固有関数展開による分布定数系の折り返し法[†]

熊澤典良*・阿部直人*・嘉納秀明*

Turn Over Method for Distributed Parameter Systems Using Eigenfunction Expansion

Noriyoshi KUMAZAWA*, Naoto ABE* and Hideaki KANOH*

This paper develops a turn over method for distributed parameter systems that have infinite number of eigenvalues and can be stabilized by an eigen-function expansion technique. The technique has both desirable properties of a pole assignment and an optimal control law. The poles of the closed loop system which is controlled by the former law can be derived for distributed parameter systems and we can easily obtain the feedback gain without solving the infinite dimensional Riccati type differential equation. From the latter law, the obtained gain is of finite dimensional, but the optimal feedback minimizes a quadratic criterion for distributed parameter systems. The closed loop system obtained by the proposed turn over method can be interpreted as an LQ regulated system.

As result, the turn over method has both good properties of the two control laws and can shift only assigned open poles to desirable positions avoiding a difficult selection of a weight for an LQ regulator, and it gives a low sensitivity and a large stability margin to the closed loop system as well.

Key Words: turn over method, distributed parameter system, pole assignment, LQ regulator

1. はじめに

分布系にたいする制御理論を展開する上で、システムを作用素方程式として捉え議論する場合が多い。なかでも、スペクトル作用素で表わせる分布定数系にたいしては、モード解析を用いた部分極配置法が確立され^{1),5)}、システムが安定化される条件が与えられた⁶⁾。この制御則により、システムのもつ無限個の極のうち任意の選んだ極を極配置することができ、選ばれないほかの極は移動することはない。分布定数系の可観測性、可制御性、安定化問題については、固有関数の完全正規直交性から求められている^{2),3)}。双曲型分布定数系においては、固有関数展開を用いて無限次元のシステムから有限次元の部分系を取り出すことによって、部分極配置法を実現している⁹⁾。

極配置法に関して、虚軸に平行な折り返し線を設定することにより、システムのもつ極の中で、折り返し線よ

り右側に存在する極のみを折り返し線にたいして線対称な位置に移す折り返し法⁴⁾が考案された。集中系・むだ時間系にたいして、この折り返し法は単なる極配置法ではなく、その大きな特色は閉ループ系が最適レギュレータになる状態フィードバック則を構成していることである。折り返し法により構成される閉ループ系は、最適レギュレータの性質から、比較的大きな安定余有と低感度特性が保証されることはもちろん、それらの極は全てある領域内に配置される。この領域は指定した折り返し線より左側の平面であり、任意に指定することができるため、設計者は閉ループ系の安定度のある条件のもとで自由に指定できる。このことより、最適レギュレータの設計パラメータである重み行列の選定を折り返し線の選定に置き換えることができ、比較的容易に制御系を設計できる。

本論文は、固有関数展開を用いて折り返し法をある双曲型分布定数系に適用する。固有関数展開を用いることによって、システムの無限次元の Riccati 型偏微分方程式を解くことなく、集中系で示されるサブシステムの Riccati 方程式の解を用いて状態フィードバック則が構成できる。得られた状態フィードバック則は最適レギュレータであり、閉ループ系の極は与えられたシステムか

[†] 第16回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1993・12)

* 明治大学理工学部 川崎市多摩区東三田 1-1-1

* Faculty of Science and Technology, Meiji University, Kawasaki

(Received June 23, 1994)

(Revised March 22, 1995)

