操作量の制約を考慮したタイムスケールを用いた位置決め制御の一方式

ビチャイ サエチャウ*・中野道雄*

A Position Control Using Time Scale with Considering Constraint of Control Signal

Saechout VICHAI* and Michio NAKANO*

The control signal in position control systems is inherently constrained by some limited value, such as the current or voltage driving a servo motor is limited by a maximum current or maximum voltage. To design the controller for achieving the desired performances, a fast tracking of set point change and a robustness with respect to the parameter variation, of system, it is necessary to ensure that the control signal satisfies the constraint value. A well-known time optimal Bang-Bang controller yields a shortest time response of a nominal system, however, the response is sensitive to the parameter variation. The other one, high gain control can make the system be robust and track the set point quickly beneath the unconstraint of control signal. Because the existing of constraint of control signal, its performance will be poor such as the overshoot response.

In this paper, we introduce a state feedback control law associated with time scale. The feedback law based on this time scale can assign the system to be the high gain mode if the time scale is sufficiently large. However, the large time scale causes the control signal over the limited value. This work proposes a control method which attempt to adjust the time scale suitably, in such a way that the control signal being the inner produce of state variable and feedback control law must satisfy the constraint condition at all time. Roughly mention, when the error is quite small, the time scale will be adjusted to the very large value and the system will be high gain nearly.

The study case of a position control system using proposed scheme is simulated by digital computer. The results show the fast tracking response of the control system and the robustness with respect to the parameter change. Finally, the comparison of proposed scheme and the Bang-Bang control, LQR control are shown also.

Key Words: position control, constrained control signal, high gain, time scale

1. はじめに

位置決め制御系では、制御対象を操作する操作量は有限で制約されることがほとんどである。たとえば、サーボモータの定格電圧や定格電流がこれにあたる。この際、制御対象の制御量が設定目標位置に高速で、滑らかに整定するという望ましい制御性能を得るためには、制御対象の操作量をこの有限の範囲内で適切に決めていかなければならない。

従来、操作量の有限値を積極的に利用する BANG-BANG 型の最短時間制御方式¹⁾がよく知られている。この方式では、制御対象のパラメータが不変かつ正確に既知であれば、目標値に高速で到達する優れた出力応答が得られるが、しかしパラメータが変動すると、かえって制御性能が劣化してしまうという問題がある²⁾。一方、ハイゲインの状態フィードバック制御方式^{3)~6)}では、制約を受けない操作量の下では出力応答は高速で、パラメータ変動にもつよいという優れた特徴をもっている。しかし、現実には操作量に制約が存在するため、ハイゲインと誤差との積による操作量がたいてい有限値に飽和し、

* 東京工業大学 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received July 28, 1993)
(Revised March 9, 1994)

ハイゲインフィードバック制御が達成できなくなり、むしろ制御性能が悪化するという問題がある。

これに対して、誤差および状態変数のフィードバック量に応じて、フィードバックゲインを操作量の制約の条件のもとで、最適なハイゲインに調整することを考える。本論文では、まずタイムスケールに基づくフィードバック則を導入し、このタイムスケールを操作量の制限を考慮した上で最適に調整し、つぎに、この最適なタイムスケールに基づくフィードバック則によって、操作量を決定するという位置決め制御方式を提案する。ここでのタイムスケールとは、出力応答に含まれる指数関数 $e^{-\mu t}$; $i=1, 2, \dots, n$ を $e^{-\mu_i t}$; $i=1, 2, \dots, n$ ($\mu > 0$) と置き換える μ のことである。この μ を十分に高く設定すれば、出力応答が高速で滑らかに目標位置へ整定し、制御系がハイゲインフィードバック制御系となる⁴⁾。しかし、上述のように操作量には制約があるから、この制約を考慮して μ の値を最適に調整しなければならない。本方式は、 μ に基づくフィードバックゲインと状態変数ベクトルとの積が制約条件を満たすためのタイムスケールの最大値を最適値 μ^* とし、この最適な μ^* を用いて制御系のフィードバック則を決定する。たとえば、状態変数または誤差が小さければ小さいほど、最適な μ^* が増加し、フィードバックゲインもよりハイゲインとなる。

本方式の有効性を検証するために、位置決め制御系のシミュレーションを行う。設定目標の位置に対する出力応答の結果により、出力の速応性およびパラメータ変動に対するロバスト性を示す。また、提案した制御方式を従来の最短時間制御方式および最適レギュレータ制御と比較し、本方式による優れた出力応答を示すことができる。

2. 原 理

2.1 問題設定

Fig. 1 は状態フィードバックによる位置決め制御系を示す。ここで、制御対象は伝達関数 $P(s)$ をもち、高さ u_m のリミッタ要素で入力 $u(t)$ が制約されている。すなわち、

