状態フィードバックによる線形多変数非最小位相系の 広義の逆インタラクタ化[†]

武 藤 康 彦*

Inverted Interactorizing of Linear Multivariable Non-Minimum Phase Systems by the State Feedback

Yasuhiko MUTOH*

The inverted interactorizing is the basic technique for the model matching control, the adaptive control, the decoupling control, the disturbance decoupling control, etc. However, this technique can be applied only to the minimum phase plant because all zeros of the plant are cancelled by the closed loop poles. This is due to the fact that the interactor matrix corresponds to zeros at infinity of the plant. In this paper, the generalized inverted interactorizing of linear multivariable non-minimum phase plants by the state feedback is concerned. This is the problem to find the state feedback which makes the closed loop transfer matrix coincide with the inverse of the generalized interactor which corresponds to not only zeros at infinity but also finite unstable zeros of the plant. Since it can be shown that this state feedback cancels only stable zeros of the plant, the closed loop system is internally stable. If the plant is a minimum phase system, the generalized interactor reduces to the ordinary interactor, so the proposed method can be regarded as the generalized technique of the inverted interactorizing to the non-minimum phase systems. As a special case of the inverted interactorizing, it is also shown that the plant is decouplable and internally stable if and only if its generalized interactor is diagonal.

Key Word : interactor, non-minimum phase system, decoupling control, internal stability, state feedback

1. はじめに

インタラクタ¹⁾とはシステムの無限零点の重複度構造に対応した概念であり²⁾, スカラ系伝達関数の相対次数を多変数系に拡張したものとも解釈することができる。また, 制御系においては特に, 閉ループ部分の逆インタラクタ化を基本的設計方針として利用しているモデルマッチング, 適応制御, 非干渉制御などにおいてインタラクタの役割は重要である^{3)~4)}。これらは主に周波数領域での議論であるが, 文献5)においては状態フィードバックによる逆インタラクタ化が考察されている。これは, 閉ループ系の伝達行列をプラントのインタラクタの逆行列とするような状態フィードバックを求める問題であり, 最大非可観測化のための状態フィードバック^{6),7)}をインタラクタの概念をととして議論したことに対応し

ている。一般に線形多変数系は, 入力数が出力数と等しいか, 大きい場合, 状態フィードバックにより常に逆インタラクタ化が可能である。この特殊な場合として, インタラクタが対角行列であれば, これは Wolovich ら⁸⁾により提案された状態フィードバックによる非干渉化と一致することも示されている^{9),10)}。

ところで, 状態フィードバックによる逆インタラクタ化において閉ループ系が内部安定であるためには, プラントが最小位相系であることが要求されている。これは, この状態フィードバックによりプラントのすべての零点が閉ループ極によりキャンセルされるためである。プラントが非最小位相系であるとき, 逆インタラクタ化の特殊な場合である状態フィードバックによる非干渉化問題に限れば, 内部安定性を保証するために二つの対応策がある。一つは, 非干渉化可能なプラントに対して状態フィードバックにより非干渉化を行った後に, さらに動的補償器を組み込むことにより, 非干渉系を維持したまま任意極配置を行うことである。このような動的補償器は Howze and Pearson のフィルタとして知られている^{9),10)}。第2の対応策は動的補償を行うことなくプラン

[†] 第32回計測自動制御学会学術講演会で発表(1993・8)

* 上智大学理工学部 東京都千代田区紀尾井町7-1

* Faculty of Science and Technology, Sophia University, Chiyoda-ku, Tokyo

(Received July 1, 1993)

(Revised December 24, 1993)

トの状態フィードバックのみにより内部安定な非干渉系が得られるための条件を考察することである。これが可能であるための必要十分条件として、プラントのある一部の零点が安定であればよいことが知られており、このようなシステムを弱最小位相系と呼んでいる¹¹⁾。しかし、これらの手法は一般的な逆インタラクタ化のための状態フィードバックに対しては用いることができない。

