多次元積形非線形フィードバックをもつシステムのロバスト安定性[†]

宮 城 隼 夫*・川 平 公 子*・山 下 勝 己*

Robust Stability of Systems with Multi-Argument Product-Type Nonlinear Feedbacks

Hayao MIYAGI*, Kimiko KAWAHIRA*
and Katsumi YAMASHITA*

The robustness of product-type nonlinear feedback systems subjected to parameter variations is studied through both the positive realness of perturbed transfer functions and the direct method of Lyapunov. The feature of the proposed method is that the tolerable range of individual parameter deviations and the condition for the product-type nonlinearities are obtainable.

Key Words: robust stability, Lyapunov method, product-type nonlinear feedback system, perturbed transfer function

1. はじめに

制御システムのロバスト安定性については数多くの研究がなされているが、ロバスト指標としてはノルム表現を用いることが多い。しかしながら、ノルム指標には1) 個々のシステムパラメータの変動領域を表現できない、2) 指標導出に繰り返し用いられる十分条件によって、求められる変動領域も控え目すぎる、という難点がある。特に非線形システムの場合にこの傾向が顕著なため、筆者らは先に、ルーリエ形非線形システムを対象に、ノルム指標を用いない一つのロバスト指標を提案した¹⁾。一方、非線形フィードバックにも必ずしもルーリエのセクター条件を満足しない多様なものが考えられる。このフィードバックの非線形性はシステムの安定性に大きな影響を与えるにもかかわらず、この方面の研究がほとんど見られないのが実情である。

本論では、フィードバック要素が非線形関数の積の形で与えられる、いわゆる積形非線形フィードバックシステムのロバスト安定性について、摂動伝達関数行列の正実性とリアプノフの安定判別法²⁾により解析を行う。まず、ノミナルなシステムの安定性について考察するが、このとき、二次形式を基盤としてシステムが安定になるための積形非線形関数の条件を導出する。つぎに、システムにパラメータ変動¹⁾が生じた場合のロバスト安定性

について、システムの摂動伝達関数行列の正実性を基に考察を行う。この摂動伝達関数行列の正実条件から、システムの一つのロバスト安定指標が導かれる。

2. システムの設定

積形非線形フィードバックを考慮するために、次式で表わされるシステムを考える。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.a)$$

$$\sigma = C^T x \quad (1.b)$$

$$v = D^T x \quad (1.c)$$

$$u = -g(\sigma, v) \quad (2)$$

ただし、

$$g(\sigma, v) = [g_i(\sigma_i, v_i)] \\ = [h_i(\sigma_i) r_i(v_i)] \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (3)$$

であり、 h_i 、 r_i の性質は未知である。また、(1)式のブロック線図はFig. 1によって示される。

このシステムの u - σ 間の伝達関数行列 $W_1(s)$ は

$$W_1(s) = C^T (sI - A)^{-1} B \quad (4)$$

で与えられ、 u - v 間の伝達関数行列 $W_2(s)$ は

Fig. 1 Product-type nonlinear feedback systems

[†] 第 32 回計測自動制御学会学術講演会で一部発表(1993・8)

* 琉球大学工学部 沖縄県中頭郡西原町字千原 1

* Faculty of Engineering, Ryukyu University, Okinawa
(Received April 13, 1994)
(Revised August 15, 1994)

$$W_2(s) = D^T(sI - A)^{-1}B \quad (5)$$

で与えられる。\$W_1(s)\$, \$W_2(s)\$ はそれぞれ

$$W_1(\infty) = 0, W_2(\infty) = 0 \quad (6)$$

を満足し、(1)式は、\$W_1(s)\$ あるいは \$W_2(s)\$ の最小実現であるものとする。

(1)式のシステムはノミナルな状態での動的システムを表現しており、実際のシステムとの間には何らかの誤差があるものと考えられる。本論ではその誤差をパラメータ変動分 \$\Delta A\$, \$\Delta B\$ を用いて表現する。したがって、実際のシステム¹⁾は次式によって記述される。