Fig. 1 Block diagram of the position control system with a constraint of control signal

$$|u(t)| \leq u_m \quad (1)$$

このとき、制御対象の状態変数表現の数学モデルを以下のように表わす。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= [A + \Delta_A]x + [B + \Delta_B]u \\ y &= [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]x \end{aligned} \quad (2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \cdots \ x_n]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ b_0 \end{bmatrix} \\ \Delta_A &\in \Omega_A, \Delta_B \in \Omega_B \\ \Omega_A &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Delta_{a_0} & \Delta_{a_1} & \Delta_{a_2} & \cdots & \Delta_{a_{n-1}} \end{bmatrix} ; \xi_{Li} \leq \Delta_{a_i} \leq \xi_{Ri}, \right. \\ &\quad \left. i=0, 1, 2, \dots, n-1 \right\} \end{aligned}$$

$$\Omega_B = \{[0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ \Delta_{b_0}]^T; \beta_L \leq \Delta_{b_0} \leq \beta_R\}$$

ここで、 u は制御対象の操作量、 y は出力である。制御対象のパラメータ変動 Δ_A および Δ_B は Ω_A と Ω_B の集合に属する未知の定数行列である。 Ω_A と Ω_B は、パラメータ変動の範囲を示す既知の一定値 ξ_{Li} , ξ_{Ri} , β_L , β_R で、定義したパラメータ変動幅を表わす集合である。

コントローラは、ステップ状に変化する目標位置 $r(t)$ に対して、望ましい出力特性が得られるように設計しなければならない。すなわち、

(1) 目標位置に滑らかに高速で整定するという速応性

(2) 制御対象のパラメータ変動による影響を受けにくいというロバスト性

を実現するために、偏差 $e(t)$ と制御対象の状態変数のフィードバック量とから、操作量 $u(t)$ を適切に求めるにあたり、出力応答の速応性とロバスト性を考慮しなければならない。

なお、出力応答の整定時間はステップ状に変化する目標を印加した時点から、出力が目標値の $\pm 2\%$ の範囲に落ち着くまでの時間とする。

2.2 タイムスケールに基づくハイゲインフィードバック制御

まず、Fig. 1 の位置決め制御系におけるノミナルの制御対象に対して、状態フィードバックによる制御系の極配置を行うことによって、ステップ状の目標位置に対する出力応答を以下のように表わすことができる。

$$y(t) = \sum_{i=1}^n h_i e^{-p_i t} + w \quad (3)$$

ただし、 $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ は制御系の極で、 w は目標のステップ状の高さである。

本論文では、(3)式の出力応答に含まれる指数関数を以下のように変換することを考える。

$$e^{-p_i t} \rightarrow e^{-\mu p_i t}; \quad i=1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

ここで、 μ は正数である。以後、 μ をタイムスケールと呼ぶ。すなわち、これは制御系の極を $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ から $-\mu p_1, -\mu p_2, -\mu p_3, \dots, -\mu p_n$ に配置変えることを意味している。これによって、タイムスケール μ を大きくすれば、出力応答の整定時間が短くなるはずである。さて、制御系の極を $-\mu p_1, -\mu p_2, -\mu p_3, \dots, -\mu p_n$ に極配置するための状態フィードバック則および制御対象の操作量 $u(t)$ は以下のように求められる(付録 1 参照)。

$$u(t) = -F(\mu)x + [r(t) - y(t)]f_0(\mu) \quad (5)$$

ただし、

$$F(\mu) = \frac{1}{b_0} [-a_0, \mu^{n-1} \tilde{a}_1 - a_1, \mu^{n-2} \tilde{a}_2 - a_2, \dots, \mu \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1}] \quad (6)$$

$$f_0(\mu) = \frac{\mu^n \tilde{a}_0}{b_0} \quad (7)$$

$$s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \tilde{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_0 = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) \quad (8)$$

このとき、 μ の値を高くすることは、上の状態フィードバック則のゲイン $F(\mu)$ 、 $f_0(\mu)$ を高く上げることである。つまり、高い μ の値を設定した制御系がハイゲインフィードバック制御系(フィードバック量から操作量までのコントローラのゲインを適切に高く設定する制御系)とみなせる。いい替えると、ハイゲインフィードバックでは、制御系に高いタイムスケールをもたせることができる⁴⁾。フィードバック制御の分野では、ハイゲインフィードバック制御系の性能、すなわち目標値への追従性やパラメータ変動に対するロバスト性や外乱の抑制性などが優れていることがよく知られている⁵⁾。したがって、(5)式のタイムスケールを高くすることが望まれている。

一方、(6)、(7)式により、設定した μ の値が高すぎると、ハイゲインと状態変数との積である操作量が(1)式の制約を満たさなくなる。これによって、制御対象への操作量が制限値に飽和し、制御系のハイゲインフィードバックが達成できなくなるから、制御系の性能が劣化してしまう問題が生じる。そこで、(5)式の操作量が(1)式の制約条件を満たした上でタイムスケール μ を最適に決めることが必要となってくる。

