連続時間間接法 MRACS の安定性の証明法[†]

鈴木 隆*・板宮 敬悦*

A Stability Proof for the Continuous Time Indirect Model Reference Adaptive Control System

Takashi SUZUKI* and Keietsu ITAMIYA*

Many stability proofs have been already presented both for continuous and discrete time model reference adaptive control (MRAC) systems. However, these are all for the direct MRAC scheme where the controller-parameters are directly adjusted by the adaptive law, except for the one by Sastry and Bodson. This paper presents a simple stability proof for the continuous time indirect MRAC scheme where the controller-parameters are determined from the plant-parameter estimates via design calculation. In this method, the system is analyzed by using the relation between control error and identification error and the properties guaranteed by the adaptive law, and then the stability is proved by applying Gronwall's lemma as in the ones by Morse and Goodwin et al.. The proposed method is easier to understand than the one by Sastry and Bodson based on the regularity of the signals.

Key Words: model reference adaptive control, continuous time, indirect scheme, stability proof, Gronwall's lemma

1. ま え が き

モデル規範形適応制御系(MRACS)の信号の持続励振(PE)性を前提としない場合の安定性の証明問題は1974年のMonopoli¹⁾によるシステム構成法の提案以来永い間の懸案であったが、1980年代になって離散時間形式のMRACSに対してはGoodwinら²⁾、Narendraら³⁾により、連続時間形式のMRACSに対してはMorse⁴⁾、Narendraら⁵⁾、Sastryら⁶⁾により厳密な証明法が示された。Goodwinら⁷⁾はさらに1987年になって連続時間形式のMRACSを対象としてMorseの方法を基にしたより簡潔な証明法を示した。この方法は系内信号の有界性をGronwallの定理を用いて直接証明するもので、Goodwinら²⁾やNarendraら^{3),5)}の背理法による証明よりは釈然とした理解が可能である。しかし、これらの証明法はコントローラのパラメータを直接調整するという

直接法形のMRACSを対象としたものが主体で、プラントパラメータの同定を経てコントローラのパラメータを計算により決定するという間接法形のMRACSに対しては、Sastryらの研究を除いて、見当たらない。

本論文では連続時間形式の間接法MRACSを対象とした安定性の一証明法を示す。この方法は、Morse⁴⁾やGoodwinら⁷⁾の方法におけると同様、Gronwallの定理を使用するもので、とくに難しい数学知識を必要とせず、信号のregularityの概念を用いるSastryらの方法よりも理解は容易である。以下では、第2章でまず考察の対象となる間接法MRACSの構成と適応則により保証される性質を説明し、第3章で制御誤差と同定誤差の関係を踏まえてMRACSとしての安定性を証明する。

2. 間接法によるMRACSの構成

2.1 プラントと規範モデル

適応制御の対象となるプラントは、1入力1出力の連続時間系として次式で記述されるものとする。

$$A(s)y(t) = B(s)u(t) \quad (1)$$

ただし、

[†] 第33回計測自動制御学会学術講演会で発表(1994・7)

* 防衛大学校 横須賀市走水 1-10-20

* National Defense Academy, Yokosuka
(Received November 18, 1994)
(Revised June 20, 1995)

$$A(s)=s^n+\sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}, B(s)=\sum_{i=d}^n b_i s^{n-i} \quad (2)$$

上のプラント表現に対し、以下の仮定を設ける。

- A 1) 次数 n および相対次数 d (≥ 1) は既知。
 A 2) 係数 a_i, b_i は未知の定数。ただし、 $b_d \geq b_{d\min} (> 0)$ ($b_{d\min}$ は既知)。
 A 3) 多項式 $B(s)$ は漸近安定(フルビッツ)。

(1) 式のプラントに対応し、つぎの規範モデルを用意する。

$$A_M(s)y_M(t)=B_M(s)r(t) \quad (3)$$

ただし、

$$A_M(s)=s^n+\sum_{i=1}^n a_{Mi} s^{n-i}, B_M(s)=\sum_{i=d}^n b_{Mi} s^{n-i} \quad (4)$$

ここに、多項式 $A_M(s)$ は漸近安定、 $r(t)$ は有界とする。

2.2 制御入力合成

まず、漸近安定な多項式 $G(s), H(s)$ を

$$G(s)=s^{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1} g_i s^{n-1-i}, H(s)=s^d+\sum_{i=1}^d h_i s^{d-i} \quad (5)$$

のように指定すると、プラントの多項式 $A(s)$ に対しつぎの関係を満足する多項式 $R(s), S(s)$ が一意に定まる。

$$G(s)H(s)=A(s)R(s)+S(s) \quad (6)$$

ただし、

$$R(s)=s^{d-1}+\sum_{i=1}^{d-1} r_i s^{d-1-i}, S(s)=\sum_{i=0}^{n-1} s_i s^{n-1-i} \quad (7)$$

