あるファジィ集合族のコンパクト性

師 玉 康 成*・葭 谷 安 正**・内 堀 晃 彦*
中 村 八 束*・山 浦 弘 夫*

The Sequential Compactness of a Set of Fuzzy-membership Functions

Yasunari SHIDAMA*, Yasumasa YOSHITANI**, Akihiko UCHIBORI*,
Yatsuka NAKAMURA* and Hiroo YAMAURA*

The compactness of a set of fuzzy-membership functions is proved, as compactness of a continuous functions set. This set includes the triangle-membership-functions, which are very often used for fuzzy control. Therefore, this compactness is useful for convergence analysis of the fuzzy-algorithms.

Key Words: compactness, fuzzy set, fuzzy algorithms, convergence

1. はじめに

近年、ファジィ理論を用いた制御法などが盛んに研究されている^{1),2)}。これらの研究は主に if~then~型制御規則を用いた制御法の構成法に関するものである。確かに構成法は重要であるが、この制御法を用いた場合の最適性の研究はあまりなされていない。これはファジィ集合を許容解にもつ非線形の最適化問題として扱うべきものでその許容解全体の集合のコンパクト性が重要になる。また最近の遺伝アルゴリズムに関する研究で if~then~型制御規則で用いるファジィ集合を逐次修正する方法³⁾が提案されているが、逐次修正の過程で現れるファジィ集合列の収束性(したがって遺伝アルゴリズムの適用によって作られる制御規則列そのものの収束性)や最適解への収束性は論じられていない。

これらを議論するためにもファジィ集合族のコンパクト性(任意の無限ファジィ集合列が集積点をもつという性質)がきわめて重要な役割を果たすものと考えられる。本論文ではこのコンパクト性について筆者らが得た 2, 3 の有用な結果を報告する。

2. ファジィ集合族のコンパクト性

$\Delta > 0$ としてつぎのメンバシップ関数の集合 $F(\Delta)$ を考える。

$$F(\Delta) \triangleq \{\mu: [a, b] \rightarrow [0, 1]; \forall x, x' \in [a, b],$$

$$|\mu(x) - \mu(x')| \leq \Delta |x - x'| \} \quad (1)$$

この $F(\Delta)$ には斜辺の傾きや最大勾配が Δ 以下の三角型や台形型および釣り鐘型のメンバシップ関数¹⁾が含まれる。 $\Delta > 0$ を十分大きくとれば良く用いられているメンバシップ関数^{1),2)}をほとんど含むものと考えてよい。この $F(\Delta)$ についてつぎの命題が成り立つ。

[命題]

1. $F(\Delta)$ は演算 $\wedge, \vee$ および 1 以下の比例倍, カット¹⁾について代数的に閉じている。したがって $F(\Delta)$ の元をそのメンバシップ関数にもつファジィ集合族はファジィ集合演算 $\cap, \cup$ および 1 以下の比例倍, カットについて代数的に閉じている。

2. $F(\Delta)$ は区間 $[a, b]$ 上の連続関数全体 $C[a, b]$ の部分集合として、一様位相に関してコンパクト⁴⁾である。すなわち、 $\{\mu_n\}$ を $F(\Delta)$ の任意の無限列とすると、 $\{\mu_n\}$ の無限部分列 $\{\mu_{n_k}\}$ と $\mu_\infty \in F(\Delta)$ が存在して $\{\mu_{n_k}\}$ は μ_∞ に一様収束する⁴⁾。

(証明)

1. $\mu_1, \mu_2 \in F(\Delta)$ のとき $\mu_1 \vee \mu_2 \in F(\Delta)$ を示す。ほかも同様にできる。また 1 以下の比例倍, カットについては自明だから省略する。定義により

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \max\{\mu_1(x), \mu_2(x)\}, x \in [a, b]$$

である。したがって $\mu_1 \vee \mu_2: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ は明らかである。つぎに $x, x' \in [a, b]$ を任意に選ぶ。このとき

$$(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \mu_i(x), (\mu_1 \vee \mu_2)(x') = \mu_i(x')$$