2.3 操作量の制約を考慮した最適なタイムスケールの設計

まず、タイムスケール μ に基づく(5)式の操作量を制御対象の数学モデル(2)式に代入すると、次式のような全体の閉ループ系の状態方程式が得られる。

$$\dot{x} = [A + \Delta_A + [B + \Delta_B] \{-F(\mu) - f_0(\mu) \times [1, 0, 0, \dots, 0]\}]x + (B + \Delta_B)f_0(\mu)r(t) \quad (9)$$

一般性を失わなく、現時刻 t により上の状態変数方程式の解が以下のように得られる。

$$x(t') = e^{\tilde{A}(\mu, \Delta_A, \Delta_B)(t'-t)}x(t) + \int_t^{t'} e^{\tilde{A}(\mu, \Delta_A, \Delta_B)(t'-\tau)} \tilde{B}r(\tau) d\tau \quad (10)$$

ただし、

$$0 \leq t \leq t', x(0) = 0$$

$$\tilde{A}(\mu, \Delta_A, \Delta_B) = A + \Delta_A + [B + \Delta_B] \{-F(\mu) - f_0(\mu) \times [1, 0, 0, \dots, 0]\}$$

$$\tilde{B}(\mu) = (B + \Delta_B)f_0(\mu)$$

上の式の状態変数を(5)式に代入すると、時刻 t から無限大までの間の時間変数 t' とパラメータ変動成分 Δ_A, Δ_B とタイムスケール μ の関数で表わされる操作量が以下のように得られる。

$$u(\mu, \Delta_A, \Delta_B, t, t', x(t), e(t)) = [-F(\mu) - f_0(\mu)[1, 0, 0, \dots, 0]] \times [e^{\tilde{A}(\mu, \Delta_A, \Delta_B)(t'-t)}x(t) + \int_t^{t'} e^{\tilde{A}(\mu, \Delta_A, \Delta_B)(t'-\tau)} \tilde{B}(e(\tau) + x_1(\tau)) d\tau + f_0(\mu)(e(t') + x_1(t'))] \quad (11)$$

ただし、 $e(t) = r(t) - x_1(t)$

このとき、時間変数 t' および変動幅に属するすべてのパラメータ変動 Δ_A, Δ_B に対して、上式の操作量が(1)式の操作量の制限を満たすように、 μ の値を最適に決めなければならない。まず、時刻 t より、(11)式の操作量が(1)式の操作量の制限を満たすタイムスケール μ の値の集合を以下のように定義する。

$$S(x(t), e(t)) = \left\{ \mu; \max_{\substack{\Delta_A \in \Omega_A, \Delta_B \in \Omega_B, t \leq t' < \infty}} |u(\mu, \Delta_A, \Delta_B, t, t', x(t), e(t))| \leq u_m \right\} \quad (12)$$

つぎに、前節で述べたように、(1)式の制約を考慮してタイムスケール値を高く設定するのが望ましいから、そこで、上の集合からのタイムスケールの最大値を最適なタイムスケールとする。つまり、時刻 t における最適なタイムスケールは次式のように決定することになる。

$$\mu^*(x(t), e(t)) = \max S(x(t), e(t)) \quad (13)$$

さて、(13)式の $\mu^*(x(t), e(t))$ を求める際、(12)式の $S(x(t), e(t))$ が具体的な関数で表わせないから、すべて

Fig. 2 Flow-chart of evaluation for optimal time-scale

の時間変数 t に対して、 $\mu^*(x(t), e(t))$ を解析的に求めるのが困難である。そこで、 $\mu^*(x(t), e(t))$ を時間変数のサンプリング時点 t_i ; $i=1, 2, 3, \dots$ における $\mu^*(x(t_i), e(t_i))$ からなる階段状関数で次式のように近似し、このサンプリング時点 t_i の $\mu^*(x(t_i), e(t_i))$ を $\mu^*(x(t), e(t))$ の離散値として求めることを考える。

$$\mu^*(x(t), e(t)) \cong \sum_{i=0}^{\infty} \mu^*(x(t_i), e(t_i)) [1(t-t_i) - 1(t-t_{i+1})] \quad (14)$$

ただし、 $t_{i+1}-t_i$ はサンプリング時間と、 $1(t)$ は単一ステップ関数とする。

付録 2 の補題 1 により、 $\mu^*(x(t_i), e(t_i))$ の値が必ず前の $\mu^*(x(t_{i-1}), e(t_{i-1}))$ より以上の値になるから、ひとまず、 $\mu^*(x(t_i), e(t_i))$ の候補値を以下のように設定する。

$$\mu_{cad} = \mu^*(x(t_{i-1}), e(t_{i-1})) + \varepsilon \quad (15)$$

ここで、 ε は小正数である。

そして、この候補値により、次式の条件を満たす μ_{cad} の最大値、すなわち最適 $\mu^*(t_i)$ を Fig. 2 に示す繰返しのアルゴリズムで求める。

$$\max_{t_i \leq t' < \infty} |u(\mu_{cad}, \Delta^*_A, \Delta^*_B, t_i, t', x(t_i), e(t'))| \leq u_m \quad (16)$$

