \tilde{C}_k^+ \tilde{C}_k) \tilde{B}_k^+ \end{bmatrix} \quad (18)$$

となり、これを (11) 式に代入すると

$$X_{k+1} \tilde{A}_{k+1} + \tilde{A}_{k+1}^+ X_{k+1} + X_{k+1} \tilde{P}_{k+1} X_{k+1} + \tilde{C}_{k+1}^+ \tilde{C}_{k+1} - V_{k+1}^+ V_{k+1} = 0 \quad (19)$$

となる。また、(17) 式より、

$$X_{k+1} \tilde{B}_{k+1} = 0 \quad (20)$$

がいえる。(14) 式より、

$$X_k = \tilde{B}_k^+ X_{k+1} \tilde{B}_k^+ \quad (21)$$

である。また、(15)、(18) 式をまとめて、

$$V_k = \tilde{T}_{U_k}^+ \begin{bmatrix} V_{k+1} & 0 \\ \tilde{U}_k \tilde{V}_k \tilde{B}_k^+ \tilde{A}_k^{1/2} \tilde{T}_{V_k}^+ \end{bmatrix} \tilde{B}_{L_k} \quad (22)$$

となる。

以上により (10) 式と等価な (19, 20, 21, 22) 式への変換が示せた。

アルゴリズムの 3 での X.1, X.2, X.3 の場合も同様に变换できることが示される。

つぎに、安定化解の性質について考察する。 $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して、行列

$$\tilde{R}_i := \tilde{B}_{i-1}^+ \tilde{R}_{i-1} \tilde{T}_{U_{i-1}}^+ (\tilde{R}_i := ZYV^t)$$

$$\tilde{A}_i := \tilde{A}_i + \tilde{P}_i X_i + \tilde{R}_i V_i$$

$$-sE_{X_i} + A_{X_i} := \begin{bmatrix} -sI + \tilde{A}_i & \tilde{B}_i \\ V_i & 0 \end{bmatrix}$$

を定義する。X.4 の場合、 $i=1, 2, \dots, l-2$ に対して

$$\tilde{T}_{R_i} := \begin{bmatrix} (I - \tilde{U}_i \tilde{U}_i^+ \tilde{V}_i) \tilde{B}_i^+ \tilde{B}_i \tilde{T}_{V_i} & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{V_i} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{T}_{L_i} := \begin{bmatrix} \tilde{B}_i^+ & -\tilde{B}_i^+ (\tilde{A}_i \tilde{U}_i + \tilde{R}_i \tilde{T}_{U_i}^+) \tilde{T}_{U_i}^+ \\ \tilde{T}_{V_i}^+ \tilde{B}_i^+ & 0 \\ \tilde{T}_{V_i}^+ \tilde{B}_i^+ \tilde{U}_i \tilde{U}_i^+ \tilde{V}_i & 0 \\ 0 & \tilde{T}_{U_i}^+ \end{bmatrix}$$

を定義すると、ある定数 c が存在し

$$\det \tilde{T}_{L_i}(-sE_{X_i} + A_{X_i}) \tilde{T}_{R_i} = c \det(-sE_{X_{k+1}} + A_{X_{k+1}})$$

となることが確認できる。

行列の定義に多少変更が必要であるが、X.1, X.2, X.3 の場合も同様のことを示せ、安定化解である性質が保存されることがわかる。

4. 定理の証明

4.1 解の構造

この節では補償器 $K(s)$ の代数的構造を与える。

有理関数行列 $G_{12}^+, G_{21}^+, G_{12}^-, G_{21}^-$ を

$$\begin{bmatrix} G_{12}^+ \\ G_{12}^- \end{bmatrix} G_{12} = \begin{bmatrix} I_{m_2} \\ 0_{(p_1 - m_2) \times m_2} \end{bmatrix},$$

$$G_{21} [G_{21}^+ \ G_{21}^-] = [I_{p_2} \ 0_{p_2 \times (m_1 - p_2)}]$$

により定義する。ただし、 $G_{12}^{\pm}(G_{21}^{\pm})$ は行(列)フルランクである。

まず、安定性を考えずノルム条件のみに注目すると、解の存在条件、代数的構造に関してつぎの補題が成立する。

[補題 2]^{3),4)} ノルム条件(2)式を満たす $K(s)$ が存在するための必要十分条件は

$$\Theta = [\Theta_1 \ \Theta_2 \ \Theta_3 \ \Theta_4] \\ = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & (G_{12}^{\pm})^* & \Theta_{31} & G_{11}G_{21}^{\pm} \\ \Theta_{12} & G_{11}^*(G_{12}^{\pm})^* & \Theta_{32} & G_{21}^{\pm} \end{bmatrix} \quad (23)$$

が J-unitary となるように $G_{12}^{\pm}$, $G_{21}^{\pm}$, Θ_{11} , Θ_{12} , Θ_{31} , Θ_{32} を選べることである。

このとき、任意の解は、

$$\{Q | \det(\tilde{K}_{21}Q + \tilde{K}_{22}) \neq 0, Q \in \mathbf{BL}_\infty\}$$