文献 12) においては、プラントの無限零点のみを考慮した従来のインタラクタに代わって、プラントのいくつかの有限の零点(特に不安定零点)をも考慮した広義インタラクタが定義された。さらにそこでは、多項式代数法に基づく周波数領域でのモデルマッチング系設計問題においてインタラクタを広義インタラクタに置き換えるだけで非最小位相系プラントをも扱えることが示されている。そこで、本論文では上述の状態フィードバックによる逆インタラクタの問題点を解決するために状態フィードバックによる広義の逆インタラクタ化ということを考察する。これは、非最小位相系プラントに対して閉ループ系伝達行列をプラントの広義インタラクタの逆行列にするような状態フィードバックを見つける問題である。このフィードバックは常にプラントの安定な零点のみをキャンセルするように働き、また最小位相系プラントに対しては通常逆インタラクタ化に一致することから、状態フィードバックによる逆インタラクタ化⁹⁾の一般化とみなすことができる。したがって、非最小位相系をも含んだプラント全般に対して、モデルマッチングをはじめとする広義インタラクタを用いた制御系を状態変数を利用して議論することができ、最小次元オブザーバと組み合わせるなど、周波数領域での設計法とは違った種々の可能性を考えることができる。

さらに、プラントの広義インタラクタが対角行列であることと、プラントが弱最小位相系で、かつそのインタラクタが対角であることの等価性を示すことができる。これより、非干渉可能性に対するより統一的な条件として、プラントの広義インタラクタが対角行列であることが、プラントの状態フィードバックのみにより非干渉化でき、かつ閉ループ系が内部安定であるための必要十分条件であることが示される。

以下、第 2 章では、プラントの無限零点と不安定な有限の零点のみに対応した広義インタラクタについて述べ、第 3 章で広義の逆インタラクタ化のための状態フィードバックを求める。さらに、第 4 章においては、この特殊な場合として非最小位相系を含む一般的なプラントに対する内部安定な非干渉化について考察を行う。最後に、第 5 章で簡単な例題を示す。

2. 広義インタラクタ

インタラクタとはプラントの無限零点に対応した概念であるが、広義インタラクタはそれに加えてプラントの有限の零点のうち任意に選んだいくつかの零点をも考慮した概念である。この章では、文献 12) と重複するが後の議論に必要なので、広義インタラクタの定義とその求め方を、プラントの無限零点と有限なすべての不安定零点に対応するものに限ってまとめておく。

$T(s)$ を $p \times p$ で強プロパ、非最小位相系の伝達行列とする。 $T(s)$ の不安定零点を $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ としよう。ただし、これらは重複度も含むものとし $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ はすべて相異なるものとする。さらに、 $T(s)$ はこれらの零点を極として含まないと仮定する。

【定義 1】 つぎの (1)~(3) を満たす左下三角の有理関数行列 $L^*(s)$ を $T(s)$ の広義インタラクタと呼ぶ。

- (1) 次式を満たす正則行列 $A^* \in R^{p \times p}$ が存在する。

$$\lim_{s \rightarrow \infty} L^*(s) T(s) = A^* \quad (2.1)$$

- (2) 次式を満たす正則行列 $A_i^* \in C^{p \times p}$ が存在する。

$$\lim_{s \rightarrow z_i} L^*(s) T(s) = A_i^* \quad (i=1, \dots, m) \quad (2.2)$$

- (3) $L^*(s)$ の極は、その重複度も含めて $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ である。

$L^*(s)$ は制御系において利用しやすいという理由からつぎのように分解できるもののみを扱う。

$$L^*(s) = L_{inf}(s) L_f(s) \quad (2.3)$$

ここで、 $L_{inf}(s)$ は左下三角多項式行列でプラントの無限零点に対応しており、 $L_f(s)$ は左下三角の有理関数行列でプラントの不安定な零点に対応する部分である。ただし、 $L_f(s)$ は $s \rightarrow \infty$ のとき正則行列に収束するものとする。さらに、 $L^*(s)$ は $L^{*-1}(s)$ が安定な有理関数行列となるもののみを考える。このような広義インタラクタ $L^*(s)$ は以下の手順で求められる。