ただし、 Δ^*_A と Δ^*_B はすべての変動値 Δ_A と Δ_B に対して、以下の条件を満たすパラメータの最悪値とする(付録 3 参照)。

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_A \in \Delta_A, \Delta_B \in \Delta_B, t_i \leq t' < \infty} |u(\mu_{cad}, \Delta_A, \Delta_B, t_i, t', x(t_i), e(t'))| \\ \leq \max_{t_i \leq t' < \infty} |u(\mu_{cad}, \Delta^*_A, \Delta^*_B, t_i, t', x(t_i), e(t'))| \end{aligned} \quad (17)$$

よって、最適 $\mu^*(x(t_i), e(t_i))$ による操作量の最大値が最悪ケースに対して、以下のように制約値に近づくことになる。

$$\begin{aligned} \max_{t_i \leq t' < \infty} |u(\mu^*(x(t_i), e(t_i)), \Delta^*_A, \Delta^*_B, t_i, \\ t', x(t_i), e(t'))| \approx u_m \end{aligned} \quad (18)$$

Fig. 3 Proposed position control scheme, Feedback control law based on time-scale

以上の最適なタイムスケールを用いて、状態フィードバック則を調整する。また、本制御則による制御系の安定性については付録 2 の補題 2 で述べる。なお、本方式の位置決め制御系のブロック線図は Fig. 3 で示す。

3. シミュレーション

提案した手法の有効性を検証するために、与えられた目標の位置へ出力を高速で整定させることを目的とする高速位置決め制御系に適用する。まず、制御対象は、サーボモータおよび機械要素から構成したものとし、以下のような伝達関数で示す。

$$P(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s(Js + D)} \quad (19)$$

ここで、 J は負荷の慣性 (Kg m^2)、 D は負荷の粘性係数 (Kg m/s)、 K はトルク定数 (Nm/V) である。また、制御対象の入力あるいは操作量 $U(s)$ はサーボモータの入力電圧 (V)、出力 $Y(s)$ はモータの回転角度による位置 (cm) である。

この状態表現の可制御標準系は以下のように示す。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{D}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K}{J} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (20)$$

今回のシミュレーションに用いられる制御対象のパラメータのノミナル値および操作量の制約は、以下のように設定する。

$$\begin{aligned} D &= 3.37 \times 10^{-4} (\text{Kg m/s}), K = 2.0 \times 10^{-1} (\text{Nm/V}), \\ J &= 1.76 \times 10^{-4} (\text{Kg m}^2) \\ -10 \leq u(t) &\leq 10 (\text{V}) \end{aligned}$$

また、制御対象のパラメータ変動において、負荷の慣性はノミナル値に $\pm 50\%$ の範囲で変動することとする。これらのパラメータ値を (20) 式に代入し、制御対象の定量的な数学モデルを以下のように示す。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1.915 + \Delta a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1136.36 + \Delta b_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (21)$$

ただし,

$$-1.915 \leq \Delta a_1 \leq 0.638, -378.78 \leq \Delta b_0 \leq 1136.36$$

さて、フィードバックによる制御系の極 $-\mu^*(x(t), e(t))p_1$, $-\mu^*(x(t), e(t))p_2$ において、出力応答に振動モードがないように $-p_1$ と $-p_2$ を適当な負の実数で -0.575 と -2.7 とそれぞれ決定する。また、最適なタイムスケール $\mu^*(x(t), e(t))$ が前章で述べたアルゴリズムによって決まる。今回、アルゴリズムに用いた最悪値の $\Delta^* a_1$ と $\Delta^* b_0$ は 0.638 , -378.78 とそれぞれ決定し(付録3参照), 小正数 ε を 0.1 と設定した。そして、 $-p_1$ と $-p_2$ と $\mu^*(x(t), e(t))$ の値を(6), (7), (8)式に代入して、制御系のフィードバック則が以下のように表わされ

る。

$$\begin{aligned} F(\mu^*(x(t), e(t))) &= [0, 2.87 \times 10^{-3} \mu^*(x(t), \\ &\quad e(t)) - 1.685 \times 10^{-3}] \\ f_0(\mu^*(x(t), e(t))) &= 1.32 \times 10^{-3} [\mu^*(x(t), e(t))]^2 \end{aligned} \quad (22)$$