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}\tilde{u} \quad (7.a)$$

$$\sigma = C^T \tilde{x} \quad (7.b)$$

$$\tilde{v} = D^T \tilde{x} \quad (7.c)$$

$$\tilde{u} = -g(\sigma, \tilde{v}) \quad (8)$$

ここで、\$\tilde{A}\$, \$\tilde{B}\$ は擾動分 \$\Delta A\$, \$\Delta B\$ を含み、次式で与えられる。

$$\tilde{A} = A + \Delta A, \tilde{B} = B + \Delta B \quad (9)$$

また、

$$g(\sigma, \tilde{v}) = [g_i(\sigma_i, \tilde{v}_i)] \\ = [h_i(\sigma_i)r_i(\tilde{v}_i)] \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (10)$$

である。

(1)および(7)式の平衡点は、それぞれ \$x=0\$, \$\tilde{x}=0\$ であるものとする。

3. ノミナルなシステムの安定性

まず、つぎの定理1、定理2が得られる³⁾。

《定理1》

もし \$W_1(s)\$ が正実行列なら、

$$A^T P + PA = -LL^T \quad (11.a)$$

$$PB = C \quad (11.b)$$

を満足する実行列 \$P\$, \$L\$ が存在する。ただし、\$P\$ は正定対称な行列である。□

《定理2》

もし \$W_2(s)\$ が正実行列なら、

$$A^T P + PA = -LL^T \quad (12.a)$$

$$PB = D \quad (12.b)$$

を満足する実行列 \$P\$, \$L\$ が存在する。ただし、\$P\$ は正定対称な行列である。□

そこで、つぎの安定定理を導くことができる。

《定理3》

\$W_1(s)\$ が正実行列であり、\$h_i(\sigma_i)\$, \$r_i(v_i)\$ が

$$h_i(0) = 0, \sigma_i h_i(\sigma_i) > 0 \\ r_i(v_i) > 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (13)$$

を満足するような関数であれば、(1)式で表わされるシステムの平衡点は安定である。□

同様に、\$W_2(s)\$ の正実性に基づく安定定理はつぎのよ

うになる。

《定理4》

\$W_2(s)\$ が正実行列であり、\$h_i(\sigma_i)\$, \$r_i(v_i)\$ が

$$r_i(0) = 0, v_i r_i(v_i) > 0 \\ h_i(\sigma_i) > 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (14)$$

を満足するような関数であれば、(1)式で表わされるシステムの平衡点は安定である。□

(定理3、定理4の証明)

定理3、定理4は、つぎの二次形式で与えられるリアプノフ関数の存在によって証明される。

$$V(x) = \frac{1}{2} x^T P x \quad (15)$$

ただし、上式の時間導関数は、定理3に対しては

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - \sigma^T g(\sigma, v) \leq 0 \quad (16)$$

定理4に対しては

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2} x^T L L^T x - v^T g(\sigma, v) \leq 0 \quad (17)$$

となる。□

ここでは、定理3か定理4のどちらかが成り立てば、(1)式のシステムは安定であるということができる。

4. システムのロバスト安定性

システムのロバスト安定性を保証するために、まず、ノミナルなシステムの安定性を保証し、つぎに、パラメータ変動まで考慮に入れたシステムの安定性を保証する。すなわち、\$\Delta A\$, \$\Delta B\$ のどのような条件の下で(1)式のシステムが、(7)式のシステムの安定性を保証できるかを求める。

(7)式のシステムの \$\tilde{u}-\sigma\$ 間の伝達関数行列 \$\tilde{W}_1(s)\$ は

$$\tilde{W}_1(s) = C^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \\ = W_1(s) + \Delta W_1(s) \quad (18)$$

で与えられ、\$\tilde{u}-\tilde{v}\$ 間の伝達関数行列 \$\tilde{W}_2(s)\$ は

$$\tilde{W}_2(s) = D^T (sI - \tilde{A})^{-1} \tilde{B} \\ = W_2(s) + \Delta W_2(s) \quad (19)$$

で与えられる。ただし、

$$\Delta W_1(s) = C^T [sI - (A + \Delta A)]^{-1} * \\ * [\Delta B + \Delta A(sI - A)^{-1} B] \quad (20)$$

$$\Delta W_2(s) = D^T [sI - (A + \Delta A)]^{-1} * \\ * [\Delta B + \Delta A(sI - A)^{-1} B] \quad (21)$$

である⁴⁾。

そこで、つぎのロバスト安定定理を導く。

《定理5》

$$[-sI - (A + \Delta A)]^T P(s) \\ + P(-s)[sI - (A + \Delta A)]$$

$$= \phi^T(-s)\phi(s) \quad (22.a)$$

$$C = P(s)[\Delta B + \Delta A(-sI - A)^{-1}B] \quad (22.b)$$

となる対称行列 $P(s)$ と $\phi(s)$ が存在するものとする。このとき、(1)式で与えられるシステムが安定になるための条件の下に、(7)式のシステムは安定である。□