(ただし $i=1$ or 2) であれば $F(\Delta)$ の定義から

$$|(\mu_1 \vee \mu_2)(x) - (\mu_1 \vee \mu_2)(x')| \leq \Delta |x - x'|$$

が成り立つ。そこで $(\mu_1 \vee \mu_2)(x) = \mu_1(x), (\mu_1 \vee \mu_2)(x') = \mu_2(x')$, $\mu_1(x) \geq \mu_2(x')$ としても一般性は失われない。 $0 \leq \mu_1, \mu_2 \leq 1$ であるから、

* 信州大学工学部 長野市若里 500

** 大阪府立工業高等専門学校 寝屋川市幸町 26-12

* Faculty of Engineering, Shinshu University, Nagano

** Osaka Prefectural College of Technology, Neyagawa, Japan

(Received December 24, 1993)

$$|(\mu_1 \vee \mu_2)(x) - (\mu_1 \vee \mu_2)(x')| = |\mu_1(x) - \mu_2(x')|$$

$$\leq \mu_1(x) - \mu_1(x') \leq \Delta |x - x'|$$

が成り立つ。結局 $\mu_1 \vee \mu_2 \in F(\Delta)$ が成り立つ。

2. つぎに $F(\Delta)$ のコンパクト性を示そう。これは Ascoli-Alzela の定理⁹⁾ による。任意の $\mu \in F(\Delta)$ および $x \in [a, b]$ について $0 \leq \mu(x) \leq 1$ が成り立つ。したがって $F(\Delta)$ は一様有界である。

また任意の $\varepsilon > 0$ について、 $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\Delta$ とおけば、任意の $\mu \in F(\Delta)$ 、および $x, x' \in [a, b]$ に対して、

$$|x - x'| \leq \delta(\varepsilon) \text{ ならば } |\mu(x) - \mu(x')| \leq \Delta |x - x'| \leq \varepsilon$$

が成り立つ。すなわち、 $F(\Delta)$ は同程度連続⁹⁾。よって $F(\Delta)$ の閉包 $\overline{F(\Delta)}$ はコンパクト⁹⁾ である。つぎに $\overline{F(\Delta)} = F(\Delta)$ すなわち $F(\Delta)$ が閉集合であることを示そう。ここで

$$\mu_n \in F(\Delta), \mu_n \xrightarrow{\text{一様}} \mu_\infty (n \rightarrow \infty)$$

である任意の $\{\mu_n\}$ をとれば、任意の $x, x' \in [a, b]$ について

$$\begin{aligned} |\mu_\infty(x) - \mu_\infty(x')| &= |\mu_\infty(x) - \mu_n(x) + \mu_n(x') - \mu_n(x') + \mu_n(x') - \mu_\infty(x')| \\ &\leq \Delta |x - x'| + 2\|\mu_\infty - \mu_n\| \\ &\rightarrow \Delta |x - x'| (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ただし、 $\|\mu\| \triangleq \sup\{|\mu(x)|; x \in [a, b]\}$

したがって $|\mu_\infty(x) - \mu_\infty(x')| \leq \Delta |x - x'|$ となるから $\mu_\infty \in F(\Delta)$ であり、 $\overline{F(\Delta)} = F(\Delta)$ が示される。すなわち $F(\Delta, \delta)$ はコンパクトである。q. e. d

3. 重心計算の連続性

以上によりメンバシップ関数の集合 $F(\Delta)$ のコンパクト性が、したがって $F(\Delta)$ の元をそのメンバシップ関数にもつファジィ集合族のコンパクト性が示された。ファジィ集合を制御などに適用する場合は、重心計算¹⁾

$$M: \mu \mapsto M_\mu \triangleq \frac{\int_a^b x \mu(x) dx}{\int_a^b \mu(x) dx} \quad (2)$$