以上の状態フィードバック則のコントローラを用いる位置決め制御系をシミュレートする。まず、Fig. 4 はノミナルの制御対象に対するシミュレーション結果を示す。

(a) 図は与えられた高さ $10(\text{cm})$ のステップ目標位置に対する出力応答を示す。出力は $65(\text{ms})$ で目標位置へ滑らかに整定することがわかる(この $65(\text{ms})$ の整定時間と従来の Bang-Bang 型の最短時間制御方式の結果との比較を後述する)。(b) 図は、制御対象の操作量を示し、操作量は制約値の $\pm 10(\text{V})$ の内を常に満たしていることを確認することができる。(c) 図は、目標と出力との誤差が減衰するとこれに伴って、 $\mu^*(x(t), e(t))$ が増加することを示している。同図で、誤差が零に近づくと、理想の $\mu^*(x(t), e(t))$ が点線のように無限大へ増加していくが、しかしそのとき、誤差が十分に小さくなっているから、タイムスケールをさらに増加しても、出力応答の性能はあまり変化しない。さらに、実用上では、無限大のタイムスケールを実現することが困難であるため、最適なタイムスケールが 1000 に達成すると、この値にタイムスケールを保持して用いることとする。

さらに、制御対象のパラメータ、すなわち負荷の慣性の変動に対するシミュレーション結果は Fig. 5 で表わ

(a) Response $y(t)$ of system to a step reference input $r(t)$

(b) Control signal $u(t)$

(c) Optimal time-scale μ^* and error signal $e(t)$

Fig. 4 Simulation results (1)

(a) Responses of system with parameter variation

(b) Control signals

Fig. 5 Simulation results (2)

す。同図(a)では、ノミナル制御対象、 $J=0.176(\text{gm}^2)$ に対する出力応答と、負荷の慣性をノミナル値から+40%に変動させたときの制御対象、 $J=0.246(\text{gm}^2)$ に対する出力応答を示す。これによって、パラメータ変動時の出力応答の整定時間はノミナル時の出力応答より、わずか5(ms)で遅れであり、いずれの応答も目標位置に行き過ぎがなく整定させることができる。つまり、負荷の慣性が重くなると、制御対象の遅れも大きくなるため、操作量の制約のもとで出力応答は遅くなるが、誤差が十分に小さくなると、高いタイムスケール値に基づくハイゲインフィードバックによって、パラメータ変動による影響を抑えることができる。同図(b)では、いずれの操作量の値が制限値の範囲内に入っている。また、最悪ケースに近い+40%で負荷が変動したときの操作量の最大値、すなわち約45(ms)、75(ms)時点の値がノミナル時と比べて、制約値と近づくことがわかる。

なお、提案した方式と従来のBANG-BANG型最短時間制御方式との比較を述べる。上述の制御対象のパラメータの条件の下で、従来の方式を用いた制御系のシミュレーションを行った。その結果、Fig. 6(a)はノミナルの制御対象のときの出力応答と、負荷の慣性がノミナル値に+40%で変動したときの出力応答を示す。これらの結果と提案した方式の結果のFig. 5(a)を比較する。まず、ノミナルの制御対象、 $J=0.176(\text{gm}^2)$ に対して、両者は目標位置へ行き過ぎがなく整定し、提案した方式に

よる出力は最短時間制御の出力の整定時間55(ms)より10(ms)の遅れで目標位置に整定していることがわかる。一方、負荷の慣性の変動に対して、従来の方式の出力応答が行き過ぎと共に振動する応答と劣化することがみられ、この整定時間が110(ms)と大幅に延びてしまう。ちなみに、(b)図は(a)図の出力応答に応じた操作量を示す。さらに、本方式と線形状態フィードバックによる最適レギュレータ制御方式との比較を行い試みる。最適レギュレータ制御では、はじめの操作量がFig. 4(b)の操作量と同程度の飽和区間で有限値に飽和するように適切な2次形式評価関数を設定し、これを最小にするフィードバック則を求める。このフィードバック則による出力応答および操作量はFig. 7(a)と(b)でそれぞれ示す。ここで、Fig. 5(a)の本方式の出力応答をFig. 7(a)の出力応答と比べる。まず、速応性の面から、ノミナルの制御対象の場合の本方式の出力は本方式の出力応答の整定時間65 msと最適レギュレータ方式の出力の整定時間95 msとの差30 msほど、最適レギュレータ方式の出力より、目標位置へ速く整定していることになる。また、負荷が変動した場合にも、本方式の出力は両者の出力応答の整定時間の差 $91-70=21$ msで最適レギュレータ方式の出力より、速く整定していることがわかる。さらに、ロバスト性の面から、両者の出力応答は負荷の変動に対して、ほぼ同様に目標位置へ行き過ぎがなく滑らかに整定していることができる。

(a) Responses of Bang-Bang control with parameter variation

(b) Bang-Bang control signals

Fig. 6 Simulation results (3)

(a) Responses of LQR-optimal control with parameter variation

(b) LQR-optimal control signals

Fig. 7 Simulation results (4)