ら、容易に導出できることを示す。最後に、制御対象を熱交換器として本理論を適用する。

2. システム方程式

つぎの双曲型偏微分方程式で記述される制御対象を考える⁵⁾。

$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta(t, x) = \mathcal{A}\Theta(t, x) + B(x)u(t) \quad (1)$$

$$\mathcal{A} := -V \frac{\partial}{\partial x} + D \quad (2)$$

ここで、初期条件は $\Theta(0, x) = \Theta_0(x)$, $0 \leq x \leq 1$ である。 $\Theta(t, x) := [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_n]^T$ は n 次元状態ベクトル, $u(t) \in \mathbf{R}^m$ は入力ベクトル, $B(x) := [b_1(x) \ b_2(x) \ \cdots \ b_m(x)]$, $0 \leq x \leq 1$ は $n \times m$ 次元の影響関数である。 $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は定数行列であり, $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は対角かつ $\det V \neq 0$ である。境界条件は以下で示される。

$$C_1\Theta(t, 0) + C_2\Theta(t, 1) = 0 \quad (3)$$

$C_1, C_2 \in \mathbf{R}^{n \times n}$ は次式を満たす。

$$\text{rank} [C_1 \ C_2] = n \quad (4)$$

Hilbert 空間 $L^2([0, 1], \mathbf{C}^n)$ を考える。その内積はつぎのように定義される：

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f^T(x) \bar{g}(x) dx \quad (5)$$

また、 $\mathcal{A}$ は非有界スペクトル作用素であり⁶⁾、 $\mathcal{A}$ の固有値を $\{\lambda_k; k=1, 2, \dots\}$ とすれば、それに対応した固有ベクトル $\{\phi_k; k=1, 2, \dots\}$ は $L^2([0, 1], \mathbf{C}^n)$ において Riesz 基底をなす⁷⁾。

固有値問題を考察するにあたり、制御対象(1)の固有値方程式は

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\phi_i(x) &:= -V \frac{d\phi_i(x)}{dx} + D\phi_i(x) \\ &= \lambda_i \phi_i(x) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ \phi_i : \frac{d\phi_i}{dx} \in L^2([0, 1], \mathbf{C}^n), \right.$$

$$\left. C_1\phi_i(0) + C_2\phi_i(1) = 0 \right\}$$

となる。系(1)は明らかに Laplace 変換可能であることと、 $\mathcal{A}$ は可分な Hilbert 空間上の稠密な定義域 $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ をもつ閉作用素であることから、(6)に対して、作用素 $\mathcal{A}$ の可算無限個の固有値 λ_i と n 次元の固有関数 ϕ_i を求めることができる。

λ_i と同じ固有値をもつ固有関数 ϕ_j は $\langle \mathcal{A}\phi_i, \bar{\phi}_j \rangle = \langle \phi_i, \mathcal{A}^*\bar{\phi}_j \rangle$ となる共役作用素 $\mathcal{A}^*$ により定義され、その固有値方程式は

$$\mathcal{A}^*\phi_i = \lambda_i \phi_i = V \frac{d\phi_i(x)}{dx} + D^T \phi_i(x) \quad (7)$$

となり、境界条件は $\text{rank} \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ \phi_i^T(0)V & -\phi_i^T(1)V \end{bmatrix} = n$ の条

件から与えられる。また、 ϕ_i, ϕ_j は $i \neq j$ の場合直交し、

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (8)$$

と正規化することができ、(8)式の条件によって固有関数が確定する。

(1)式に関して、固有関数展開

$$\Theta(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(t) \phi_i(x) \quad (9)$$

$$b_i(x) = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \phi_j(x), \quad b_{ij} = \langle b_i(x), \phi_j(x) \rangle \quad (10)$$

を適用する。ここに $h_i(t)$ はスカラーの展開係数であり、後で $\Theta(t, x)$ が(1)式の解になるように定められる。つぎのような状態フィードバック $u(t)$ を考える。