(6) 式の両辺に $y(t)$ をかけ、(1) 式の関係を用いると、

$$\begin{aligned} G(s)H(s)y(t) &= B(s)R(s)u(t)+S(s)y(t) \\ \therefore H(s)y(t) &= \frac{B(s)R(s)}{G(s)}u(t)+\frac{S(s)}{G(s)}y(t) \\ &\equiv \alpha^T \xi(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \xi(t) &= [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{2n}(t)]^T \\ \xi_1(t) &= u(t) \\ \xi_i(t) &= s^{n-i} G^{-1}(s) u(t); i=2 \sim n \\ \xi_{n+i}(t) &= s^{n-i} G^{-1}(s) y(t); i=1 \sim n \\ \alpha &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}]^T; \text{とくに, } \alpha_1 = b_d \end{aligned} \quad (9)$$

制御目的 $y(t) \rightarrow y_M(t)$ を達成するための制御入力 $u(t)$ は、(8) 式を基につぎのように合成される。

$$\begin{aligned} H(s)y_M(t) &= \bar{\alpha}(t) \xi(t) \\ \therefore u(t) &= \left\{ H(s)y_M(t) - \sum_{i=2}^{2n} \bar{\alpha}_i(t) \xi_i(t) \right\} / \bar{\alpha}_1(t) \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $\bar{\alpha}(t)$ は(8) 式の α に対応したコントローラの変パラメータで、プラントパラメータの推定値より計算により決定される。つぎに、プラントパラメータの推定法について述べる。

2.3 プラントパラメータの推定

n 次の漸近安定多項式

$$D(s)=s^n+\sum_{i=1}^n d_i s^{n-i} \quad (11)$$

を導入すると、(1) 式より

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{B(s)}{D(s)} u(t) + \frac{D(s)-A(s)}{D(s)} y(t) \\ &\equiv \theta^T \zeta(t) \end{aligned} \quad (12)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \zeta(t) &= [\zeta_d(t), \zeta_{d+1}(t), \dots, \zeta_{2n}(t)]^T \\ \zeta_i(t) &= s^{n-i} D^{-1}(s) u(t); i=d \sim n \\ \zeta_{n+i}(t) &= s^{n-i} D^{-1}(s) y(t); i=1 \sim n \\ \theta &= [\theta_d, \theta_{d+1}, \dots, \theta_{2n}]^T \\ \theta_i &= b_i; i=d \sim n, \theta_{n+i} = d_i - a_i; i=1 \sim n \end{aligned} \quad (13)$$

ここで未知パラメータ θ の推定値を $\hat{\theta}(t)$ とし、同定誤差 $\varepsilon(t)$ を次式により定義する。

$$\varepsilon(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta(t) - y(t) = \bar{\theta}^T(t) \zeta(t) \quad (15)$$

ただし、 $\bar{\theta}^T(t) = \hat{\theta}^T(t) - \theta$

推定値 $\hat{\theta}(t)$ はつぎの適応則により調整される。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_d(t) &= -\gamma_d \zeta_{dN}(t) \varepsilon_N(t) (\equiv f_d(t)) \\ &= 0; \text{ for } \hat{\theta}_d(t) = b_{d\min} \text{ and } f_d(t) < 0 \quad (16a) \\ \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= -\gamma_i \zeta_{iN}(t) \varepsilon_N(t); i=d+1 \sim 2n \quad (16b) \end{aligned}$$

ただし、 $\gamma_i > 0$ ($i=d \sim 2n$), $\hat{\theta}_d(0) \geq b_{d\min}$

$$\begin{aligned} \zeta_{iN}(t) &= \zeta_i(t)/N(t), \varepsilon_N(t) = \varepsilon(t)/N(t) \\ N(t) &= (\rho + \zeta^T(t) \zeta(t))^{1/2}; \rho > 0 \end{aligned} \quad (17)$$

(16a) 式の2行目の条件式は、 $\hat{\theta}_d(t) (= \bar{\alpha}_1(t))$ が $b_{d\min}$ 以下になることを防ぐためのもので、これにより(10) 式による $u(t)$ の合成においてゼロ割りを避けることができる。また、 $\zeta_{iN}(t), \varepsilon_N(t)$ は $\zeta(t), \varepsilon(t)$ を $N(t)$ で正規化したもので、 $\zeta_{iN}(t)$ は、(17) 式より明らかのように、有界である。

(注意1) (16a) 式の右辺は、 $\hat{\theta}_d = b_{d\min}$ なる境界上で $f_d(t) < 0$ ならば不連続となるが、そのような場合でも(16) 式の解の連続性は保たれ、一意性が失われることはない。

上の適応則によれば、つぎの性質が保証される。

P 1) $\hat{\theta}_d(t) \geq b_{d\min} (> 0)$

P 2) $\bar{\theta}(\cdot), \varepsilon_N(\cdot), \dot{\bar{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$

P 3) $\varepsilon_N(\cdot), \dot{\bar{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_2$

(証明) 性質 P 1) は(16) 式より明らか。性質 P 2), P 3) はつぎのようにして証明される。まず、(16) 式を $\bar{\theta}(t)$ に関しつぎのように書き改める。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_d(t) &= -\gamma_d \zeta_{dN}(t) \varepsilon_N(t) (\equiv f_d(t)) \\ &= 0; \text{ for } \hat{\theta}_d(t) = b_{d\min} - \theta_d \text{ and } f_d(t) < 0 \end{aligned} \quad (16a)'$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) = -\gamma_i \zeta_{iN}(t) \varepsilon_N(t); i=d+1 \sim 2n \quad (16b)'$$