まず、有限の不安定零点 $\{z_1, z_2, \dots, z_m\}$ に対応してつぎのようにして $L_f(s)$ を求める。

[STEP 1]

不安定零点 z_1 に対応して変数変換

$$\lambda = \frac{s + \sigma}{s - z_1} \quad (2.4)$$

を $T(s)$ に施して得られる伝達行列を $T_1(\lambda)$ とおく。ここで σ は任意の正数である。つぎに $T_1(\lambda)$ に対する通常の意味でのインタラクタを求めこれを $L_1(\lambda)$ とする。ただし、 $L_1(\lambda)$ は左下三角の λ の多項式行列であり、その対角要素は λ の単項式と選ぶ。(2.4) を用いて $L_1(\lambda)$ を s で表わし直したものを $L_i^*(s)$ とする。

[STEP i]

不安定零点 z_i に対応して変数変換

$$\lambda = \frac{s + \sigma}{s - z_i} \quad (2.5)$$

を $L_{i-1}^*(s)L_{i-2}^*(s) \cdots L_1^*(s)T(s)$ に施して得られる伝達行列を $T_i(\lambda)$ とおく。つぎに $T_i(\lambda)$ の通常の意味でのインタラクタを求めこれを $L_i(\lambda)$ とする。ただし、 $L_i(\lambda)$ は左下三角の λ の多項式行列であり、その対角要素は λ の単項式と選ぶ。(2.5)を用いて $L_i(\lambda)$ を s で表わし直したものを $L_i^*(s)$ とする。

このプロセスを STEP m まで続け $L_f(s)$ を次式により定義する。

$$L_f(s) = L_m^*(s)L_{m-1}^*(s) \cdots L_1^*(s) \quad (2.6)$$

つぎに $L_f(s)T(s)$ に対する通常の意味での安定な左下三角のインタラクタ $L_{inf}(s)$ を求める。以上を用いて、 $T(s)$ の広義インタラクタ $L^*(s)$ は次式により求まる。

$$L^*(s) = L_{inf}(s)L_f(s) \quad (2.7)$$

このようにして求めた $L^*(s)$ が実際に広義インタラクタの定義を満たしていることは文献12)を参照されたい。

3. 状態フィードバックによる広義の逆インタラクタ化

いま、伝達行列が $T(s)$ となるような一つの最小実現としてつぎのようなプラントが与えられているとする。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

式中、 $x(t) \in R^n$, $y(t)$, $u(t) \in R^p$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times p}$ および $C \in R^{p \times n}$ である。ここで考える問題は、(3.1)が与えられたとき、状態フィードバック

$$u(t) = Fx(t) + Gv(t) \quad (3.2)$$

により、

$$C(sI - A - BF)^{-1}BG = L^*-1(s) \quad (3.3)$$

となり、かつ $A + BF$ が安定行列となるような $F \in R^{p \times n}$ と $G \in R^{p \times p}$ を求めることであり、これを状態フィードバックによる広義の逆インタラクタ化と呼ぶ。

《補助定理1》 (3.1)に示す最小実現 (A, B, C) に対して、次式を満たす行列 $\bar{C} \in R^{p \times n}$ が存在する。

$$L_f(s)T(s) = \bar{C}(sI - A)^{-1}B \quad (3.4)$$

(証明) 付録参照

このような行列 $\bar{C}$ はプラントの可制御性を利用して以下のように簡単に求めることができる。

$L_f(s)T(s)$ は強プロパな有理関数行列であるので次式のように書ける。

$$L_f(s)T(s) = F_1s^{-1} + F_2s^{-2} + F_3s^{-3} + \cdots \quad (3.5)$$

一方、 $\bar{C}(sI - A)^{-1}B$ もつぎのように展開できる。

$$\bar{C}(sI - A)^{-1}B = \bar{C}Bs^{-1} + \bar{C}ABs^{-2} + \bar{C}A^2Bs^{-3} + \cdots$$