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{i=1}^L k_i \langle \phi_i(x), \Theta(t, x) \rangle \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^L k_i \phi_i^T(x) \Theta(t, x) dx \end{aligned} \quad (11)$$

$$= \int_0^1 K \Psi^T(x) \Theta(t, x) dx \quad (12)$$

$$\Psi(x) := [\phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \cdots \ \phi_L(x)] \quad (13)$$

$$K := [k_1 \ k_2 \ \cdots \ k_L] \quad (14)$$

ここで L は可算無限個の固有値から選んだ有限個の個数を表わし、 ϕ_i は有限個の固有値にそれぞれ対応した固有関数、 k_i はフィードバックゲインである。また、状態 $\Theta(t, x)$ は実数であることから $\Theta(t, x) = \bar{\Theta}(t, x)$ である。

(9), (10), (11)式を(1)式に代入し $B_i := [b_{1i} \ b_{2i} \ \cdots \ b_{mi}]$ とすると、固有関数の一次独立性から

$$\dot{h}_i(t) - \lambda_i h_i(t) - B_i \sum_{j=1}^L k_j h_j(t) = 0, \quad i=1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

となり、つぎの補題が成り立つ。

[補題 1]⁹⁾ (1)式の可算無限個の極にたいして、(12)式で示される状態フィードバック則を構成すると、選択した L 個以外の可算無限個の極は移動しない。また、(15)式のシステムの選択した極に対応するモードは可制御であり、 L 個の固有値から構成される部分系の有限個の極は、ゲイン k_i を選択することで L 個にたいして任意の極配置が可能である。

3. 折り返し法

前章の固有関数展開を使うと無限個ある固有値の中から有限個だけを選び、それらの選択された極にたいしてのみ極配置が可能であることを述べた。本章では選ばれた有限個のみをある折り返し線にたいして対称な位置に配置し、かつ閉ループ系が最適レギュレータとなるような分布状態フィードバック則の構成法を考える。閉ループシステムに、このような性質をもたせるような制御則が折り返し法⁴⁾である。

折り返し法を考えるためにシフト系の導出が必要とな

る。シフト系とは、 ν を正の実数とし実軸正方向に ν 移動した固有値 $\tilde{\lambda}$; $\tilde{\lambda} = \nu + \lambda$ をもつようなシステムである。また、システムのもつ固有値にたいして折り返し線 $-\nu$ を通る直線に設定することによって、折り返し線より右側に存在するシステムの固有値のみが設定した折り返し線にたいして対称な位置に移動する。

(6)式で示される $\mathcal{A}$ が非有界スペクトル作用素であり、システム(1)がラプラス変換可能なクラスであることから、 $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$ ($k=1, 2, \dots$) となる固有値は高々有限個しか存在しない。またシフト系に関しても、折り返し線は可制御なモードにたいして設定される設計パラメータであり、システムのもつ固有値が設定した折り返し線 $-\nu$ より右側に有限個しか存在しないように設定する。

系(1)のすべての固有値 λ にたいして、折り返し線を $-\nu$ に設定した場合のシフト系を考える。シフト系の固有値は $\tilde{\lambda} = \lambda + \nu$ であり、シフト系は次式で示される：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Theta}(t, x) = & -V \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Theta}(t, x) + \tilde{D} \tilde{\Theta}(t, x) \\ & + B(x) \tilde{u}(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\tilde{D} = D + \nu \quad (17)$$

シフト系(16)にたいして、つぎの2次形式評価関数を考える。

$$\begin{aligned} J := & \int_0^\infty \left[\int_0^1 \int_0^1 \tilde{\Theta}^T(t, \alpha) Q(\alpha, \beta) \tilde{\Theta}(t, \beta) d\alpha d\beta \right. \\ & \left. + \tilde{u}^T(t) R \tilde{u}(t) \right] dt \end{aligned} \quad (18)$$

状態および入力にたいする重みは、それぞれ、 $Q(\alpha, \beta) \geq 0$, $Q(\alpha, \beta) \in L^2([0, 1] \times [0, 1], \mathbf{R}^{n \times n})$, $R > 0$, $R \in \mathbf{R}^{m \times m}$ である。(18)式の評価関数を最小にする LQ 問題を考えると、最適制御入力 $\tilde{u}(t)$ は

$$u(t) = -R^{-1} \int_0^1 \int_0^1 B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) \tilde{\Theta}(t, \beta) d\alpha d\beta \quad (19)$$