を用いて、 $K = \text{HM}(\tilde{K}; Q)$ と表わされる。ここで、

$$\tilde{K} := \begin{bmatrix} G_{12}^{\pm} & -G_{12}^{\pm}G_{11} \\ G_{22}G_{12}^{\pm} & G_{21} - G_{22}G_{12}^{\pm}G_{11} \end{bmatrix} [\Theta_1 \ \Theta_3] \\ = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} \\ \tilde{K}_{21} & \tilde{K}_{22} \end{bmatrix}$$

である。

証明は文献 3), 4) とほぼ同じであるので省略する。

内部安定性についてはつぎの補題が成り立つ。

[補題 3](証明は A.1) 補題 2 において Θ が J-lossless, $\tilde{K}$ と $\tilde{K}^{-1}$ が安定で、 $Q \in \mathbf{BH}_\infty$ ならば内部安定性がなりたつ。

(注意) ここでは、内部安定性として閉ループ系のプロパー性は含めない。

逆に、 Θ が J-lossless のとき $\Theta \in \mathbf{BH}_\infty$ ならば $Q \in \mathbf{BH}_\infty$ が、J-lossless 行列の性質からいえる。よって、 H_∞ 制御問題が可解のとき Θ が J-lossless で (23) 式の構造をもち、 $\tilde{K}$ と $\tilde{K}^{-1}$ が安定であるように構成できるならば、 H_∞ 制御問題の全ての解が (6) 式の Q を用いて、 $K = \text{HM}(\tilde{K}; Q)$ で表わされることがわかる。

4.2 定理の証明

前節の結果をふまえて定理の証明をする。十分性の証明としては、定理のリカッチ方程式の解を用いて補題 3 の条件を満たすよう Θ , $\tilde{K}$ を構成すればよい。

以下の議論では、一般化リカッチ方程式の解法のアルゴリズムが関係する。証明は X , V に関しての一般化リカッチ方程式の解法のアルゴリズムで X.1 の場合、X.2 の場合で多少異なるが同様の議論ができるので X.1 の場合のみ考えることにする。 Y , W に関してのアルゴリズムでも X.1 に相当する場合のみ考える。

Θ をつぎのように構成する。

$$\Theta = [\Theta_1 \ \Theta_2 \ \Theta_3 \ \Theta_4]$$

$$:= \begin{bmatrix} -sI + \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 \ \mathcal{B}_2 \ \mathcal{B}_3 \ \mathcal{B}_4 \\ C & \mathcal{D}_1 \ \mathcal{D}_2 \ \mathcal{D}_3 \ \mathcal{D}_4 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{B}_4 \\ C & \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 & \mathcal{D}_4 \end{bmatrix}$$

$$:= \begin{bmatrix} -\tilde{A}_m & 0 & & & \\ 0 & \tilde{A}_l & & & \\ -C_{11}\tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Y_m & -\tilde{C}_l + \tilde{C}_l \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l & & & \\ -C_{12}\tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Y_m & B_{21}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l & & & \\ -\tilde{B}_m^t + \tilde{B}_m^t \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Y_m & -B_{11}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l & & & \\ C_{21}\tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Y_m & -B_{12}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l & & & \\ \hline \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Z^t C_{u1}^t & \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Z^t V^t & 0 & & \\ -\tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t Z B_{s1} & -\tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t (\tilde{B}_l + ZYV^t) & B_2 & & \\ 0 & \tilde{D}_l & \underline{D}_2 & & \\ I_{q_1} & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ \hline -\tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Z^t C_{y1}^t & -\tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t (\tilde{C}_m^t + Z^t XW^t) & \underline{B}_4 & & \\ \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t Z B_{s1} & \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t ZW^t & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -D_m & -\underline{D}_4 & & \\ -I_{q_2} & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

と定義する。ここで、

$$\tilde{B}_l := \tilde{A} \tilde{S}_{l-1}, \tilde{C}_l := C_{11} \tilde{S}_{l-1} \tilde{A}^t, \tilde{D}_l := C_{11} \tilde{S}_{l-1},$$

$i=1, 2, \dots$ に対して、

$$\tilde{B}_{\tilde{H}_0} := \tilde{B}_l^t B_{l-1}^t \cdots \tilde{B}_1^t, (\tilde{B}_{\tilde{H}_0} := I)$$

$$\tilde{T}_{\tilde{H}_0} := \tilde{T}_{\tilde{H}_1}^t \tilde{T}_{\tilde{H}_2}^t \cdots \tilde{T}_{\tilde{H}_l}^t, (\tilde{T}_{\tilde{H}_0} := I)$$

$$\tilde{B}_{\tilde{H}_i}^u := \tilde{B}_l^u \tilde{B}_{l-1}^u \cdots \tilde{B}_i^u, (\tilde{B}_{\tilde{H}_0}^u := I)$$

$$\tilde{S}_i := \sum_{\substack{k=1 \\ C_k B_k \neq 0}}^i \tilde{B}_{\tilde{H}_{k-1}}^u \tilde{U}_k \tilde{U}_k^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{k-1}}^u,$$

$$\tilde{S}_i := \sum_{\substack{k=1 \\ C_k B_k \neq 0}}^i \tilde{B}_{\tilde{H}_{k-1}}^u \tilde{U}_k \tilde{T}_{\tilde{H}_k}^{t+} \tilde{T}_{\tilde{H}_{k-1}}^t$$