したがって、(3.5) (3.6)の等べき項の係数行列を等置して得られる。

$$\begin{aligned} \bar{C}[B, AB, A^2B, \cdots, A^{n-1}B] \\ = [F_1, F_2, F_3, \cdots, F_n] \end{aligned} \quad (3.7)$$

なる関係式より $\bar{C}$ を求めることができる。ただし、 μ はプラントの可制御指数である。 (A, B) の可制御性より $\bar{C}$ は(3.7)より一意に定まり、また補助定理1から(3.4)の両辺の $\mu+1$ 次以降の係数行列もすべて等しくなる。

さて、これから状態フィードバックによる広義の逆インタラクタ化を考えよう。そのためプラントの出力 $y(t)$ を用いて次式で示される新しい仮想的な出力信号 $\hat{y}(t)$ を定義する。

$$\begin{aligned} \hat{y} &= L_f(s)y \\ &= L_f(s)T(s)u \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここでは表記の便宜上、 y , $\hat{y}$, v などの“(t)”を付けない変数は $y(t)$, $\hat{y}(t)$, $v(t)$ の周波数領域における表現とする。補助定理1より信号 $\hat{y}(t)$ は(3.1)の状態変数を用いてつぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ \hat{y}(t) &= \bar{C}x(t) \end{aligned} \quad (3.9)$$

つぎに、 $L_{inf}(s)$ は、 $L_f(s)T(s)$ に対する通常のインタラクタ、すなわちシステム(3.9)に対する通常のインタラクタであることに注意しよう。この $L_{inf}(s)$ をつぎのように書く。

$$L_{inf}(s) = L_0s^w + L_{w-1}s^{w-1} + \cdots + L_0 \quad (3.10)$$

これより、文献5)の結果を利用すると、システム(3.9)に対して状態フィードバック

$$u(t) = -A^*-1D^*x(t) + A^*-1v(t) \quad (3.11)$$

を施すことにより、外部入力 $v(t)$ から出力 $\hat{y}(t)$ までの関数を

$$\hat{y} = L_{inf}^{-1}(s)v \quad (3.12)$$

とできる。ただし、 A^* は(2.2)により与えられる正則行列であり D^* は次式により定義される $p \times n$ 行列である。

$$D^* = [L_0, L_1, \cdots, L_w] \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^w \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

したがって、(3.8) (3.12)より

$$\begin{aligned} y &= L_f^{-1}(s)L_{inf}^{-1}(s)v \\ &= L^*-1(s)v \end{aligned} \quad (3.14)$$

が得られ、システム(3.1)に対して状態フィードバック(3.11)を施したときの閉ループ系伝達行列は広義インタラクタの逆行列となっていることがわかる。

さらに、ここで得られた閉ループ伝達行列 $L^*-1(s)$ の零点は、システム(3.1)の不安定零点のみである。一方、

閉ループ極に関しては $L_f^{-1}(s)$ に含まれるシステム (3.1) の不安定零点と同じ数の安定極と、 $L_{inf}^{-1}(s)$ に含まれるシステム (3.1) の無限零点と同じ数の安定極により構成されている。これより、(3.11) の状態フィードバックによりシステム (3.1) の安定零点のみがキャンセルされていることがわかる。

以上より、つぎの定理が成立することが示された。

【定理 1】 システム (3.1) に対して状態フィードバック (3.11) を施すことにより、外部入力 $v(t)$ から出力 $y(t)$ までの閉ループ伝達行列はシステム (3.1) の広義インタラクタの逆行列とすることができる。また、このとき閉ループ極はプラントの安定零点のみをキャンセルし、閉ループ系は内部安定である。

このように仮想的な出力 $\hat{y}(t)$ を利用して定理に示した状態フィードバックを説明するブロック線図を Fig. 1 に示す。これは、Silverman¹³⁾ により示された構造アルゴリズムの一般化と解釈できる。

これらの結果をモデルマッチングなどに利用するためには適当な前置補償器と組み合わせればよい。この点は文献 12) を参照されたい。また、状態変数が直接手に入らない場合は、(最小次元) オブザーバなどを併用すればよいことも明らかである。