であり、 $\tilde{P}(\alpha, \beta)$ はつぎの Riccati 方程式の安定化解である：

$$\begin{aligned} \tilde{D}^T \tilde{P}(\alpha, \beta) + \tilde{P}^T(\alpha, \beta) \tilde{D} + V^T \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{P}(\alpha, \beta) \\ + \frac{\partial}{\partial \beta} \tilde{P}^T(\alpha, \beta) V - \int_0^1 \tilde{P}^T(\alpha, \beta) B(\beta) d\beta R^{-1} \\ \times \int_0^1 B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) d\alpha + Q(\alpha, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

さて、シフト系にたいする Riccati 方程式(20)の安定化解 $\tilde{P}$ を用いて、系(1)にたいして、つぎの状態フィードバック則(21)を用いて閉ループ系を構成したとしよう。

$$u(t) = -R^{-1} \int_0^1 \int_0^1 B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \quad (21)$$

(21)式により構成される閉ループ系は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Theta(t, x) = & -V \frac{\partial}{\partial x} \Theta(t, x) + D \Theta(t, x) \\ & - B(x) R^{-1} \int_0^1 \int_0^1 B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) \\ & \times \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \end{aligned} \quad (22)$$

となる。(17)式の関係から、 $P := \tilde{P}$ とすると、シフト系のリカッチ方程式(20)は、システム(1)から見た、つぎのような Riccati 方程式となる：

$$\begin{aligned} D^T P(\alpha, \beta) + P^T(\alpha, \beta) D + V^T \frac{\partial}{\partial \alpha} P(\alpha, \beta) \\ + \frac{\partial}{\partial \beta} P^T(\alpha, \beta) V - \int_0^1 P^T(\alpha, \beta) B(\beta) d\beta R^{-1} \\ \times \int_0^1 B^T(\alpha) P(\alpha, \beta) d\alpha + 2\nu P(\alpha, \beta) + Q(\alpha, \beta) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

《定理1》 閉ループ系(22)が系(1)にたいして、つぎの評価関数を最小とする最適レギュレータである。

$$\begin{aligned} J := & \int_0^\infty \left[\int_0^1 \int_0^1 \Theta^T(t, \alpha) [Q(\alpha, \beta) + 2\nu P(\alpha, \beta)] \right. \\ & \left. \times \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta + u^T(t) R u(t) \right] dt \end{aligned} \quad (24)$$

(証明) つぎのような汎関数を定義する。

$$V(t) := \int_0^1 \int_0^1 \Theta^T(t, \alpha) P(\alpha, \beta) \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \quad (25)$$

汎関数を t で微分し、(1)式と(20)式を用いて整理すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) \\ = & \int_0^1 \int_0^1 \Theta^T(t, \alpha) \left[-2\nu P(\alpha, \beta) - Q(\alpha, \beta) \right. \\ & + \int_0^1 P^T(\alpha, \beta) B(\beta) d\beta R^{-1} \int_0^1 B^T(\alpha) P(\alpha, \beta) d\alpha \\ & \times \Theta(t, \beta) + u^T(t) B^T(\alpha) P(\alpha, \beta) \Theta(t, \beta) \\ & + \Theta^T(t, \alpha) P(\alpha, \beta) B(\beta) u(t) d\alpha d\beta \\ = & - \int_0^1 \int_0^1 \Theta^T(t, \alpha) [Q(\alpha, \beta) + 2\nu P(\alpha, \beta)] \\ & \times \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta - u^T(t) R u(t) + \left\| R^{\frac{1}{2}} \left[u(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 \int_0^1 R^{-1} B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \right] \right\|^2 \end{aligned} \quad (26)$$