であり、 $\underline{B}_2 \in \mathbf{R}^{n \times (p_1 - m_2)}$, $\underline{D}_2 \in \mathbf{R}^{(p_1 - q_1) \times (p_1 - m_2)}$ は

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_l^t \\ \underline{D}_2^t \end{bmatrix} \underline{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_1 - m_2} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$X_l \underline{B}_2 - \tilde{C}_l^t \underline{D}_2 = 0 \quad (25)$$

を満たすものとする。

また、 $m, \tilde{A}_m, \tilde{B}_m, \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t, \tilde{B}_m^t, \tilde{C}_m^t, \tilde{D}_m, \underline{B}_4, \underline{D}_4$ はそれぞれ、 $l, \tilde{A}_l, \tilde{C}_l, \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t, \tilde{C}_l, \tilde{B}_l, \tilde{D}_l, \underline{B}_2, \underline{D}_2$ に対応して定まる行列である。

$\underline{B}_2$ に関する (25) 式の可解性は、(9) 式から

$$\eta^t X_l = 0 \Rightarrow \eta^t \tilde{C}_l^t = 0, \forall \eta \in \mathbf{R}^n$$

が示えることからいえる。

Θ に関連して、つぎの等式が成り立つ。

[補題 4] (証明は A.2)

$$\begin{aligned}\bar{D}^t \bar{D}_t &= I, \bar{C}^t \bar{D}_t = 0, \bar{C}^t \bar{D}_t = \bar{B}_t, \\ \bar{C}^t \bar{C}_t &= 0, \bar{C}^t \bar{C}_t = \bar{B}_t \bar{B}_t^t, \bar{A}_t = \bar{B}_{t-1} \bar{A} \bar{B}_{t-1}^t, \\ \bar{C}_t &= C_{11} \bar{B}_{t-1}^t, \bar{P}_t = \bar{B}_{t-1} (\bar{P} - \bar{C}^t \bar{C}_t) \bar{B}_{t-1}^t, \\ \bar{A}_t \bar{B}_{t-1} &= \bar{B}_{t-1} (\bar{A} - \bar{C}^t C_{11}), X \bar{S}_{t-1} = 0, \\ \bar{C}^t \bar{C}_t \bar{B}_{t-1} &= \bar{C}^t C_{11}, V \bar{S}_{t-1} = I_{m_2-q_1}, \\ \bar{C}^t \bar{D}_2 &= 0, \bar{B}_{t-1}^t X \bar{B}_2 - C_{11}^t \bar{D}_2 = 0\end{aligned}$$

である。

ここで、このように構成した Θ が補題 3 の条件を満たすことを示す。

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &:= \begin{bmatrix} Y_m & Y_m \bar{C}_{t-1}^t \bar{B}_{t-1}^t X_t \\ X_t \bar{B}_{t-1} \bar{C}_{t-1} Y_m & X_t \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &:= [\mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2 \quad \mathcal{B}_3 \quad \mathcal{B}_4], \\ \mathcal{D} &:= [\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2 \quad \mathcal{D}_3 \quad \mathcal{D}_4]\end{aligned}$$

と定義する。このとき、補題 4 の等式から、

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^t J \mathcal{D} &= J, \mathcal{D}^t J \mathcal{C} + \mathcal{B}^t \mathcal{P} = 0, \\ \mathcal{A}^t \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} + \mathcal{C}^t J \mathcal{C} &= 0\end{aligned}$$

を示すことができる。

J-lossless に関してつぎの補題がなりたつ。

[補題 5]¹²⁾

$$\left[\begin{array}{c|c} -sI + A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

が J-lossless であるための十分条件は、

$$D^t J D = J$$

であり、次式を満たす $\mathcal{P} \geq 0$ が存在することである。

$$A^t \mathcal{P} + \mathcal{P} A + C^t J C = 0, D^t J C + B^t \mathcal{P} = 0.$$

□

また、 $\mathcal{P}$ の半正定性に関して、つぎの補題が成り立つ。

[補題 6] (証明は A.3)

$$\left[\begin{array}{cc} Y & YX \\ XY & X \end{array} \right] \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \geq 0$$

が成立する。

□

したがって上の補題から、 Θ は J-lossless である。

$$\left[\begin{array}{c|c} -G_{11}^t & I_{m_1} \\ \hline -G_{12}^t & 0 \end{array} \right] \Theta_2 = 0$$

が補題 4 の関係式から示せる。同様のことが Θ_4 についてもいえる。よって、 Θ は (23) 式の構造をもつ。

つぎに、補題 2 から補償器を求める。まず、 G_{12} を

$$G_{12} := \left[\begin{array}{ccc|cc} -sI + \bar{A} & B_{22} & \bar{B}_2 & 0 & B_{21} \\ C_{11} & 0 & \bar{D}_2 & -I_{p_1-q_1} & 0 \\ -C_{12} & 0 & 0 & 0 & I_{q_1} \\ 0 & I_{m_2-q_1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