以上の結果から、提案した制御方式によって、出力応答が十分に改善されることが見られた。

4. おわりに

本論文では、操作量の制約を考慮した最適なタイムスケールに基づく状態フィードバック則を用いた位置決め制御系の一方式を提案した。本方式は、操作量の制約を考慮して、誤差および状態変数のフィードバック量に応じて、タイムスケールに基づくフィードバック則をできるだけハイゲインフィードバックに近づけて調整することである。提案した方式による位置決め制御系に適用したところ、速応性の面から、出力がステップ状の目標位置変化に対して十分な高速で行き過ぎがなく整定することができた。さらにロバスト性の面から、制御対象のパラメータが変動したときの出力応答も目標位置へ行き過ぎなく短時間で整定することができることを確認した。

なお、実用化にあたって、最適なタイムスケールを状態変数の空間に対して、あらかじめ計算しておくことによって、状態フィードバックゲインの調整を実時間で行うことができる。最後に、本論文のシミュレーションに協力頂いた本学学生馬場稜君に感謝の意を表す。

参 考 文 献

- 1) R. Bellman, I. Glicksberg and O. Gross: On the Bang-Bang Control Problem, *Quart. Appl. Math.*, **14**-1, 11/18 (1956)
- 2) M. Athans and P. L. Falb: *Optimal Control, An Introduction to the Theory and its Applications*, New York, McGraw-Hill (1966)
- 3) A. Jameson and R. E. O'Malley, Jr.: Cheap Control of the Time-Invariant Regulator, *Appl. Math. Opt.*, **1**-4, 337/354 (1975)
- 4) A. Saberi and P. Sannuti: Time-scale Structure Assignment in Linear Multivariable Systems Using High-gain Feedback, *Int. J. Control*, **49**-6, 2191/2213 (1989)
- 5) I. W. Horowitz: *Synthesis of Feedback Systems*, New York, Academic Press (1963)
- 6) 安藤, 鈴木: ハイゲインフィードバックレギュレータの設計, 計測自動制御学会論文集, **19**-5, 374/380 (1983)
- 7) Boyd & Barratt: *Linear Controller Design: Limits of Performance*, Prentice Hall (1991)
- 8) M. Vidyasagar: *Nonlinear Systems Analysis*, 2nd Edition, Prentice Hall (1993)

《付 録 1》

まず、以下のようなフィードバック則を与える。

$$u(t) = -F(\mu)x + [r(t) - y(t)]f_0(\mu) \quad (\text{付 1.1})$$

ただし、

$$F(\mu) = [f_1(\mu), f_2(\mu), \dots, f_n(\mu)]$$

これによって、制御系の極を $-\mu p_1, -\mu p_2, -\mu p_3, \dots, -\mu p_n$ に配置するために、制御系の特性多項方程式が以

下になる。

$$\begin{aligned} & s^n + (a_{n-1} + b_0 f_n(\mu))s^{n-1} + (a_{n-2} + b_0 f_{n-1}(\mu))s^{n-2} \\ & + \dots + (a_0 + b_0 f_1(\mu) + b_0 f_0(\mu)) \\ & = (s + \mu p_1)(s + \mu p_2)(s + \mu p_3) \dots (s + \mu p_n) \end{aligned} \quad (\text{付 1.2})$$

両辺に $1/\mu^n$ をかけると、以下のように展開できる。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{s}{\mu}\right)^n + \left(\frac{a_{n-1} + b_0 f_n(\mu)}{\mu}\right)\left(\frac{s}{\mu}\right)^{n-1} \\ & + \left(\frac{a_{n-2} + b_0 f_{n-1}(\mu)}{\mu^2}\right)\left(\frac{s}{\mu}\right)^{n-2} \\ & + \dots + \left(\frac{a_0 + b_0 f_1(\mu) + b_0 f_0(\mu)}{\mu^n}\right) \\ & = \left(\frac{s}{\mu} + p_1\right)\left(\frac{s}{\mu} + p_2\right)\left(\frac{s}{\mu} + p_3\right) \dots \left(\frac{s}{\mu} + p_n\right) \end{aligned} \quad (\text{付 1.3})$$

s/μ の変数に対して、両辺の多項方程式の係数をつりあうことによって、フィードバック制御則が以下のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} F(\mu) &= \frac{1}{b_0} [-a_0, \mu^{n-1} \tilde{a}_1 - a_1, \mu^{n-2} \tilde{a}_2 - a_2, \dots, \\ & \quad \mu \tilde{a}_{n-1} - a_{n-1}] \\ f_0(\mu) &= \frac{\mu^n \tilde{a}_0}{b_0} \end{aligned} \quad (\text{付 1.4})$$

ただし、

$$\begin{aligned} & s^n + \tilde{a}_{n-1} s^{n-1} + \tilde{a}_{n-2} s^{n-2} + \dots + \tilde{a}_0 \\ & = (s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n) \end{aligned}$$

そして、ステップ状に対する定常誤差が零になるために、 f_1 を $-a_0/b_0$ と設定する。つまり、これは誤差から出力までの伝達関数に積分要素をもたせることである。