などの非ファジィ化の手続きを経て確定した量が制御量として与えられる。ここで重心計算に連続性をもたせることを考える。このためには上の $F(\Delta)$ を少し変形したつぎのような集合を考えればよい。

$$F(\Delta, \delta) \triangleq \{\mu \in F(\Delta); \min_{x \in [a, b]} \mu(x) \geq \delta\} \quad (3)$$

ただし、 $\Delta, \delta > 0$ である。 δ を十分小さくとれば実用上は $F(\Delta, \delta) = F(\Delta)$ として扱うことができる。この $F(\Delta, \delta)$ については以下のように $F(\Delta)$ と同様の命題が成り立ち、しかも重心計算 M は $F(\Delta, \delta)$ 上連続である。

[命題の系]

1. $F(\Delta, \delta)$ の元をそのメンバシップ関数にもつファ

ジィ集合族はファジィ集合演算 $\cap$, $\cup$ および δ 以上のカットについて代数的に閉じている。

2. $F(\Delta, \delta)$ は区間上の連続関数全体の部分集合として、一様位相に関してコンパクトである。

3. 重心計算 $M: \mu \mapsto M_\mu$ は $F(\Delta, \delta)$ 上連続である。

(証明)

1. ファジィ集合演算 $\cap$, $\cup$ やカットについて代数的に閉じていることは前述の命題より明らかであるので省略する。

2. コンパクト性については $F(\Delta, \delta)$ が $F(\Delta)$ の閉部分集合であることを示せば十分である。 $F(\Delta, \delta)$ の元の無限列 $\{\mu_n\}$ で

$$\mu_n \xrightarrow{\text{一様}} \mu_\infty (n \rightarrow \infty)$$

となるものをとれば、 $F(\Delta)$ は閉集合ゆえ $\mu_\infty \in F(\Delta)$ となる。しかも、任意の $x \in [a, b]$ について

$$\mu_\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(x) \geq \delta$$

よって $\mu_\infty \in F(\Delta, \delta)$ 。すなわち $F(\Delta, \delta)$ は閉集合。したがって $F(\Delta, \delta)$ はコンパクトである。

3. 重心計算の連続性を示す。任意の $F(\Delta, \delta)$ の元の列 $\{\mu_n\}$ について

$$\mu_n \xrightarrow{\text{一様}} \mu_\infty (n \rightarrow \infty)$$

のとき $M_{\mu_n} \rightarrow M_{\mu_\infty}$ を示せばよい。しかしこれは $\{\mu_n\}$ の一様収束性から容易に導かれる。すなわち

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b x \mu_n(x) dx - \int_a^b x \mu_\infty(x) dx \right| &\leq \int_a^b |x| |\mu_n(x) - \mu_\infty(x)| dx \\ &\leq \|\mu_n - \mu_\infty\| \int_a^b |x| dx \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であり、同様に

$$\left| \int_a^b \mu_n(x) dx - \int_a^b \mu_\infty(x) dx \right| \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

でしかも

$$\int_a^b \mu_\infty(x) dx \geq \int_a^b \delta dx = \delta(b-a) > 0$$

よって

$$M_{\mu_n} = \frac{\int_a^b x \mu_n(x) dx}{\int_a^b \mu_n(x) dx} \rightarrow M_{\mu_\infty} = \frac{\int_a^b x \mu_\infty(x) dx}{\int_a^b \mu_\infty(x) dx} (n \rightarrow \infty)$$

すなわち $M: \mu \mapsto M_\mu$ は連続である。q. e. d

4. 応用例

前章までの命題はつぎのような場合に適用できる。

1. 非ファジィ化が重心計算 M によって行われ、これによって作られた確定量 u が最適化問題の許容解であ

り、その評価関数 $J(u)$ が u について連続な場合、 $F(\Delta, \delta)$ から R への M と J の合成写像

$$\mu \in F(\Delta, \delta) \mapsto J(M_\mu) \in R \quad (4)$$

は連続であり、コンパクト空間 $F(\Delta, \delta)$ 上の連続写像であるから最大値、最小値の存在が保証される⁴⁾。しかも、何らかのアルゴリズムにより最小化列

$$\begin{aligned} \mu_n \in F(\Delta, \delta); J(M_{\mu_n}) \rightarrow \inf\{J(M_\mu), \mu \in F(\Delta, \delta)\} \\ (n \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (5)$$