に変形できる。また、

$$V(t_f) - V(0) = \int_0^{t_f} \frac{d}{dt} V(t) dt \quad (27)$$

より、 $t_f \rightarrow \infty$ に対して $\theta(t_f) \rightarrow 0$ となることから $\lim_{t_f \rightarrow \infty} V(t_f) = 0$ であり、(24)式は

$$\begin{aligned} J = & V(0) + \int_0^\infty \left\| R^{\frac{1}{2}} \left[u(t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_0^1 \int_0^1 R^{-1} B^T(\alpha) \tilde{P}(\alpha, \beta) \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \right] \right\|^2 dt \end{aligned} \quad (28)$$

となる。よって、 J を最小にする制御入力(21)式であ

り、(21)式は2次評価関数(24)を最小にする制御入力になる。

さて実際に(21)式のフィードバックを実現するためには、無限次元のリカッチ方程式(20)の解を求めることが必要となる。無限次元のリカッチ方程式の解がたとえ存在するとしても、その解法はある種の近似を用いることになる。そこで、前節で述べた固有関数展開を用いることで、(12)式を満足する状態フィードバック則に関して近似を用いることなく、制御則が折り返し法となるようなフィードバックゲイン K を求めることができる。このフィードバックゲイン K は有限次元の Riccati 方程式の解である。

有限次元のフィードバックによる折り返し法を実現するために、選択した固有値で構成されるサブシステム(15)をあらためて、つぎのように書き直しておく：

$$\dot{X}(t) - \Lambda X(t) - BKX(t) = 0 \quad (29)$$

$$X(t) := [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_L]^T$$

$$\Lambda := \text{diag}(\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_L)$$

$$B := [B_1^T \ B_2^T \ \dots \ B_L^T]^T$$

また、シフト系(16)にたいして、固有関数展開を用いて(15)式と同様な方法で、折り返し線より虚軸にたいして右側に存在する L 個の固有値を選択し、つぎの集中化したシフト系を構成する。

$$\dot{\tilde{X}}(t) - \tilde{\Lambda} \tilde{X}(t) - \tilde{B} \tilde{K} \tilde{X}(t) = 0 \quad (30)$$

$$\tilde{\Lambda} := \text{diag}(\tilde{\lambda}_1 \ \tilde{\lambda}_2 \ \dots \ \tilde{\lambda}_L)$$

先に述べたように、シフト系(16)に関して選択された極にたいして補題1で示されるように任意の極配置が可能であるから、(29)式で示される集中系にたいして、折り返し法を適用することができる。

シフト系(30)にたいする重み行列 $Q=0$ とした場合のつぎのような Riccati 方程式を考える。

$$\tilde{\Lambda}^* \tilde{P}_L + \tilde{P}_L \tilde{\Lambda} - \tilde{P}_L \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{P}_L = 0 \quad (31)$$

$\tilde{P}_L$ は、(31)式を満たすような $L \times L$ 次元の対称解であり、 $\tilde{\Lambda} - \tilde{B} R^{-1} \tilde{B}^T \tilde{P}_L$ の固有値 $\tilde{\lambda}$ の実数部を $\text{Re}(\tilde{\lambda})$ とすると、 $\text{Re}(\tilde{\lambda}) \leq 0$ を満足するような安定化解 $\tilde{P}_L^+$ が存在することは明らかである。

集中系の折り返し法のアルゴリズムにより、(31)式の安定化解 $\tilde{P}_L^+$ を用いたフィードバックを(29)式のシステムにたいして与える。このことは、(12)式にたいしてつぎのフィードバックゲインを与えることになる：

$$K = -R^{-1} B^T \tilde{P}_L^+ \quad (32)$$

このとき、状態フィードバック則は次式である。

$$u(t) = - \int_0^1 R^{-1} B^T \tilde{P}_L^+ \Psi^T(x) \theta(t, x) dx \quad (33)$$