《付 録 2》

〔補題 1〕 (13) 式の最適なタイムスケールが時間 t に対して、単調増加関数である。つまり、以下の不等方程式が成り立つ。

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \mu^*(x(t+h), e(t+h)) \geq \mu^*(x(t), e(t)) \quad (\text{付 2.1})$$

(証明) (12) 式によって、時刻 t と $t+h$ におけるタイムスケールの集合が以下のように示せる。

$$\begin{aligned} S(x(t), e(t)) &= \{\mu; \max_{\Delta_A \in \mathcal{Q}_A, \Delta_B \in \mathcal{Q}_B, t \leq t' < t+h} \\ & \quad |u(\mu, \Delta_A, \Delta_B, t, t', x(t), e(t))|, \\ & \quad \max_{\Delta_A \in \mathcal{Q}_A, \Delta_B \in \mathcal{Q}_B, t+h \leq t' < \infty} |u(\mu, \Delta_A, \Delta_B, \\ & \quad t+h, t', x(t+h), e(t+h))| \leq u_m\} \end{aligned} \quad (\text{付 2.2})$$

また、

$$\begin{aligned} & S(x(t+h), e(t+h)) \\ &= \{\mu; \max_{\Delta_A \in \mathcal{Q}_A, \Delta_B \in \mathcal{Q}_B, t+h \leq t' < \infty} |u(\mu, \Delta_A, \Delta_B, t+h, t', \end{aligned}$$

$$|x(t+h), e(t+h)| \leq u_m \quad (\text{付 2.3})$$

これによって、(付 2.2) の集合が (付 2.3) の集合に以下のように属していることがわかる。

$$\lim_{h \rightarrow 0+} S(x(t+h), e(t+h)) \supset S(x(t), e(t)) \quad (\text{付 2.4})$$

したがって、両集合の最大値により

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0+} \max[S(x(t+h), e(t+h))] \\ = \lim_{h \rightarrow 0+} \mu^*(x(t+h), e(t+h)) \\ \geq \mu^*(x(t), e(t)) = \max S(x(t), e(t)) \end{aligned} \quad (\text{付 2.5})$$

が成り立つ。

【補題 2】 $\mu^*(x(t), e(t))$ が時間 t に対して単調増加関数であれば、閉ループ制御系が安定である。

(証明) 一般性を失わなく、目標の設定値 $r(t)$ を零にして、閉ループ系の安定性を考える。次式では、閉ループ系の状態方程式を示す。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}(\mu^*(x(t), -x_1(t)), \Delta_A, \Delta_B)x(t) \\ ; x(0) &\in R^n \end{aligned} \quad (\text{付 2.6})$$

ここで、新たな変数を以下のように定義する。

$$\alpha(\gamma(t)) := \max_{\|x(t)\|=\gamma(t)} \mu^*(x(t), -x_1(t)) \quad (\text{付 2.7})$$

ただし、 $\|\cdot\|$ は、ユークリッドノルムで、 $\gamma(t)$ は正実数である。このとき、(12)式により以下の集合が成り立つ。

$$S(kx(t), -kx_1(t)) \subset S(x(t), -x_1(t)); k > 1 \quad (\text{付 2.8})$$

これによって、 k が十分に大きければ、(13)式のタイムスケールは次式のように左辺が右辺より十分に小さい(≪の記号)という条件を満たすことができる。

$$\mu^*(kx(t), -kx_1(t)) \ll \mu^*(x(t), -x_1(t)); k \gg 1 \quad (\text{付 2.9})$$

したがって、(付 2.7)式で定義した変数は以下の条件を成立する。

$$\alpha(\gamma_1(t)) \ll \alpha(\gamma_2(t)); \gamma_1(t) \gg \gamma_2(t) \quad (\text{付 2.10})$$

また、(付 2.7)式から μ^* と α との関係が以下のように成り立つ。

$$\mu^*(x(t), -x_1(t)) \leq \alpha(\|x(t)\|) \quad (\text{付 2.11})$$

さて、上式の $\mu^*(x(t), -x_1(t))$ が時間 t に対して単調増加関数であれば、本制御系が安定となることを示す。まず、 $\mu^*(x(t), -x_1(t))$ が時間 t に対して単調増加関数であるが、状態のノルムが以下のように発散すると仮定して矛盾を示す。

$$\|x(t)\| \gg \|x(t_1)\|; t_1 + T \leq t < \infty \quad (\text{付 2.12})$$

上のノルムを(付 2.10)式に代入する。

$$\alpha(\|x(t)\|) \ll \alpha(\|x(t_1)\|) \quad (\text{付 2.13})$$

$\|x(t)\|$ が大きく発散するにつれて上式の左辺の項が小さくなるので、以下の条件を満たすことが得られる。

$$\alpha(\|x(t)\|) < \mu^*(x(t_1), -x_1(t_1)) \leq \alpha(\|x(t_1)\|) \quad (\text{付 2.14})$$