また、 $\varepsilon_N(t)$ はつぎのように表わされる。

$$\varepsilon_N(t) = \bar{\theta}^T(t) \zeta_N(t) \quad (18)$$

ここで、正定関数 $V(t)$ を

$$V(t) = \bar{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \bar{\theta}(t) / 2; \Gamma = \text{diag}(\gamma_i) \quad (19)$$

と定義すると、 $\dot{V}(t)$ は

$$\dot{V}(t) = \bar{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\bar{\theta}}(t) \leq -\varepsilon_N^2(t) \leq 0 \quad (20)$$

すなわち、 $V(t)$ は単調減少関数であり、これより $\bar{\theta}(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$ がいえる。この結果、 $\zeta_N(t)$ の有界性を考えると、(18) 式より $\varepsilon_N(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$ 。さらに、(16)' 式より、 $\dot{\bar{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$ もいえる。また、(20) 式より

$$\int_0^\infty \varepsilon_N^2(t) dt \leq V(0) - V(\infty) < \infty \quad (21)$$

すなわち、 $\varepsilon_N(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ 。したがって、(16)' 式より、 $\dot{\bar{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ もいえる。 $\nabla \nabla \nabla$

2.4 パラメータ θ と α の関係

間接法による MRACS では、コントローラのパラメータはプラントパラメータの推定値より計算により決定される。したがって、コントローラパラメータの決定に当たっては、パラメータ θ と α の関係を事前に明らかにしておく必要がある。この関係は、(8)、(12) 式の定義と (6) 式の関係よりつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} b_i &= \theta_i; i = d \sim n \\ a_i &= d_i - \theta_{n+i}; i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (22a)$$

$$\left. \begin{aligned} r_i &= \sum_{j=0}^i g_{i-j} h_j - \sum_{j=0}^{i-1} a_{i-j} r_j; i = 1 \sim d-1 \\ s_i &= \sum_{j=0}^d g_{d+i-j} h_j - \sum_{j=0}^{d-1} a_{d+i-j} r_j; i = 0 \sim n-1 \end{aligned} \right\} \quad (22b)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= b_d \\ \alpha_i &= \sum_{j=0}^{i-1} b_{d+i-1-j} r_j - b_d g_{i-1}; i = 2 \sim n \\ \alpha_{n+i} &= s_{i-1}; i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (22c)$$

ただし、 $g_0 = h_0 = r_0 = a_0 = 1, r_j = 0; j > d-1,$

$$g_j = 0; j > n-1, a_j = b_j = 0; j > n$$

$\theta_j (j = d \sim 2n)$ から $\alpha_i (i = 1 \sim 2n)$ を計算するには、まず θ_j を (22a) 式に代入し、その結果を (22b) 式に代入、さらにその結果を (22c) 式に代入するという手順によればよい。制御入力 $u(t)$ を (10)' 式により合成する際の $\bar{\alpha}_i(t)$ としては (22) 式の θ_j を推定値 $\bar{\theta}_j(t)$ で置き換えて得られる α_i の値が用いられる。

(22) 式の r_i, α_i (s_i を含む) は $\theta_j (j = d \sim 2n)$ の関数であり、その関数形は θ_j に関して連続である。したがって、 θ_j を推定値 $\bar{\theta}_j(t)$ で置き換えて得られる $\bar{r}_i(t), \bar{\alpha}_i(t)$ には、 $\bar{\theta}(t)$ に対すると同様のつぎの性質が成り立つ。

P4) $\bar{\alpha}_i(t) \geq b_{d \min} (> 0)$

P5) $\bar{r}_i(\cdot), \bar{\alpha}_i(\cdot), \dot{\bar{r}}_i(\cdot), \dot{\bar{\alpha}}_i(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$

P6) $\dot{\bar{r}}_i(\cdot), \dot{\bar{\alpha}}_i(\cdot) \in \mathcal{L}_2$

性質 P4) は、 $\alpha_i = \theta_d$ なる関係を考えれば、性質 P1) より明らかである。つぎに、性質 P5)、P6) を $\bar{r}_i(t)$ について示す。 $\bar{r}_i(t)$ の有界性は、 $\bar{\theta}(t)$ の有界性より明らか

である。 $\bar{r}_i(t)$ の微分値 $\dot{\bar{r}}_i(t)$ は、

$$\dot{\bar{r}}_i(t) = (\partial \bar{r}_i / \partial \bar{\theta})^T \dot{\bar{\theta}}(t) \quad (23)$$

ここに、 $\partial \bar{r}_i / \partial \bar{\theta}$ は $\bar{\theta}(t)$ の有界性と (22b) 式の関係より有界、したがって、

$$\|\dot{\bar{r}}_i(t)\| \leq c \|\dot{\bar{\theta}}(t)\| \quad (24)$$

なる関係を満足する適当な定数 c が存在する。したがって、 $\dot{\bar{r}}_i(t)$ は、 $\dot{\bar{\theta}}(t)$ の有界性と $\mathcal{L}_2$ 性より、有界かつ $\mathcal{L}_2$ である。 $\bar{\alpha}_i(t)$ についても同様である。