なお、プラントが最小位相系である場合、広義インタラクタは通常インタラクタとなるので、定理 1 は文献 5) の状態フィードバックによる逆インタラクタ化の一般化となっている。

4. 状態フィードバックによる非干渉化

逆インタラクタ化の特殊な場合として、状態フィードバックによる非干渉化が考えられる。これはインタラクタが対角の場合の逆インタラクタ化であり、状態フィードバックにより非干渉化できるための必要十分条件としてインタラクタが対角行列であることが知られている。もちろん、この非干渉系が内部安定であるためにはプラ

ントは最小位相系でなくてはならない。前章で述べた広義の逆インタラクタ化は、広義インタラクタが対角行列であるとき、明らかに一つの非干渉化になっている。本章では非最小位相系プラントに対して、その広義インタラクタが対角であることが、プラントの状態フィードバックのみにより内部安定な非干渉化ができるための必要十分条件であることを述べる。

プラント (3.1) の通常インタラクタが対角行列となるとき、内部安定な非干渉系を構成する状態フィードバックが存在するための必要十分条件として、プラントが弱最小位相系であることが示されている¹¹⁾。弱最小位相系とは

$$T(s) = R(s)P^{-1}(s) \\ = \begin{bmatrix} r_1(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_p(s) \end{bmatrix} R_0(s)P^{-1}(s) \quad (4.1)$$

と書いたとき、 $R_0(s)P^{-1}(s)$ が最小位相系になることである。ただし、 $R(s)$ 、 $P(s)$ は $T(s)$ を既約分解したときの多項式行列、 $r_i(s)$ は $R(s)$ の第 i 行における各要素の不安定な最大公約多項式である。このとき、つぎの命題が成立する。

【命題 1】 $T(s)$ の広義インタラクタが対角行列であることと、 $T(s)$ が弱最小位相系で、かつ $T(s)$ のインタラクタが対角行列となることは等価である。

(証明) まず、 $T(s)$ が弱最小位相系であるとする。このとき、(4.1) より $T(s)$ に対する $L_f(s)$ を

$$L_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{n_1(s)}{r_1(s)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \frac{n_p(s)}{r_p(s)} \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

と選べることは明らかである。ここで、 $n_i(s)$ は $r_i(s)$ と同じ次数のモニック安定多項式とする。これより、

$$L_f(s)T(s) = \begin{bmatrix} n_1(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & n_p(s) \end{bmatrix} \times R_0(s)P^{-1}(s) \quad (4.3)$$

となり、(4.1) のインタラクタが対角行列であるなら、(4.3) のインタラクタ $L_{inf}(s)$ も対角とでき、 $T(s)$ の広義のインタラクタ $L^*(s) = L_{inf}(s)L_f(s)$ も対角行列と選ぶことができる。

逆に $T(s)$ の広義インタラクタ $L^*(s)$ が対角行列であるとしよう。

Fig. 1 Block diagram of the generalized inverted interactorizing by the state feedback

すなわち、 $L^*(s)$ はつぎのように表わされるものとする.

$$L^*(s) = \begin{bmatrix} \frac{f_1^*(s)n_1^*(s)}{r_1^*(s)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{f_p^*(s)n_p^*(s)}{r_p^*(s)} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

ここで、 $L^*(s)$ の極は重複度も含めて $z_1, \dots, z_m$ である. また、 $n_i^*(s)$ の次数は $r_i^*(s)$ の次数と等しい安定多項式であり、 $f_i^*(s)$ は 1 次以上の適当な安定多項式である. z_i は $T(s)$ の極とは異なる値であるので、 $P^{-1}(z_i)$ が正則となることに注意すると、広義インタラクタの性質より $L^*(z_i)R(z_i)$ は正則行列となる. さらに、 $L^*(s)$ の零点は z_i とは異なっているので、次式を満たすような正則行列 H_i が存在する.