と定める。ここで、 $\bar{B}_2$ は任意の行列とする。

このとき、つぎの補題が成立する。

[補題 7] (証明は A.4) 任意の $\bar{B}_2$ に対し、

$$\det \begin{bmatrix} -sI + \bar{A} & B_{22} & \bar{B}_2 \\ C_{11} & 0 & \bar{D}_2 \end{bmatrix} \neq 0$$

が成り立ち、 G_{12} はレギュラである。

□

また、 $G_{12} G_{12} = I_{p_1}$ も確かめられる。

補題 2 にしたがって $\tilde{K}$ を計算すると、定理の $\tilde{K}$ を得る。一般化リカッチ方程式 (3) 式の安定化解の性質から $\tilde{K}$ の安定性がいえる。また、(4) 式の安定化解の性質から $\tilde{K}^{-1}$ の安定性も示すことができる。

以上より、 $\Theta, \tilde{K}$ が補題 3 の条件を満たすことが示せた。

定理の必要性の証明は、一般化リカッチ方程式のアルゴリズムで求まる等価な通常のリカッチ方程式について考えればよく、 D_{12}, D_{21} がフルランクの場合とほぼ同様であるので省略する。

4.3 プロパーな解の存在性

この節では H_∞ 問題のプロパーな解の存在性について考える。定理よりプロパーとは限らない補償器は $Q \in \mathbf{BH}_\infty$ に対して、 $\mathbf{HM}(\tilde{K}; Q)$ と表現できる。ここで、 Q を

$$Q = \mathbf{HM}(\tilde{K}_P; \tilde{Q}),$$

$$\tilde{K}_P := \left[\begin{array}{ccc|ccc} -sI + \tilde{A}_P & W^t & 0 & & & \\ C_{22} & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -sI + \tilde{A}_P & & & \\ \hline -C_{u_1} Z & 0 & 0 & & & \\ -VZ & 0 & -V & & & \\ -C_{y_1} Z & 0 & 0 & & & \\ 0 & I_{p_2-q_2} & 0 & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & -I_{p_2-q_2} & & \\ \hline -ZB_{t_1} - B_{22} ZB_{s_1} & ZB_{s_2} & & & & \\ \hline I_{q_1} & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & I_{q_2} & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right],$$

$$\tilde{A}_P := \tilde{A} - B_{22} C_{u_2}, \tilde{A}_P := \tilde{A} - B_{s_2} C_{22}$$

と選ぶ。ただし、 $C_{u_2} \in \mathbf{R}^{(m_2-q_1) \times n}$ は $\tilde{A}_P$ を $B_{s_2} \in \mathbf{R}^{n \times (p_2-q_2)}$ は $\tilde{A}_P$ をそれぞれ安定にする定数、 $\tilde{Q}$ はプロパーな有理関数行列とする。 $(\tilde{A}, B_{22}), (\tilde{A}^t, C_{22}^t)$ の可安定性は定理の一般化リカッチ方程式が安定化解をもつことよりいえる。このとき、

$$\tilde{K} \tilde{K}_P$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|cccc} -sI + \tilde{A}_P & -ZB_{t_1} - B_{22} ZB_{s_1} & ZB_{s_2} & & & \\ \hline C_{u_1} & I_{q_1} & 0 & 0 & 0 & \\ C_{u_2} & 0 & I_{m_2-q_1} & 0 & 0 & \\ -C_{y_1} & 0 & 0 & -I_{q_2} & 0 & \\ -C_{22} & 0 & 0 & 0 & -I_{p_2-q_2} & \end{array} \right]$$

であり, $\tilde{A}_P$ の安定性から $(\tilde{K}\tilde{K}_P)^{-1} \in \mathbf{BH}_\infty$ も示せ, $\tilde{K}\tilde{K}_P$ はユニモジュラとなる。したがって,

$$K = \mathbf{HM}(\tilde{K}; Q) = \mathbf{HM}(\tilde{K}\tilde{K}_P; \tilde{Q})$$

はプロパーである。ただし, K が H_∞ 問題の解であるためには, $Q = \mathbf{HM}(\tilde{K}_P; \tilde{Q}) \in \mathbf{BH}_\infty$ が必要となる。

ここで, $\mathbf{HM}(\tilde{K}_P; \tilde{Q})$ を $\mathbf{LFT}(\tilde{K}_P; \tilde{Q})$ に変換する。

$$\tilde{K}_P = \begin{bmatrix} -sI + \tilde{A}_P & 0 \\ ZB_{s1}C_{y1}Z - sI + \tilde{A}_P & \\ -C_{u1}Z & 0 \\ -VZ & -V \\ C_{y1}Z & 0 \\ C_{z2} & 0 \\ 0 & W^t & 0 & 0 \\ ZB_{s1} & 0 & -ZB_{t1} & -B_{z2} \\ 0 & 0 & I_{q1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_{q2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{HM}(\tilde{K}_P; \tilde{Q}) = \mathbf{LFT}(\tilde{K}_P; \tilde{Q})$$

である。

$Q \in \mathbf{BH}_\infty$ を示すために, $\tilde{K}_P$ を制御対象と見て, つぎの補題を適用する。

[補題 8]⁷⁾ システム (1) が $\forall \text{Res} \geq 0$ に対して,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -sI + A & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = n + \text{rank} [C_1 \ D_{12}],$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -sI + A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} = n + \text{rank} \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix}$$