3. 安定性の証明

MRACS としての安定性は、適応則により保証される性質を基に、制御誤差 $\bar{\alpha}^T(t) \xi(t)$ と同定誤差 $\bar{\theta}^T(t) \zeta(t)$ の関係や Gronwall の定理等を用いて証明される。以下、信号 $\zeta(t)$ と制御誤差 $\bar{\alpha}^T(t) \xi(t)$ との関係から順を追って説明する。

3.1 $\zeta(t)$ と $\bar{\alpha}^T(t) \xi(t)$ との関係

まず、 $u(t), y(t)$ は、(8)、(10)、(1)、(3) 式より、つぎのように表わされる。

$$y(t) = \frac{1}{H(s)} \{r'(t) - \bar{\alpha}^T(t) \xi(t)\} \quad (25)$$

$$u(t) = \frac{A(s)}{H(s)B(s)} \{r'(t) - \bar{\alpha}^T(t) \xi(t)\} \quad (26)$$

ただし、 $\bar{\alpha}(k) = \bar{\alpha}(k) - \alpha$

$$r'(t) = H(s) y_M(t) = \frac{H(s) B_M(s)}{A_M(s)} r(t) \quad (27)$$

したがって、 $\zeta_i(t) (i = d \sim 2n)$ は、(13) 式より

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i(t) &= \frac{s^{n-i} A(s)}{H(s) B(s) D(s)} \{r'(t) - \bar{\alpha}^T(t) \xi(t)\}; \\ &\quad i = d \sim n \\ \zeta_{n+i}(t) &= \frac{s^{n-i}}{H(s) D(s)} \{r'(t) - \bar{\alpha}^T(t) \xi(t)\}; \\ &\quad i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

上の $\zeta_i(t) (i = d \sim 2n)$ はつぎのように書き改められる。

$$\zeta_i(t) = q_i(t) - W_i(s) \frac{G(s)}{D(s)} \{\bar{\alpha}^T(t) \xi(t)\} \quad (29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} W_i(s) &= \frac{s^{n-i} A(s)}{G(s) H(s) B(s)}; i = d \sim n \\ W_{n+i}(s) &= \frac{s^{n-i}}{G(s) H(s)}; i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$q_i(t) = W_i(s) \frac{G(s)}{D(s)} r'(t); i = d \sim 2n \quad (31)$$

ここに、 $W_i(s) (i = d \sim 2n)$ は漸近安定で、その相対次数は、 $i = d \sim n$ に対しては $d-1$ 以上、 $i = n+1 \sim 2n$ に対しては d 以上である。したがって、 $q_i(t)$ は、 $G(s)/D(s)$ の相対次数が 1 であることを考えると、少なくとも d 回は微分可能である。

3.2 $\xi(t)$ と $\bar{\theta}^T(t)\xi(t)$ との関係

(29)式における $\bar{\alpha}^T(t)\xi(t)$ は、付録Aによれば $\bar{\theta}(t)$, $\xi(t)$ とつぎの関係で結びつけられる。

$$\bar{\alpha}^T(t)\xi(t) = \bar{\theta}^T(t) \left\{ \bar{R}(s, t) \frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right\} \quad (32)$$

ここに、

$$\bar{R}(s, t) = \sum_{j=0}^{d-1} \bar{r}_j(t) s^{d-1-j}; \quad \bar{r}_0(t) = 1 \quad (33)$$

(32)式の右辺はつぎのように書き改められる(付録B参照)。

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^T(t) \left\{ \bar{R}(s, t) \frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right\} \\ = \sum_{j=0}^{d-1} \left[s^{d-1-j} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{d-2-j} s^{d-2-j-k} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right] \quad (34) \end{aligned}$$

ただし、

$$\beta_j(t) = \bar{r}_j(t) \bar{\theta}(t); \quad j=0 \sim d-1 \quad (35)$$

ここで、つぎの等式が成り立つことに着目する(付録C参照)。

$$\begin{aligned} \beta_j^T(t) \left(\frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \\ = \frac{D(s)}{G(s)} \{ \beta_j^T(t) \xi(t) \} \\ - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_r(s)}{G(s)} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \quad (36) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} C_r(s) &= G(s)D_r(s) - D(s)G_{r-1}(s) \\ D_r(s) &= s^r + \sum_{i=1}^r d_i s^{r-i}; \quad r=0 \sim n-1 \\ G_r(s) &= s^r + \sum_{i=1}^r g_i s^{r-i}; \quad r=0 \sim n-2, \quad G_{-1}(s) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここに、多項式 $C_r(s)$ の次数はすべての r に対して $n-1$ である。

(32), (34), (36)式の関係を用いると、(29)式の $\xi_i(t)$ はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} \xi_i(t) \\ = q_i(t) - W_i(s) \sum_{j=0}^{d-1} \left[s^{d-1-j} \{ \beta_j^T(t) \xi(t) \} \right. \\ \left. - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{s^{d-1-j} C_r(s)}{D(s)} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right. \\ \left. - \sum_{k=0}^{d-2-j} \frac{s^{d-2-j-k} G(s)}{D(s)} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right] \quad (38) \end{aligned}$$