(33)式にたいして、つぎの定理が成り立つ。

《定理2》 (1)式と(33)式からなる閉ループ系は、系

(1)にたいして、つぎの評価関数を最小とする最適レギュレータである。

$$J := \int_0^\infty \left[\int_0^1 \int_0^1 \Theta^T(t, \alpha) [2\nu \Psi(\alpha) \tilde{P}^+ \Psi^T(\beta)] \right. \\ \left. \times \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta + u^T(t) R u(t) \right] dt \quad (34)$$

また、(33)式のフィードバック則により、折り返し線より右側に存在する系(15)の固有値は、折り返し線にたいして対称な位置に配置され、そのほかの極は移動しない。

(証明) 固有値の移動：(12)式で示されるフィードバック則に関して、補題1より、システム(1)の選んだ L 以外の極は移動しない。(12)式のゲインに、(32)式を代入し、固有関数展開を用いて、選択した L 個の状態に関する集中化方程式を構成する。構成されたサブシステムの固有値は、集中系の折り返し法を適用したことで、折り返し線よりも右側に存在する固有値が、 ν にたいして対称に折り返された位置に存在する。

最適レギュレータであること：定理1にたいして、

$$Q=0, B := \int_0^1 B(\alpha) \Psi(\alpha) d\alpha$$

を代入すると、(24)式は

$$J = V(0) + \int_0^\infty \left\| R^{\frac{1}{2}} \left[u(t) \right. \right. \\ \left. \left. + \int_0^1 \int_0^1 R^{-1} B^T \tilde{P}_L^+ \Psi^T(\alpha) \Theta(t, \beta) d\alpha d\beta \right] \right\|^2 dt \quad (35)$$

となる。 $V(0)$ は入力に依存しないことから、(34)式で示される状態フィードバック則は、評価関数(34)を最小にする最適レギュレータである。

以上、(32)式で示されるゲインを用いた状態フィードバック(12)により、分布定数系の折り返し法が実現できることを述べた。また、得られた分布定数系で示される閉ループ系が最適レギュレータになることから、円条件を満足し比較的大きな安定余有や低感度特性が保証されることがわかる¹⁰⁾。

4. 実システムへの適用

Fig. 1 に示されるような、実際のシステムへ分布系の折り返し法を適用する。Fig. 1 は、並流・向流型熱交換器の概略図であり、温度差をもつ2流体が二つに仕切られた管内を満たしている。各流体間には薄膜で仕切られており、それらの流れが同方向もしくは異方向の流れをそれぞれ並流、向流と呼ぶ。並流型のシステムは有限領域内に極をもたないが、マイナーフィードバックをシステムに加えることで、折り返し法を適用できる。

以下のパラメータをもつ向流型のシステムを考える：

Fig. 1 Heatexchanger System

$$V = \begin{bmatrix} -1.2750 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1.1830 & 1.1830 \\ 1.1829 & -1.1829 \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 0.3909e^{-0.2551x} \\ 0.2583e^{-0.2551x} \end{bmatrix} \quad (36)$$

系(36)の極は Fig. 2 に示す位置に存在する。このとき、折り返し線を $-\nu=4.6$ に設定したとすると、シフト系は次式のようなになる。

$$\tilde{V} = V, \tilde{D} = \begin{bmatrix} -0.7830 & 1.1830 \\ 1.1829 & -0.7829 \end{bmatrix}, \tilde{B}(x) = B(x) \quad (37)$$

シフト系の極は、Fig. 3 に示される位置に配置されている。これにたいして、虚軸より右側に存在する5個の極を選び、次式のような部分系のリカッチ方程式を構成する。

$$\tilde{A}^*P + P\tilde{A} - P\tilde{B}_m R^{-1} \tilde{B}_m^* P = 0 \quad (38)$$

部分系を構成するパラメータは次式で定義される。

$$\tilde{A} = \text{diag}(\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_L) \quad (39)$$