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{r_1^*(z_i)} & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \frac{1}{r_p^*(z_i)} \end{bmatrix} R(z_i) = H_i \quad (i=1, \dots, m) \quad (4.5)$$

H_i がすべての $i=1, \dots, m$ に対して有限確定するためには、 $R(s)$ の第 i 行のすべての要素は $r_i^*(s)$ を因子として含んでいなくてはならない. すなわち、 $R(s)$ はつぎのように書ける.

$$R(s) = \begin{bmatrix} r_1^*(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_p^*(s) \end{bmatrix} R_1(s) \quad (4.6)$$

さらに、 H_i がすべての $i=1, \dots, m$ に対して正則であることより $R(z_i)$ も正則となり、 $R_1(s)$ は $T(s)$ の不安定零点を含んでいないことがわかる. すなわち、 $R_1(s)P^{-1}(s)$ は最小位相系となり、 $T(s)$ は弱最小位相系となる. また、行列

$$\begin{bmatrix} f_1^*(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & f_p^*(s) \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

は、

$$\begin{bmatrix} n_1^*(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & n_p^*(s) \end{bmatrix} R_1(s)P^{-1}(s) \quad (4.8)$$

に対する通常の意味でのインタラクタであるので、(4.7) は

$$T(s) = \begin{bmatrix} r_1^*(s) & 0 \\ & \ddots \\ 0 & r_p^*(s) \end{bmatrix} R_1(s)P^{-1}(s)$$

に対してもインタラクタとしての資格をもち、命題が証明された.

プラントが最小位相系の場合、 $L_r(s) = I$ となり、広義

インタラクタ $L^*(s)$ は通常のインタラクタ $L(s)$ に一致する. 以上より、状態フィードバックにより内部安定な非干渉化ができるための条件を、従来の結果を含んだ形としてつぎの定理に統一的にまとめることができる.

《定理 2》 必ずしも最小位相系とは限らないプラント (3.1) がプラントの状態フィードバックのみにより非干渉化でき、かつ閉ループ系が内部安定となる必要十分条件は、その広義インタラクタが対角行列となることである. また、このとき、非干渉化のための状態フィードバックは (3.11) により与えられる.

5. 例 題

ここでは、実際に与えられたプラントに対して内部安定な広義の逆インタラクタ化を達成する状態フィードバックを計算してみる.

プラントは次式で与えられているとしよう.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (5.1)$$

ここで、各行列はつぎのとおりとする.

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

このプラントは極として $\{2, -2, -1, -1\}$ を、また零点として $\{-7, 1\}$ をもっており、不安定な非最小位相系である. また、伝達行列を求めるとつぎのようになる.

$$T(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{4(s-2)} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$\sigma=1$ とした広義インタラクタの一例としてつぎのような $L^*(s)$ が求められる. これは文献 12) の例題と同じ伝達行列であるので、求める手順は文献 12) を参照されたい.

$$\begin{aligned} L_r(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{4(s+1)}{3(s-1)} & \frac{s+1}{s-1} \end{bmatrix} \\ L_{inf}(s) &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

したがって,

$$L^*(s) = L_{inf}(s)L_f(s) \quad (5.5)$$

また

$$A^* = \lim_{s \rightarrow \infty} L^*(s)T(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

を得る. つぎに (3.7) を用いて $\hat{C}(sI - A)^{-1}B = L_f(s)T(s)$ を満たす行列 $\hat{C}$ を求めるために, $L_f(s)T(s)$ の展開を求める.

$$\begin{aligned} L_f(s)T(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & \frac{-1}{4(s-2)} \\ s + \frac{5}{3} & \frac{4(s+1)}{3(s-2)(s+2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} s^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} s^{-2} + \dots \\ &= F_1 s^{-1} + F_2 s^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (5.7)$$

プラント (5.1) の可制御指数は $\mu=2$ であるので, この F_1, F_2 を用いて,

$$\hat{C}[B, AB] = [F_1, F_2] \quad (5.8)$$

より $\hat{C}$ を求めると, 次式を得る.