ここに、 $W_i(s)s^{d-1}$ は、 $i=d$ に対してはプロパー、 $i \geq d+1$ に対しては厳密にプロパーである。また、上式における $\beta_j(t)$ は、(35)式より

$$\beta_j(t) = \bar{r}_j(t) \bar{\theta}(t) + \bar{r}_j(t) \dot{\bar{\theta}}(t) \quad (39)$$

上式における $\bar{\theta}(t)$, $\bar{r}_j(t)$ は前章で述べたように有界で

ある。したがって、(24)式の関係より次式を満足するような適当な定数 c が存在する。

$$\|\dot{\beta}_j(t)\| \leq c \|\dot{\bar{\theta}}(t)\| \quad (40)$$

3.3 集合 F の定義と $\xi(t) \in F$ の証明

ここで、つぎの不等式を満足するような関数 $f(t)$ の集合を F と定義する。

$$\begin{aligned} |f(t)|^2 \leq c + c \int_0^t |\varepsilon(\sigma)|^2 d\sigma \\ + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^d \|\xi^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\bar{\theta}}(\sigma)\|^2 d\sigma \\ + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-2} \|\xi^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\bar{\theta}}(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (41) \end{aligned}$$

ここに、 c は適当な正の定数であり、 $\xi^{(k)}(t)$ は次式で与えられる。

$$\xi^{(k)}(t) = \frac{s^k}{G(s)} \xi(t) \quad (42)$$

(注意2) 上の集合 F の定義は文献7)における定義を拡張したものとなっている。第4項の付加はシステム構成の違いから当然のことであるが、第3項では $\xi(\sigma)$ の $d-1$ 回までの微分に加えて d 回微分をも含めるようにしている。これにより後述する信号 $\xi(t)$ の有界性の証明は著しく簡潔なものとなる。

つぎに、信号 $\xi(t)$ の各成分が集合 F に属することを示す。まず、 $i \geq d+1$ に対しては $W_i(s)s^{d-1}$ は厳密にプロパーで漸近安定である。したがって、(38)式において $q_i(t)$ が有界であること、 $\beta_j^T(t)\xi(t)$ が

$$\beta_j^T(t)\xi(t) = \bar{r}_j(t) \bar{\theta}^T(t)\xi(t) = \bar{r}_j(t)\varepsilon(t) \quad (43)$$

と表わされることに留意すると、付録Dの定理と(40)式の関係より、 $\xi_i(t)$ は(41)式の形の不等式を満足する。すなわち、 $i \geq d+1$ に対しては $\xi_i(t) \in F$ である。つぎに、 $i=d$ の場合を考える。この場合には $W_d(s)s^{d-1}$ はプロパーであり、つぎのように表わすことができる。

$$W_d(s)s^{d-1} \equiv \bar{W}_d(s) = 1/b_d + \bar{W}_d'(s) \quad (44)$$

ただし、 $\bar{W}_d'(s)$: 厳密にプロパー

また、 $\bar{\theta}^T(t)\xi(t)$ をつぎのように表わす。

$$\bar{\theta}^T(t)\xi(t) = \bar{\theta}_d(t)\xi_d(t) + \bar{\theta}^T(t)\bar{\xi}(t) \quad (45)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{\xi}(t) &= [\xi_{d+1}(t), \xi_{d+2}(t), \dots, \xi_{2n}(t)]^T \\ \bar{\theta}(t) &= [\bar{\theta}_{d+1}(t), \bar{\theta}_{d+2}(t), \dots, \bar{\theta}_{2n}(t)]^T \end{aligned}$$

このとき、(38)式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} (1 + \bar{\theta}_d(t)/b_d) \xi_d(t) \\ = q_d(t) - (1/b_d) \{ \bar{\theta}^T(t) \bar{\xi}(t) \} - \bar{W}_d'(s) \{ \bar{\theta}^T(t) \bar{\xi}(t) \} \\ - W_d(s) \sum_{j=1}^{d-1} s^{d-1-j} \{ \beta_j^T(t) \xi(t) \} \\ - W_d(s) \sum_{j=0}^{d-1} \left[\sum_{r=0}^{n-1} \frac{s^{d-1-j} C_r(s)}{D(s)} \right. \\ \left. \times \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} + \sum_{k=0}^{d-2-j} \frac{s^{d-2-j-k} G(s)}{D(s)} \right. \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \quad (46)$$

したがって, $\bar{\theta}(t)$, $\bar{r}_j(t)$ の有界性と

$$1 + \bar{\theta}_d(t)/b_d = \bar{\theta}_d(t)/b_d > 0 \quad (47)$$

なる関係, (15), (40), (43) 式の関係をあわせ考えると, 前と同様にしてつぎの不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \|\zeta_d(t)\|^2 &\leq c + c \|\bar{\zeta}(t)\|^2 + c \int_0^t \|\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma \\ &\quad + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{d-1} \|\zeta^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\bar{\theta}}(\sigma)\|^2 d\sigma \\ &\quad + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-2} \|\zeta^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\bar{\theta}}(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (48) \end{aligned}$$

すでに示したように, $\bar{\zeta}(t)$ の各成分 $\zeta_i(t)$ ($i=d+1 \sim 2n$) は F に属する. したがって, (42) 式の $\zeta_d(t)$ は (41) 式の形の不等式を満足する. すなわち, $\zeta_d(t) \in F$ である. これより, $\zeta(t) (= [\zeta_d(t), \bar{\zeta}^T(t)]^T) \in F$ がいえる.