が構成されるときはこのアルゴリズムによる集積点の存在が保証される。たとえば、 $f(y, v)$, $l(y, v)$ をそれぞれ $(y, v) \in R^n \times R$ について連続微分可能な非線形関数および連続な正值関数とすると、系の方程式が

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u), x(0) = x_0 \quad (6)$$

で与えられ、評価関数が

$$J(u) = \int_0^1 l(x(t), u) dt \quad (7)$$

で与えられる定数値制御の最適制御問題をメンバシップ関数が $F(\Delta, \delta)$ の元で与えられるファジィ集合族上で扱う場合を考える。制御量はメンバシップ関数から重心計算で与えるものとする。この場合、微分方程式の解のパラメータに関する連続性⁵⁾により $x(t)$ は u に関し連続であり、このことから $\mu \in F(\Delta, \delta) \mapsto J(M_\mu)$ の連続性が従い、上の議論が適用できる。

2. Mamdani の方法¹⁾ などを用いる場合で if~then~型のルール族の前件部および後件部のファジィ集合を何らかの学習アルゴリズムで逐次修正する場合 (Karr の G. A アルゴリズム³⁾ など)。これらの逐次修正されるファジィ集合族の収束性、すなわち if~then~型のルールの学習による収束性を議論することができる。たとえば、 n 個のルール

$$\text{if } A_{n1}^k \text{ and } A_{n2}^k \cdots A_{nm}^k \text{ then } B_n^k$$

⋮

$$\text{if } A_{n1}^k \text{ and } A_{n2}^k \cdots A_{nm}^k \text{ then } B_n^k$$

(ただし添え字 k は学習の回数を表わす) が与えられ、学習によって得られる各ファジィ集合族 $A_{ij}^k, B_i^k, i=1, \dots, n, j=1, \dots, m$ のメンバシップ関数がそれぞれ $F(\Delta_{ij}^k, \delta_{ij}^k)$, $F(\Delta_i^k, \delta_i^k)$ に属する場合。結局これらによるメンバシップ関数の $(m+1) \times n$ 重対は有限個のコンパクト集合の多重直積

$$\prod_{i=1}^n \left\{ \prod_{j=1}^{m+1} F(\Delta_{ij}^k, \delta_{ij}^k) \times F(\Delta_i^k, \delta_i^k) \right\} \quad (8)$$

に属し、この多重直積もコンパクトであるからメンバシップ関数の多重対の列の収束性、したがって上記のルールのファジィ集合列の収束性を議論することができる。

5. おわりに

斜辺の傾きや最大勾配がある正数 Δ 以下の三角型や台形型および釣り鐘型の関数のクラスを表わすメンバシップ関数集合 $F(\Delta)$ について、そのコンパクト性に関する 2, 3 の結果を報告した。 $\Delta > 0$ を十分大きくとればファジィ制御で良く用いられているメンバシップ関数がこの集合にほとんど含まれると考えてよい。したがって本論文の結果はファジィ制御を用いた場合の最適性の研究や遺伝アルゴリズムなどによるファジィ制御規則の逐次構成の収束性の解析に有用な道具を与えるものと考え

参考文献

- 1) 菅野道夫：ファジィ制御，日刊工業新聞社(1991)
- 2) 安信誠二：ファジィ制御方式と実システムへの適用，電気学会論文誌，109-C-5, 330/336 (1989)
- 3) C. L. Karr: Design of an Adaptive Fuzzy Logic Controller Using a Genetic Algorithm, Proc. of 4th Int. Conf. on Genetic Algorithm, 450/457 (1991)
- 4) コルモゴロフ，フォミン：関数解析の基礎，岩波書店(1979)
- 5) ポントリャーギン：常微分方程式，第4章，167/171，共立出版株式会社(1984)