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

一方, (5.4) より

$$\begin{aligned} L_{inf}(s) &= L_1 s + L_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

と表わされるので, 以上よりプラント (5.1) に対する逆インタラクタ化のための状態フィードバックは次式のように求められる.

$$u(t) = -A^{*-1}D^*x(t) + A^{*-1}v(t) \quad (5.11)$$

ただし,

$$A^{*-1} = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} D^* &= [L_0, L_1] \begin{bmatrix} \hat{C} \\ \hat{C}A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.13)$$

これにより

$$A^* = A - BA^{*-1}D^*$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{8}{3} & \frac{13}{3} & 1 & -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{3} & -\frac{13}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 4 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

$$B^* = BA^{*-1} = \begin{bmatrix} -\frac{29}{3} & -2 \\ \frac{22}{3} & 1 \\ 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

が得られ, 閉ループ伝達行列は

$$C(sI - A^*)^{-1}B^* = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{4}{3(s+1)} & \frac{s-1}{(s+1)^2} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

となり, 広義インタラクタの逆行列となっていることが確かめられる. この閉ループ系は極として $\{-7, -1, -1\}$ を, 零点として $\{-7, 1\}$ をもっており, 内部安定でかつプラントの安定零点 $\{-7\}$ のみが閉ループ極によりキャンセルされていることがわかる.

6. あとがき

本論文では, 状態フィードバックによる広義の逆インタラクタ化について考察した. 逆インタラクタ化はモデルマッチングや非干渉化の基礎となる重要な手法であるが, プラントが最小位相系でなくてはならないという制約があった. これは, インタラクタはプラントの無限零点に対応したものであり, 逆インタラクタ化によりこの無限零点のキャンセルは行われえないものの, 残りの有限零点はすべてキャンセルされるという性質がその原因となっていた. これに対して, 広義インタラクタはプラントの無限零点と適当に指定した有限の零点に対応するようにインタラクタを拡張したものであり, 広義の逆インタラクタ化においては, 有限, 無限を問わず, 広義インタラクタの対象となった零点のキャンセルは行われえない. このため, 無限零点と不安定零点に対応した広義インタラクタを利用することにより, 状態フィードバックによる内部安定な逆インタラクタ化を非最小位相系に対しても構成することが可能となった.

広義の逆インタラクタ化における閉ループ極は, 広義インタラクタの対象外となったキャンセルを許す安定零点に必ず配置されるほかは $L_f^{-1}(s)$ と $L_{inf}^{-1}(s)$ の極に配置される. 本論文では簡単のため, $L_f(s)$ の零点をすべて $-\sigma$ と設定したが, これは次数の制約だけを満たせば

任意に設定することも可能である。

また、広義インタラクタが対角行列となる場合、広義の逆インタラクタ化は非最小位相系に対する状態フィードバックによる内部安定な非干渉化制御を与える。本論文では、従来の結果も含んだ統一的な表現として、一般のプラントが、プラントの状態フィードバックのみにより内部安定な非干渉化可能であるための必要十分条件はプラントの広義インタラクタが対角行列となることを示した。

さらに、本論文では広義インタラクタは無限零点と不安定零点のみを考慮したが、広義の逆インタラクタ化において、キャンセルしたくない安定零点がある場合、この零点も広義インタラクタに取り込むことによりキャンセルを避けることが可能となる。

また、ここでは広義インタラクタは左下三角行列として利用したが、左下三角とは限らない一般の広義インタラクタを考えることも可能であり、このような広義インタラクタに対する内部安定な広義の逆インタラクタ化のための状態フィードバックも同じ手順で求められることは明らかである。