また, (42) 式の関係よりつぎの不等式が成り立つ.

$$\|\zeta^{(k)}(t)\|^2 \leq c + c \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\zeta(\tau)\|^2 \quad (49)$$

上式より, $\zeta(t) \in F$ ならば, $\zeta^{(k)}(t)$ もまた (41) 式の形の不等式を満足する. すなわち,

$$\zeta^{(k)}(t) \in F; \quad k=0 \sim n-2 \quad (50)$$

3.4 $\zeta^{(k)}(t) \in F$ ($k=1 \sim d$) の証明

つぎに, $\zeta(t)$ の d 回までの微分値 $\zeta^{(k)}(t)$ ($k=1 \sim d$) が F に属することを示す. これは数学的帰納法を用いて証明される. まず, 上述のように $\zeta^{(0)}(t) \in F$ である. つぎに, $k=m$ の場合に $\zeta^{(m)}(t) \in F$ と仮定して, $k=m+1$ の場合にも $\zeta^{(m+1)}(t) \in F$ がいえることを示す.

まず, (13) 式よりつぎの関係が成り立つ.

$$\begin{aligned} \zeta_i^{(m+1)}(t) &= \zeta_i^{(m)}(t); \quad i=d+1 \sim n \\ \zeta_{n+i}^{(m+1)}(t) &= \zeta_{n+i-1}^{(m)}(t); \quad i=2 \sim n \end{aligned} \quad (51)$$

また, $\zeta_{n+1}^{(m+1)}(t)$ は, (1), (13) 式より

$$\zeta_{n+1}^{(m+1)}(t) = \sum_{i=d}^n b_i \zeta_i^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^n a_i \zeta_{n+i}^{(m)}(t) \quad (52)$$

したがって, $\zeta^{(m)}(t) \in F$ ならば, $\zeta_i^{(m+1)}(t)$ ($i=d+1 \sim 2n$) は F に属する.

つぎに, $\zeta_d^{(m+1)}(t)$ は, (38) 式より

$$\begin{aligned} \zeta_d^{(m+1)}(t) &= q_d^{(m+1)}(t) - W_d(s) \sum_{j=0}^{d-1} \left[s^{d-j+m} \{ \beta_j^T(t) \zeta(t) \} \right. \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{s^{d-j+m} C_r(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{d-2-j} \frac{s^{d-1-j-k+m} G(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \right] \quad (53) \end{aligned}$$

上式には $W_d(s)s^{d+m}$ など非プロパーな伝達関数が含まれるが, 上の表現はつぎのようにただかプロパーな伝達関数のみを含む形に書き改めることができる(この変形は $s\{x(t)y(t)\} = \dot{x}(t)y(t) + x(t)\dot{y}(t)$ なる形の演算を

繰り返すことにより導かれる).

$$\begin{aligned} \zeta_d^{(m+1)}(t) &= q_d^{(m+1)}(t) - W_d(s)s^{d-1} \left[\{ \bar{\theta}^T(t) \zeta^{(m+1)}(t) \} \right. \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_{rm+1}(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\bar{\theta}}^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{C_{0m-k}(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\bar{\theta}}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad \left. - \sum_{k=m}^{d-2} \frac{s^{m-k} G(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\bar{\theta}}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \right] \\ &\quad - W_d(s) \sum_{j=1}^{m+1} s^{d-j} \left[\{ \beta_j^T(t) \zeta^{(m)}(t) \} \right. \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_{rm}(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{C_{01}(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad \left. - \sum_{k=m-1}^{d-2-j} \frac{s^{m-1-k} G(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \right] \\ &\quad - W_d(s) \sum_{j=m+2}^{d-1} s^{d+m-j} \left[\{ \beta_j^T(t) \zeta(t) \} \right. \\ &\quad - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_r(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{d-2-j} \frac{s^{1-k} G(s)}{D(s)} \left\{ \dot{\beta}^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right) \right\} \right] \quad (54) \end{aligned}$$

ここに, $C_{rp}(s)$ は次式で定義される多項式であり, その次数は, r, p にかかわらず, $n-1$ である.

$$\begin{aligned} C_{rp+1}(s) &= sC_{rp}(s) - C_{rpo}D(s); \\ r &= 0 \sim n-1, p=0 \sim m \end{aligned} \quad (55)$$