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = 0.341222 - 8.33782j \\ \tilde{\lambda}_2 = 0.889626 - 4.61746j \\ \tilde{\lambda}_3 = 2.401447 \\ \tilde{\lambda}_4 = 0.889626 - 4.61746j \\ \tilde{\lambda}_5 = 0.341222 - 8.33782j \end{cases}$$

評価関数(34)の重み行列を $Q=0, R=1$ として、フィードバック則を構成する。Riccati 方程式(31)は複素係数を用いて構成されている。このため、(31)式よりむしろ実係数の Riccati 方程式に対して、解を導出する方が容易である。Riccati 方程式(31)を実係数に変換するために、つぎのような変換行列：

$$T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & -0.5j \\ 0 & 0.5 & 0 & -0.5j & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5j & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5j \end{bmatrix} \quad (40)$$

を与える。Riccati 方程式(31)に対して、 T を用いたつぎのような相似変換：

$$A_{fix} = T^{-1} \tilde{A} T, B_{fix} = T^{-1} \tilde{B} \quad (41)$$

を行うと、Riccati 方程式は(42)式に示されるように実係数によって構成される。

Fig. 2 Open Loop Poles

Fig. 3 Sifted Loop Poles

$$A_{fix}^* P_{fix} + P_{fix} A_{fix} - P_{fix} B_{fix} R^{-1} B_{fix}^* P_{fix} = 0 \quad (42)$$

相似変換により求めた Riccati 方程式の解 P_{fix}^* は、

$$P_{fix}^* = \begin{bmatrix} 50.2144 & 41.8470 & -7.5525 & 1.5400 & -1.3700 \\ 41.8470 & 429.5036 & -37.5654 & 66.1353 & -0.9694 \\ -7.5525 & -37.5654 & 19.9200 & -49.3070 & 0.9544 \\ 1.5400 & 66.1353 & -49.3070 & 389.7949 & 22.6748 \\ -1.3700 & -0.9694 & 0.9544 & 22.6748 & 49.3316 \end{bmatrix}$$

となる。これより、安定化解 $\tilde{P}^+$ はつぎの逆変換により求まる：

Fig. 4 Turn Over Method

Fig. 5 Eigenfunctions (ψ_1) Fig. 6 Eigenfunctions (ψ_2)

Fig. 7 Time Response

$$\bar{P}^+ = (TP_{fix} T^*)^{-1} \quad (43)$$

求まった $\bar{P}^+$ を用いた状態フィードバック (33) をシステム (1) に加えると、閉ループ系の極は Fig. 4 に示されるように配置される。そのときの、固有関数はそれぞれ以下である。

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \frac{1}{p_1 - p_2} \{ (p_1 + \lambda + a_2) e^{p_1 x} - (p_2 + \lambda + a_2) e^{p_2 x} \} \psi_1(0) \\ \psi_2(x) = \frac{1}{p_1 - p_2} a_2 (e^{p_1 x} - e^{p_2 x}) \psi_1(0) \end{cases} \quad (44)$$

ただし、 $a_1 = 0.9278$, $a_2 = 1.1829$, $r = 0.7843$ として、

$$p_1, p_2 = \frac{1}{2} \{ (r-1)\lambda + (a_1 - a_2) \pm \sqrt{((r+1)\lambda + a_1 + a_2)^2 - 4a_1 a_2} \} \quad (45)$$

である。状態 θ_1, θ_2 にたいする固有関数をそれぞれ ψ_1, ψ_2

とし、選んだ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_5$ に対応する固有関数をそれぞれ、 $\psi_{1-1}, \psi_{1-2}, \dots, \psi_{1-5}, \psi_{2-1}, \psi_{2-2}, \dots, \psi_{2-5}$ とする。これらの固有関数を 3-D プロットしたものが Fig. 5 および Fig. 6 である。