参考文献

- 1) W. A. Wolovich and P. L. Falb: Invariant and Canonical Forms under Dynamic Compensation, SIAM J. on Control and Opt., **14**-6, 996/1008 (1976)
- 2) 武藤康彦：多変数制御系における無限零点とインタラクタ行列について，計測と制御，**32**-3, 237/252 (1993)
- 3) H. Elliott and W. A. Wolovich: Parametrization Issues in Multivariable Adaptive Control, Automatica, **20**-5, 533/545 (1984)
- 4) Y. Mutoh and R. Ortega: Interactor Structure Estimation for Adaptive Control of Discrete-Time Multivariable Nondecouplable Systems, Automatica, **29**-3, 635/647 (1993)
- 5) 武藤，市川：状態フィードバックによる線形多変数系の逆インタラクタ化，計測自動制御学会論文集，**27**-2, 149/155 (1991)
- 6) E. Emre and M. L. Silverman: New Criteria and System Theoretic Interpretations for Relatively Prime Polynomial Matrices, IEEE Trans., **AC-22**-4, 239/242 (1977)
- 7) 小林，中溝：最大非可観測システムの安定性とその応用，計測自動制御学会論文集，**17**-2, 168/175 (1981)
- 8) P. L. Falb and W. A. Wolovich: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans., **AC-12**-6, 651/659 (1967)
- 9) J. W. Howze and J. B. Pearson: Decoupling and Arbitrary Pole Placement in Linear Systems Using Output Feedback, IEEE Trans., **AC-15**-6, 660/663 (1970)
- 10) 足田弘光：非干渉化問題における Howze-Pearson Compensator, 計測自動制御学会論文集，**22**-2, 131/135 (1986)
- 11) 小林，中溝：動的非干渉系の安定性，計測自動制御学会論文集，**19**-2, 97/103 (1983)
- 12) 武藤康彦：線形多変数非最小位相系に対する広義インタラクタとモデルマッチング：計測自動制御学会論文集，**30**-1, 24/30 (1994)
- 13) Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans., **AC-14**-3, 270/276 (1969)
- 14) W. A. Wolovich: Linear Multivariable Systems, Springer-Verlag, New York (1974)

《付 録》

補助定理 1 の証明

ここでは、文献 14) の第 4 章に示されている、可制御正準形に関する構造定理を利用する。(A, B, C) は最小実現なので、正則行列 Q により可制御正準形 (A_c, B_c, C_c) に変換できる。このときの可制御指数(controllability indices)を d₁, d₂, ..., d_p としよう。この可制御正準形 A_c, B_c の nontrivial 行を A_m, B_m とすれば、構造定理により次式が成立する。

$$C(sI - A)^{-1}B = R(s)P^{-1}(s) \quad (A.1)$$

ただし、

$$R(s) = C_c S(s) \quad (A.2)$$

$$P(s) = \delta(s) B_m^{-1}(s)$$

ここで S(s), δ(s) は次式で示されるそれぞれ n × p および p × p の多項式行列である。

$$S(s) = \text{block diag.} \left[\begin{array}{c} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_1-1} \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_2-1} \end{array} \right], \dots, \left[\begin{array}{c} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{d_p-1} \end{array} \right] \right] \quad (A.3)$$

$$\delta(s) = \text{diag.} [s^{d_1}, s^{d_2}, \dots, s^{d_p}] - A_m S(s) \quad (A.4)$$

文献 12) によれば、L_f(s)R(s) は多項式行列となり、L_f(s)R(s)P⁻¹(s) は共通の極と零点をもたないことと、その強プロパ性より、次式を満たす多項式行列 $\hat{R}(s)$ が存在する。

$$L_f(s)R(s)P^{-1}(s) = \hat{R}(s)P^{-1}(s) \quad (A.5)$$

ここで、 $\hat{R}(s)$ と P(s) は既約で、次式を満たす $\hat{C}_c \in R^{p \times n}$ が存在する。

$$\hat{R}(s) = \hat{C}_c S(s) \quad (A.6)$$

これは、構造定理より (A_c, B_c, $\hat{C}_c$) が L_f(s)R(s)P⁻¹(s) の最小実現であることを意味している。したがって、正則変換 Q⁻¹ により適当な $\hat{C} \in R^{p \times n}$ を用いて、これは (A, B, $\hat{C}$) と変換される。これより、

$$\hat{C}(sI - A)^{-1}B = L_f(s)T(s) \quad (A.7)$$

が存在することがわかる。

[著 者 紹 介]

武 藤 康 彦 (正会員)

(Vol. 30, No. 1 参照)