ただし, $C_{ro}(s) = C_r(s)$, $C_{0o}(s) = G(s)$

C_{rpo} : $C_{rp}(s)$ の最高次 ($n-1$ 次) の係数

(54) 式における $W_d(s)s^{d-1}$ はプロパーであるので, これを (44) 式のように表わすと, (54) 式の右辺第 2 項は,

$$\begin{aligned} W_d(s)s^{d-1} \{ \bar{\theta}^T(t) \zeta^{(m+1)}(t) \} &= (1/b_d + \bar{W}'_d(s)) \{ \bar{\theta}^T(t) \zeta^{(m+1)}(t) \} \\ &= (1/b_d) \{ \bar{\theta}_d(t) \zeta_d^{(m+1)}(t) + \bar{\theta}^T(t) \bar{\zeta}^{(m+1)}(t) \} \\ &\quad + \bar{W}'_d(s) \{ \bar{\theta}^T(t) \zeta^{(m+1)}(t) \} \\ &= (1/b_d) \{ \bar{\theta}_d(t) \zeta_d^{(m+1)}(t) + \bar{\theta}^T(t) \bar{\zeta}^{(m+1)}(t) \} \\ &\quad + \bar{W}'_d(s) \{ s(\bar{\theta}^T(t) \zeta^{(m)}(t)) - \dot{\bar{\theta}}^T(t) \zeta^{(m)}(t) \} \quad (56) \end{aligned}$$

ただし,

$$\bar{\zeta}^{(m+1)}(t) = [\zeta_{n+1}^{(m+1)}(t), \dots, \zeta_{2n}^{(m+1)}(t)]^T$$

(54) 式に (56) 式の関係を用い, (47) 式の関係と $W'_d(s)s$, $W_d(s)s^{d-1}$ がプロパーであることに留意すると,

$$\begin{aligned} &|\zeta_d^{(m+1)}(t)|^2 \\ &\leq c + c \|\bar{\zeta}^{(m+1)}(t)\|^2 + c \|\zeta^{(m)}(t)\|^2 \\ &\quad + c \sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\zeta^{(m)}(\tau)\|^2 + c \int_0^t \|\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma \\ &\quad + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{d-1} \|\zeta^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\bar{\theta}}(\sigma)\|^2 d\sigma \end{aligned}$$

$$+c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-2} \|\xi^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\theta}(\sigma)\|^2 d\sigma \quad (57)$$

上式右辺第2項の $\bar{\xi}^{(m+1)}(t)$ はすでに述べたように F に属する。また、 $\sup_{0 \leq \tau \leq t} \|\xi^{(m)}(\tau)\|$ も、 $\xi^{(m)}(t) \in F$ ならば、 F に属する。したがって、(57)式の $\xi_d^{(m+1)}(t)$ は(41)式の形の不等式を満足し、 $\xi_d^{(m+1)}(t)$ が F に属することがわかる。したがって、

$$\xi^{(m+1)}(t) = [\xi_d^{(m+1)}(t), \bar{\xi}^{(m+1)T}(t)]^T \in F$$

すなわち、 $\xi^{(m)}(t) \in F$ ならば、 $\xi^{(m+1)}(t) \in F$ となることはいえた訳である。かくして、数学的帰納法により $\xi^{(k)}(t) \in F$ ($k=1 \sim d$) となることが証明された。したがって、前節の結果とあわせて、つぎの性質がいえる。

$$\xi^{(k)}(t) \in F; \quad k=0 \sim d \quad (58)$$

3.5 $\xi^{(k)}(t)$ ($k=0 \sim d$) の有界性の証明

(50), (58)式の性質と集合 F の定義式(41)より、つぎの不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^d \|\xi^{(k)}(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{n-2} \|\xi^{(k)}(t)\|^2 \\ & \leq c + c \int_0^t \|\varepsilon(\sigma)\|^2 d\sigma \\ & + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^d \|\xi^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\theta}(\sigma)\|^2 d\sigma \\ & + c \int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-2} \|\xi^{(k)}(\sigma)\|^2 \right) \|\dot{\theta}(\sigma)\|^2 d\sigma \end{aligned} \quad (59)$$

上式は、(16), (17)式の関係を用いると、つぎのように表わされる。

$$z(t) \leq c + c \int_0^t \varepsilon_N^2(\sigma) d\sigma + c \int_0^t z(\sigma) \varepsilon_N^2(\sigma) d\sigma \quad (60)$$

ただし、

$$z(t) = \sum_{k=0}^d \|\xi^{(k)}(t)\|^2 + \sum_{k=0}^{n-2} \|\xi^{(k)}(t)\|^2 \quad (61)$$

(60)式は、 $\varepsilon_N(\cdot) \in \mathcal{L}_2$ なることに留意すると、つぎのように書き改められる。

$$z(t) \leq c + c \int_0^t z(\sigma) \varepsilon_N^2(\sigma) d\sigma \quad (62)$$

上式に Gronwall の定理⁶⁾ を適用すると、 $z(t)$ は

$$z(t) \leq c \cdot \exp \left[c \int_0^t \varepsilon_N^2(\sigma) d\sigma \right] \quad (63)$$

上式右辺の積分は $\varepsilon_N(t)$ の $\mathcal{L}_2$ 性より有界、したがって、 $z(t)$ は有界である。これは(61)式の定義より $\xi^{(k)}(t)$ と $\xi^{(k)}(t)$ の有界性を意味する。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \xi^{(k)}(\cdot) & \in \mathcal{L}_\infty; \quad k=0 \sim d \\ \xi^{(k)}(\cdot) & \in \mathcal{L}_\infty; \quad k=0 \sim n-2 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