同様に、つぎの定理を導くこともできる。

《定理6》

$$\begin{aligned} & [-sI - (A + \Delta A)]^T P(s) \\ & + P(-s)[sI - (A + \Delta A)] \\ & = \phi^T(-s)\phi(s) \end{aligned} \quad (23.a)$$

$$D = P(s)[\Delta B + \Delta A(-sI - A)^{-1}B] \quad (23.b)$$

となる対称行列 $P(s)$ と $\phi(s)$ が存在するものとする。このとき、(1)式で与えられるシステムが安定になるための条件の下に、(7)式のシステムは安定である。□

(定理5, 定理6の証明)

(22), (23)式が成立すれば $\Delta W_1(s) + \Delta W_1^T(-s)$, $\Delta W_2(s) + \Delta W_2^T(-s)$ はそれぞれ因数分解でき³⁾, $\Delta W_1(s)$, $\Delta W_2(s)$ は正実行列となる。したがって、(18)式の $\tilde{W}_1(s)$, または(19)式の $\tilde{W}_2(s)$ も正実行列となり、つぎの(24)式, または(25)式を満足する正定対称な実行列 $\tilde{P}$, $\tilde{L}$ が存在する。

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} = -\tilde{L} \tilde{L}^T \quad (24.a)$$

$$\tilde{P} \tilde{B} = C \quad (24.b)$$

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} = -\tilde{L} \tilde{L}^T \quad (25.a)$$

$$\tilde{P} \tilde{B} = D \quad (25.b)$$

いま, リアプノフ関数の候補として, 二次形式

$$V(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{P} \tilde{x} \quad (26)$$

を考える。定理5については、(26)式の時間導関数を、(24)式の関係を用いて変形すると、

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{L} \tilde{L}^T \tilde{x} - \sigma^T g(\sigma, \tilde{v}) \leq 0 \quad (27)$$

となり、定理6については、(25)式の関係を用いて

$$\dot{V}(\tilde{x}) = -\frac{1}{2} \tilde{x}^T \tilde{L} \tilde{L}^T \tilde{x} - \tilde{v}^T g(\sigma, \tilde{v}) \leq 0 \quad (28)$$

となるのでリアプノフの安定定理に基づきシステムは安

定である。□

すなわち、定理5か定理6のどちらかが成り立てば、(7)式のシステムは安定であるということができる。

また、システムのロバスト安定指標は有理関数行列 $P(s)$, $\phi(s)$ の要素の係数が実数になる条件より与えられる。

5. おわりに

本論では、積形非線形フィードバックシステムのロバスト安定性について、摂動伝達関数行列とリアプノフの直接法により解析した。まず、ノミナルなシステムの安定性を保証するが、このとき、非線形関数がシステムの安定性に与える影響についても考察し、システムが安定性を保持するための積形非線形関数のパターンについても類別した。つぎに、得られた結果を利用して、システムにパラメータ変動のある摂動システムのロバスト安定性について考察し、パラメータ変動に起因する伝達関数行列の摂動分、すなわち、摂動伝達関数行列の正実性からシステムのロバスト条件を導出した。この摂動伝達関数行列の正実性から一つのロバスト安定指標を導くことができることも示した。強正実条件から導かれる指標については目下研究中であり、結果は稿を改めて報告したいと考えている。

最後に、この研究は文部省科学研究費補助金一般研究(C)の補助を受けたことを付記する。

参考文献

- 1) H. Miyagi and K. Yamashita: Robust Stability of Luré Systems with Multiple Nonlinearities, IEEE Trans., AC-37-6, 883/886 (1992)
- 2) N. Miyagi and H. Miyagi: Stability Studies of Product-Type Nonlinear Systems, ASME J. Dynam. Syst., Meas., Contr., 113, Sept., 531/534 (1991)
- 3) 高橋, 有本: 回路網とシステム理論, 199/228, コロナ社 (1980)
- 4) 宮城, 仲村, 山下: 漸近安定領域まで考慮したルーリエ形非線形システムのロバスト安定性, 第9回 SICE 九州支部学術講演会予稿集, 123, 51/52 (1990)