を満たすならば, 内部安定性を満たし, $\Phi_k = \mathbf{LFT}(G; K_k)$ は真にプロパーとなり,

$$\|\Phi_k\|_\infty \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

となるプロパーな補償器の数列 $\{K_k\}$ が存在する。□

簡単な計算により, 補題 8 のランク条件は

$$-sE_{\tilde{K}} + A_{\tilde{K}}, -sE_{\tilde{K}} + A_{\tilde{K}}$$

の安定性に置き換えられる。これは, 一般化リカッチ方程式が安定化解をもつことより満たされるので, 補題 8 より $Q = \mathbf{HM}(\tilde{K}_P; \tilde{Q}) \in \mathbf{BH}_\infty$ となるプロパーな $\tilde{Q}$ が存在することがわかる。

5. 結 論

本論文では, 直達項 D_{12}, D_{21} のランク条件をゆるめた場合の H_∞ 制御問題の可解性に関する必要十分条件は, 二つの一般化リカッチ方程式の可解性で表わされることを示した。また, この一般化リカッチ方程式の解法のアルゴリズムも提案した。さらに, すべてのプロパーとは限らない補償器のパラメトリゼーションとプロパーな補償器の存在性も示した。

参 考 文 献

- 1) 宮崎, 細江, 章: 一般化 H_∞ 制御問題に対するプロパーな解の表現, 第 15 回 DST シンポジウム資料, 143/148 (1992)
- 2) 細江, 宮崎, 章, 内藤: H_∞ 制御問題に対する中間標準形記述による解法, 第 21 回制御理論シンポジウム資料, 91/96 (1992)
- 3) 細江繁幸: 伝達関数法による H_∞ 制御問題の解法, SICE 基礎講習会-H_∞ 制御入門, (1991)
- 4) 細江繁幸: H_∞ 制御問題の解法-伝達関数をベースにした接近法, 計測と制御, 29-2, 12/18 (1990)
- 5) 木村, 細江, ほか: ミニ特集ロバスト制御-H_∞ 制御を中心にして, 計測と制御, 29-2 (1990)
- 6) J. Doyle, K. Glover, P. P. Khargoneker and B. A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans., AC-34-8, 831/847 (1989)
- 7) A. A. Stoorvogel: The H_∞ Control Problem, Prentice Hall (1992)
- 8) S. Hara, T. Sugie and R. Kondo: H_∞ Control Problem with $j\omega$ -axis Zeros, Automatica, 28-1, 55/70 (1992)
- 9) B. R. Copeland and M. G. Safonov: Zero Cancelling Compensations for Singular Control Problems and their Application to the Inner-Outer Factorization Problem, International Journal of Robust and Non-linear Control, 2, 139/164 (1992)
- 10) M. Sampei, T. Mita and M. Nakamichi: An Algebraic Approach to H_∞ Output Feedback Control Problem, System Control Letters, 14, 13/24 (1990)
- 11) G. C. Verghese, B. C. Lévy and T. Kailath: A Generalized State-space for Singular Systems, IEEE Trans., AC-26-4, 811/830 (1981)
- 12) H. Kimura: Conjugation and Model Matching in H_∞ , International Journal of Control, 49, 269/307 (1989)

《A 付録》

A.1 補題 3 の証明

証明のための準備として, つぎの補題を用意する。

[補題 9]³⁾

$$\tilde{H} := \begin{bmatrix} G_{12}^+ & -G_{12}^+G_{11} \\ 0 & G_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_3 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \tilde{H}_{11} & \tilde{H}_{12} \\ \tilde{H}_{21} & \tilde{H}_{22} \end{bmatrix}$$

とおく。このとき, Θ が J-lossless, $\tilde{K}^{-1}$ が安定であるならば, $\tilde{H}_{22}^{-1}$ と $\tilde{H}_{22}^{-1}G_{22}$ が安定である。また,

$$\|\tilde{H}_{22}^{-1}\tilde{H}_{21}\|_\infty \leq 1$$

である。□

[補題 10] (証明略) Fig. 2 の閉ループ系を考える。有理解関数行列 P の RS 上の既約分解を

Fig. 2 Colosed loop control system

$$\begin{aligned} P &= N_c D_c^{-1} = \tilde{D}_c^{-1} \tilde{N}_c, \\ N_c N_c + D_c D_c &= I, \tilde{N}_c \tilde{N}_c + \tilde{D}_c \tilde{D}_c = I, \\ N_c, \tilde{N}_c, D_c, \tilde{D}_c, N_c, \tilde{N}_c D_c, \tilde{D}_c &\in \mathbf{RS} \end{aligned}$$

とする。このとき P を安定化するすべての補償器 C は

$$\begin{aligned} &\{-(\tilde{N}_c + D_c Q)(\tilde{D}_c - N_c Q)^{-1} \\ &\det(\tilde{D}_c - N_c Q) \neq 0, Q \in \mathbf{RS}\} \end{aligned}$$