Fig. 7 は、折り返し線を -4.5 および -3.0 とした場合の時間応答であり、状態量 $\theta(t, x)$ は差分法を用いて近似計算を行っている。

5. 結 論

固有関数展開を用いることで、無限次元 Riccati 方程式を解くことなく、集中化したシフト系の Riccati 方程式の解によりフィードバックゲインを容易に決定することができた。また、(1) 式で示されるシステムがもつ固有値のうち、折り返し線 $-\sigma$ にたいして右側の固有値のみが $-\sigma$ にたいして対称な位置に配置するフィード

バックが実現できた。このフィードバック則は分布系にたいする折り返し法であり、極配置法、最適レギュレータの望ましい性質を合せもつ。

最後に、数値例題の計算に XmathTM を提供して下さった、住商エレクトロニクス(株)に深く感謝致します。

参考文献

- 1) D. L. Russell: Control Theory of Hyperbolic Equations Related to Certain Questions in Harmonic Analysis and Spectral Theory, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **40**, 336/368 (1972)
- 2) 坂和愛幸: 放物型分布定数系の可観測性と状態決定問題, 計測自動制御学会論文集, **9**-6, 658/664 (1973)
- 3) 坂和愛幸: 双曲型分布定数系の可観測性と安定化, 計測自動制御学会論文集, **12**-3, 251/256 (1976)
- 4) 川崎, 示村: 指定領域に極を配置する状態フィードバック則の設計法, 計測自動制御学会論文集, **15**-4, 451/457 (1979)
- 5) B. M. N. Clarke and D. Williamson: Control Canonical Forms and Eigenvalue Assignment by Feedback for a Class of Linear Hyperbolic Systems, SIAM Journal on Control and Optimization, **19**-6, 711/729 (1983)
- 6) R. F. Curtain: On Stabilizability of Linear Spectral Systems via State Boundary Feedback, SIAM Journal on Control and Optimization, **23**-1, 144/152 (1985)
- 7) 示村, 内田, 久保: 状態にむだ時間を含むシステムの極を指定した半平面内に配置する最適レギュレータの一構成法, 計測自動制御学会論文集, **23**-2, 136/141 (1987)
- 8) 示村, 内田, 久保: 状態にむだ時間を含むシステムにおける折り返し法, 計測自動制御学会論文集, **23**-6, 597/603 (1987)
- 9) H. Kanoh: Control of Heat Exchangers by Placement of Closed-Loop Poles, Proc. First IFAC Symposium on Design Methods of Control Systems, 662/667 (1991)
- 10) 阿部, 嘉納: あるクラスの双曲型分布系に対する最適レギュレータの性質, 計測自動制御学会論文集, **29**-4, 395/400 (1993)

[著者紹介]

熊澤典良(学生会員)

1992年, 明治大学大学院博士前期課程修了。同年同大学院博士後期課程工学研究科機械工学専攻博士後期課程に入学, 現在に至る。分布定数系の最適レギュレータに関する研究に従事。システム制御情報学会の会員。

阿部直人(正会員)

1984年, 早稲田大学理工学部電気工学科卒業。86年同大学大学院理工学研究科博士前期課程修了。89年同大学院博士後期課程修了(電気工学専攻)。88年早稲田大学理工学部電気工学科助手。89年明治大学理工学部精密工学科助手。むだ時間を含む線形系や分布定数系の研究に従事(工学博士)。電気学会, システム制御情報学会などの会員。

嘉納秀明(正会員)

1961年, 横浜国立大学工学部機械工学科卒業。同年(株)三菱油化入社。62年横浜国立大学工学部機械工学科助手。69年大阪大学工学部産業機械工学科助手。73年同大学助教授。86年明治大学工学部精密工学科教授。この間75年8月から76年8月まで文部省在外研究員として英国シェフィールド大学, スイス・チューリヒ工科大学の客員研究員。92年10月より英国レディング大学の客員教授。日本機械学会, システム制御情報学会などの会員。