(付 2.11)によって、次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mu^*(x(t), -x_1(t)) &\leq \alpha(\|x(t)\|) < \mu^*(x(t_1), -x_1(t_1)) \\ &\leq \alpha(\|x(t_1)\|) \end{aligned} \quad (\text{付 2.15})$$

上式では、 $\mu^*(x(t), -x_1(t))$ が時間 t に対して、非単調増加関数となっているから、仮定した $\mu^*(x(t), -x_1(t))$ が時間 t に対して単調増加関数と矛盾する。

《付 録 3》

この付録では、既知の変動幅内に属するすべてのパラメータ変動 Δ_A と Δ_B に対する最悪値 Δ^*_A と Δ^*_B を求める。パラメータ変動の最悪値 Δ^*_A と Δ^*_B は、(17)式により、以下の条件を満たすものである。

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_A \in \Delta_A, \Delta_B \in \Delta_B, t_i \leq t' < \infty} |u(\mu_{\text{cad}}, \Delta_A, \Delta_B, t_i, t', x(t_i), e(t_i))| \\ \leq \max_{t_i \leq t' < \infty} |u(\mu_{\text{cad}}, \Delta^*_A, \Delta^*_B, t_i, t', x(t_i), e(t_i))| \end{aligned} \quad (\text{付 3.1})$$

以上の最悪値を求める際、まず一般性を失わなくステップ状に変化する目標位置 $r(t)$ を零とし、(11)式から、操作量 u は以下のように表わせる。

$$\begin{aligned} u(\mu_{\text{cad}}, \Delta^*_A, \Delta^*_B, t_i, t', x(t_i), e(t_i)) \\ = \tilde{F}(\mu_{\text{cad}})e^{(A+\Delta^*_A+(B+\Delta^*_B)\tilde{F}(\mu_{\text{cad}}))(t'-t_i)}x(t_i) \end{aligned} \quad (\text{付 3.2})$$

ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mu_{\text{cad}}) &= -F(\mu_{\text{cad}}) - f_0(\mu_{\text{cad}})[1, 0, 0, \dots], \\ t_i &\leq t', x(t_i) \in R^n \end{aligned}$$

したがって、(付 3.1)が以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_A \in \Delta_A, \Delta_B \in \Delta_B, t_i \leq t' < \infty} |\tilde{F}(\mu_{\text{cad}})e^{(A+\Delta_A+(B+\Delta_B)\tilde{F}(\mu_{\text{cad}}))(t'-t_i)} \\ \times x(t_i)| \\ \leq \max_{t_i \leq t' < \infty} |\tilde{F}(\mu_{\text{cad}})e^{(A+\Delta^*_A+(B+\Delta^*_B)\tilde{F}(\mu_{\text{cad}}))(t'-t_i)} \\ \times x(t_i)| \end{aligned} \quad (\text{付 3.3})$$

このとき、両辺の値は、 $x(t_i)$ に対するピークステップノルム(Peak-Step Norm)⁷⁾値となっているから、上の条件を満たす最悪値を得るためには、 $A+\Delta^*_A+(B+\Delta^*_B)F(\mu_{\text{cad}})$ の固有値における虚数部の値(振動モード)をパラメータ変動幅内に属するすべての $A+\Delta_A+(B+\Delta_B)F(\mu_{\text{cad}})$ の振動モードより、十分に大きく設定すれば良い。したがって、パラメータ変動の最悪値は以下の条件で決定することとなる。

$$\begin{aligned} \max_{\Delta_A \in \Delta_A, \Delta_B \in \Delta_B} |\text{Im } \lambda_i[A+\Delta_A+(B+\Delta_B)\tilde{F}(\mu_{\text{cad}})]| \\ \leq |\text{Im } \lambda_i[A+\Delta^*_A+(B+\Delta^*_B)\tilde{F}(\mu_{\text{cad}})]| \\ ; i=1, 2, 3, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{付 3.4})$$

ただし、 $\text{Im } \lambda[\cdot]$ は行列の固有値の虚数部の値である。

[著 者 紹 介]

Vichai SAECHOUT (正会員)

1984 年, King Mongkut's Institute of Technology North Bangkok 電気工学科卒業. 90 年東京工業大学大学院博士課程制御工学専攻修了. 同年(株)東芝入社. 91 年東京工業大学工学部助手, 現在に至る. モーションコントロール, パワーエレクトロニクス系の制御に従事. 電気学会, IEEE などの会員(工学博士).

中 野 道 雄 (正会員)

1968 年, 東京工業大学大学院博士課程電気工学専攻修了. 同年同大学工学部助手, 86 年教授, 現在に至る. 74 年より高エネルギー物理学研究所伴任(工学博士). 計算機制御, 計測制御機器に関する研究に従事. 電気学会, システム制御情報学会, 日本シミュレーション学会, IEEE などの会員.