により表わされる。□

多項式, $\mathbf{RH}_\infty$ 上の場合と同様である。閉ループ系のプロパティ性は保証されない。

以上の準備のもとで証明する。制御対象全体を安定化することと G_{22} を安定化することは等価なので G_{22} について考えれば良い。

定義より,

$$-G_{22} \tilde{K}_{11} + \tilde{K}_{21} = \tilde{I}_{21} \quad (26)$$

$$-G_{22} \tilde{K}_{12} + \tilde{K}_{22} = \tilde{I}_{22} \quad (27)$$

である。(27)式より,

$$-(\tilde{I}_{22}^{-1} G_{22}) \tilde{K}_{12} + \tilde{I}_{22}^{-1} \tilde{K}_{22} = I$$

である。仮定および補題 9 から, $\tilde{I}_{22}^{-1} G_{22}, \tilde{K}_{12}, \tilde{I}_{22}^{-1}, \tilde{K}_{22} \in \mathbf{RS}$ がいえるので, $(\tilde{I}_{22}^{-1})^{-1}(\tilde{I}_{22}^{-1} G_{22})$ は G_{22} の左既約分解である。

補題 9 から, $Q \in \mathbf{BH}_\infty$ に対して,

$$\|\tilde{I}_{22}^{-1} \tilde{I}_{21} Q\|_\infty < 1$$

である。したがって,

$$U := I + \tilde{I}_{22}^{-1} \tilde{I}_{21} Q \quad (28)$$

はユニモジュラである。(26), (27)式を(28)式に代入すると

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{22} + \tilde{K}_{21} Q - \tilde{K}_{22} U \\ = G_{22}(\tilde{K}_{12} + \tilde{K}_{11} Q - \tilde{K}_{12} U) \end{aligned} \quad (29)$$

ここで G_{22} の右既約分解を

$$G_{22} = N_c D_c^{-1}, N_c N_c + D_c D_c = I$$

とし, $(N_c, N_c, D_c, D_c) \in \mathbf{RS}$

$$R := D_c^{-1}(\tilde{K}_{12} + \tilde{K}_{11} Q - \tilde{K}_{12} U) U^{-1}$$

を定義し(29)式を整理すると

$$\tilde{K}_{11} Q + \tilde{K}_{12} = (\tilde{K}_{12} + D_c R) U$$

$$\tilde{K}_{21} Q + \tilde{K}_{22} = (\tilde{K}_{22} + N_c R) U$$

を得る。また,

$$\begin{aligned} R &= (N_c N_c + D_c D_c) R \\ &= N_c(\tilde{K}_{22} + \tilde{K}_{21} Q - \tilde{K}_{22} U) U^{-1} \\ &\quad + D_c(\tilde{K}_{12} + \tilde{K}_{11} Q - \tilde{K}_{12} U) U^{-1} \end{aligned}$$

であるから, $R \in \mathbf{RS}$ である。結局,

$$\begin{aligned} K &= (\tilde{K}_{11} Q + \tilde{K}_{12})(\tilde{K}_{21} Q + \tilde{K}_{22})^{-1} \\ &= (\tilde{K}_{12} + D_c R)(\tilde{K}_{22} + N_c R)^{-1} \end{aligned}$$

であるから, 補題 10 により $K = \mathbf{HM}(\tilde{K}; Q)$ は G_{22} の安定化補償器であることがわかる。

A.2 補題 4 の証明

定義から, $i=1, 2, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i &= \tilde{B}_{i-1}^{-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y, \tilde{B}_i = \tilde{B}_{i-1}^{-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-2}^y \tilde{B}_{i-1}^{-1} \tilde{V}_{i-1}^+, \\ \tilde{C}_i &= C_{11} \tilde{B}_{i-1}^y, \tilde{P}_i = \tilde{B}_{i-1}^{-1} (\tilde{P} - \tilde{A} \tilde{S}_{i-1}^{-1} \tilde{A}^t) \tilde{B}_{i-1}^+ \end{aligned}$$

である。 $\tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+ = I$ に注意すると

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l-1} \tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{l-2} \tilde{T}_{i-1}^+ (I - \tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+) \tilde{T}_{i-1}^+ + \tilde{T}_{i-1}^+ \tilde{T}_{i-1}^+ \\ &= I \end{aligned}$$

を得る。以下特にことわらないときは, $i=1, 2, \dots, l-1, j=1, 2, \dots, l-1$ に対して考えることにする。(8)式から, $\tilde{C}_i \tilde{B}_i \neq 0$ のとき,

$$\tilde{C}_i \tilde{B}_i \tilde{T}_i^+ = 0, \quad (30)$$

$$\tilde{B}_i^t \tilde{C}_i^t \tilde{C}_i \tilde{B}_i = \tilde{T}_i^+ \tilde{A}_i \tilde{T}_i^+ \quad (31)$$

である。 $\tilde{C}_j \tilde{B}_j \neq 0$ のとき, (30), (31)式から, $i > j$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_i = \tilde{B}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_j \tilde{B}_j^y \tilde{B}_{j+1}^y \cdots \tilde{B}_i^y \\ = (I - \tilde{T}_j^+ \tilde{T}_j^+) \tilde{B}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_j \tilde{B}_j^y \tilde{B}_{j+1}^y \cdots \tilde{B}_i^y \\ = 0 \end{aligned} \quad (32)$$

となる。これらの式から, $j > i$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_j^t C_{11} \tilde{S}_i = 0, \tilde{C}_j^t C_{11} \tilde{S}_i = 0, \tilde{S}_i C_{11} C_{11} \tilde{S}_i = \tilde{S}_i, \\ \tilde{S}_i \tilde{S}_i^t = \tilde{S}_i, \tilde{S}_i^t C_{11} C_{11} \tilde{S}_i = \tilde{S}_i, \tilde{S}_{i-1} C_{11} C_{11} \tilde{S}_{i-1} = I \end{aligned}$$

を得る。よって,

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i^t \tilde{D}_i = I, \tilde{C}_i^t \tilde{D}_i = 0, \tilde{C}_i^t \tilde{D}_i = \tilde{B}_i, \tilde{C}_i^t \tilde{C}_i = 0, \\ \tilde{C}_i^t \tilde{C}_i = \tilde{B}_i \tilde{B}_i^t, \tilde{P}_i = \tilde{B}_{i-1}^{-1} (\tilde{P} - \tilde{C}_i^t \tilde{C}_i) \tilde{B}_{i-1}^+ \end{aligned}$$

が成立することがわかる。

(32)式より, $i \geq j, i=2, 3, \dots, l, j=2, 3, \dots, l$ に対して,

$$\tilde{C}_i^t \tilde{C}_j = \tilde{C}_i^t \tilde{C}_{j-1} \tilde{B}_{j-1}^y = \tilde{C}_i^t \tilde{C}_{j-1} \tilde{B}_{j-1}^+$$

を得る。よって, $i=2, 3, \dots, l$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_i^t \tilde{C}_i \tilde{B}_{i-1} = \tilde{C}_i^t \tilde{C}_{i-1} \tilde{B}_{i-1}^+ \tilde{B}_{i-1}^+ \tilde{B}_{i-2} \\ = \tilde{C}_i^t \tilde{C}_{i-1} (I - \tilde{B}_{i-1}^{-1} \tilde{B}_{i-1}^+) \tilde{B}_{i-2} \\ = \tilde{C}_i^t \tilde{C}_{i-1} \tilde{B}_{i-2} \\ = \tilde{C}_i^t C_{11} \end{aligned} \quad (33)$$

である。(31), (33)式より, $i > j, i=2, 3, \dots, l-1, j=1, 2, \dots, l-2$ に対して, $\tilde{C}_j \tilde{B}_j \neq 0$ のとき,

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{i-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y \tilde{B}_{i-1}^+ \\ = \tilde{B}_{i-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y (I - \tilde{U}_j \tilde{U}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_j) (I - \tilde{B}_j \tilde{B}_j^+) \tilde{B}_{i-1}^+ \\ = \tilde{B}_{i-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y (I - \tilde{U}_j \tilde{U}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_j - \tilde{B}_j \tilde{T}_j^+ \tilde{T}_j^+ \tilde{B}_j^+) \tilde{B}_{i-1}^+ \\ = \tilde{B}_{i-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y (I - \tilde{U}_j \tilde{U}_j^t \tilde{C}_j^t \tilde{C}_j) \tilde{B}_{i-1}^+ \\ + \tilde{B}_j \tilde{B}_j^+ \cdots \tilde{B}_{j+1}^+ \tilde{B}_{j+1}^+ \tilde{T}_j^+ \tilde{B}_j^+ \tilde{B}_{i-1}^+ \\ = \tilde{B}_{i-1} \tilde{A} \tilde{B}_{i-1}^y (\tilde{B}_{i-1}^+ - \tilde{U}_j \tilde{U}_j^t \tilde{B}_{i-1}^+ C_{11} C_{11}) \end{aligned} \quad (34)$$

である。また, $j=l-1$ または $\tilde{C}_j \tilde{B}_j = 0$ のときも同様のことが示せ,

$$\tilde{A}_i \tilde{B}_{i-1} = \tilde{B}_{i-1} (\tilde{A} - \tilde{C}_i^t C_{11})$$

が成り立つ。 $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して,

$$X_i \tilde{B}_i^y = X_i \tilde{B}_i^+ = \tilde{B}_i^+ X_{i+1},$$

$$X\tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}\tilde{B}_i = \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_i \tilde{B}_i = 0$$

であるから, $X\tilde{S}_i = 0$ となる. $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して, $\tilde{C}_i \tilde{B}_i \neq 0$ のとき, (22)式より,

$$\begin{aligned} V_i \tilde{B}_i^y &= \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ V_{i+1} + \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{U}_i^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \tilde{A}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_i}^y X_{i+1}, \\ V \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \tilde{U}_i &= (\tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ V_i + \tilde{S}_{l-1}^t \tilde{A}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y X_i) \tilde{U}_i \\ &= \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \end{aligned}$$

である. したがって, $V\tilde{S}_{l-1} = I$ となる.

$i=1, 2, \dots, l-1$ に対して, $\tilde{B}_i \tilde{C}_i \neq 0$ のとき (32), (24) 式より次式が成り立つ.

$$\tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{U}_i^t \tilde{C}_i^t \underline{D}_2 = 0.$$

また, $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して, $\tilde{B}_i \tilde{C}_i \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{A}_i^{\frac{1}{2}} \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{U}_i^t \tilde{C}_i^t \underline{D}_2 \\ = (I - \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+ \tilde{T}_{\tilde{H}_i}^+) \tilde{B}_i^t \tilde{C}_i^t \underline{D}_2 \\ = \tilde{B}_i^t \tilde{C}_i^t \underline{D}_2 \end{aligned}$$

であるから, $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して,

$$\tilde{B}_i^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \tilde{C}_i^t \underline{D}_2 = 0 \quad (35)$$

である. よって, $\tilde{C}_i^t \underline{D}_2 = 0$ である. つぎの正則行列

$$\begin{aligned} B_{l-1}^e &:= [\tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-2}}^y \tilde{B}_{l-2} \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-3}}^y \tilde{B}_{l-2} \\ &\quad \dots \tilde{B}_l^y \tilde{B}_2 \tilde{B}_1] \end{aligned}$$

を定義する. (20), (35)式より

$$B_{l-1}^e (X \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \underline{B}_2 - \tilde{C}_l^t \underline{D}_2) = \begin{bmatrix} X_l \underline{B}_2 - \tilde{C}_l^t \underline{D}_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

である. (25)式より, 次式が成り立つ.

$$X \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^y \underline{B}_2 - \tilde{C}_l^t \underline{D}_2 = \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l \underline{B}_2 - \tilde{C}_l^t \underline{D}_2 = 0$$

A.3 補題6の証明

$i=1, 2, \dots, l-1$ に対して,

$$\tilde{B}_{\tilde{H}_i}^e := \tilde{B}_i^e \tilde{B}_2^e \dots \tilde{B}_i^e,$$

$$B_{l-1}^e := [\tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^e \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^e \tilde{B}_{l-1} \dots \tilde{B}_{\tilde{H}_1}^e \tilde{B}_2 \tilde{B}_1]$$

を定義する. C_{k-m-1}^e も B_{k-1}^e に対応して定まる.

このとき,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C_{k-m-1}^e & 0 \\ 0 & B_{k-1}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y & YX \\ XY & X \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{k-m-1}^e & 0 \\ 0 & B_{k-1}^e \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} Y_m & 0 & Y_m \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t X_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_l \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}}^t \tilde{C}_{\tilde{H}_{m-1}}^t Y_m & 0 & X_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が示せ, 次式が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} Y & YX \\ XY & X \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \mathcal{P} \geq 0.$$

A.4 補題7の証明

$i=1, 2, \dots, l-1$ に対して, 次式を定義する.

$$\begin{aligned} -sE_{e_i} + A_{e_i} \\ := \begin{bmatrix} -sI + \tilde{A}_i \tilde{B}_i & \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{A} \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-2}} \tilde{B}_{l-1} \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \\ \tilde{C}_i & 0 \\ \dots & \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{A} \tilde{B}_1 \tilde{T}_{\tilde{H}_1}^+ \\ \dots & \tilde{C}_1 \tilde{B}_1 \tilde{T}_{\tilde{H}_1}^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{A} \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-2}} \tilde{B}_{l-1} \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-1}}^+ \\ \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{B}_2 \\ \dots \\ \underline{D}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

c をある定数とすると, $i=1, 2, \dots, l-1$ に対して,

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{L_i} \det(-sE_{e_i} + A_{e_i}) \begin{bmatrix} \tilde{T}_{R_i} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ = c \det(-sE_{e_{i+1}} + A_{e_{i+1}}) \end{aligned}$$

が示される. また, 正則行列

$$\begin{aligned} T_{\tilde{U}_{l-1}}^e &:= [\tilde{T}_{\tilde{H}_{l-2}}^+ \tilde{T}_{\tilde{U}_{l-1}}^+ \tilde{A}_{l-1}^{-1/2} \tilde{T}_{\tilde{H}_{l-3}}^+ \tilde{T}_{\tilde{U}_{l-2}}^+ \tilde{A}_{l-2}^{-1/2} \\ &\quad \dots \tilde{T}_{\tilde{H}_1}^+ \tilde{T}_{\tilde{U}_2}^+ \tilde{A}_2^{-1/2} \tilde{T}_{\tilde{H}_1}^+ \tilde{A}_1^{-1/2}] \end{aligned}$$

を定義すると,

$$\begin{aligned} (-sE_{e_l} + A_{e_l}) \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & T_{\tilde{U}_{l-1}}^e & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -sI + \tilde{A}_l \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{B}_l \tilde{B}_{\tilde{H}_{l-1}} \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_l & \tilde{D}_l \\ \underline{D}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である. よって, $\det(-sE_{e_l} + A_{e_l}) \neq 0$ である.

[著者紹介]

宮崎 孝 (正会員)

1991年, 名古屋大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程前期修了. 93年同大学工学部電子機械工学科助手, 現在に至る. ロバスト制御の研究に従事.

細江 繁幸 (正会員)

(Vol. 30, No. 4 参照)

章 菲菲 (正会員)

1982年, 中国西北工業大学自動制御系卒業. 89年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了. 90年東京商船大学助手. 93年同大学助教授, 現在に至る. ロバスト制御の研究に従事(工学博士).