3.6 $\xi(t)$ と $y(t)$ の有界性の証明

つぎに、 $\xi(t)$ の有界性を示す。まず、 $i=d \sim 2n$ に対しては、(9), (13)式より、

$$\xi_i(t) = \frac{D(s)}{G(s)} \xi_i(t); \quad i=d \sim 2n \quad (65)$$

したがって、(64)式の性質より $\xi_i(t)$ ($i=d \sim 2n$) は有界

である。また、 $i=2 \sim d-1$ に対しては、

$$\xi_i(t) = \xi_i^{(d-i)}(t) = \frac{s^{d-i} D(s)}{G(s)} \xi_d(t) \quad (66)$$

なる関係と(64)式の性質より $\xi_i(t)$ ($i=2 \sim d-1$) の有界性がいえる。つぎに、 $\xi_1(t)$ ($=u(t)$) の有界性について考える。 $\xi_1(t)$ は、(9)式の定義より

$$\xi_1(t) = \xi_2(t) + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \xi_{i+1}(t) \quad (67)$$

ここに、 $\xi_2(t)$ は、(66)式より

$$\xi_2(t) = \xi_2^{(d-1)}(t) = \frac{s^{d-1} D(s)}{G(s)} \xi_d(t) \quad (68)$$

上式は(64)式の性質より有界、したがって、(67)式より $\xi_1(t)$ の有界性がいえる。かくして、 $\xi(t)$ の有界性がいえた。なお、 $y(t)$ については、

$$y(t) = \xi_{n+1}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \xi_{n+i+1}(t) \quad (69)$$

なる関係と $\xi(t)$ の有界性より、有界性は明白である。

3.7 $y(t) \rightarrow y_M(t)$ の証明

つぎに、 $t \rightarrow \infty$ で $y(t) - y_M(t) (= \bar{y}(t)) \rightarrow 0$ となることを示す。 $\bar{y}(t)$ は、(8), (10), (32)式の関係より、

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) & = -\frac{1}{H(s)} \{ \bar{a}^T(t) \xi(t) \} \\ & = -\frac{1}{H(s)} \left[\bar{\theta}^T(t) \left\{ \bar{R}(s, t) \frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (70)$$

上式は、(34), (36)式の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \bar{y}(t) & = -\frac{1}{H(s)} \sum_{j=0}^{d-1} \left[\frac{s^{d-1-j} D(s)}{G(s)} \{ \beta_j^T(t) \xi(t) \} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{s^{d-1-j} C_r(s)}{G(s)} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=0}^{d-2-j} s^{d-2-j-k} \left\{ \beta_j^T(t) \left(\frac{s^k D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (71)$$

ただし、 $\beta_j^T(t) \xi(t) = \bar{r}_j(t) \varepsilon(t)$, $\varepsilon(t) = \bar{\theta}^T(t) \xi(t)$

$\bar{y}(t) \rightarrow 0$ をいうためには、 $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $\beta_j(t) \rightarrow 0$ ($j=0 \sim d$) を示せばよい。 $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ はつぎのようにして示される。まず、 $\varepsilon_N(t)$ が $\mathcal{L}_2$ かつ有界で $\xi(t)$ も有界という性質より、 $\varepsilon(t) = (\rho + \xi^T(t) \xi(t))^{1/2} \varepsilon_N(t)$ の $\mathcal{L}_2$ 性と有界性がいえる。また、 $\varepsilon(t)$ は

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{\theta}^T(t) \xi(t) + \bar{\theta}^T(t) \dot{\xi}(t) \quad (72)$$

と表わされる。 $\bar{\theta}(t)$, $\dot{\bar{\theta}}(t)$, $\xi(t)$, $\dot{\xi}(t)$ の有界性より $\varepsilon(t)$ は有界である。したがって、Barbalat の定理⁸⁾ より、 $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ がいえる。この結果と(16)'式より、 $\dot{\bar{\theta}}(t) \rightarrow 0$ がいえ、(40)式の関係より $\beta_j(t) \rightarrow 0$ がいえる。したがって、(71)式内の伝達関数

$$\frac{s^{d-1-j} D(s)}{H(s)G(s)}, \frac{s^{d-1-j} C_r(s)}{H(s)G(s)}, \frac{s^{d-2-j-k}}{H(s)}$$

が漸近安定で高々プロパー、係数 $\bar{r}_j(t)$ と信号

$$\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t), \frac{s^k D(s)}{G(s)} \xi(t)$$

が有界という性質より, $\bar{y}(t) \rightarrow 0$ がいえる.

上述のように, 間接法形の MRACS においても, 直接法におけると同様, 信号の PE 性を前提とせず制御目的 $y(t) \rightarrow y_M(t)$ を達成することができる. 信号が PE でない場合には, 同定誤差 $\varepsilon(t) (= \bar{\theta}^T(t)\xi(t))$ は 0 に収束するものの, プラントパラメータの推定値は必ずしも真値には収束しない. それにもかかわらず, $y(t) \rightarrow y_M(t)$ が達成されるのは, (70), (71) 式より明らかなように, 同定誤差 $\varepsilon(t)$ の 0 への収束が制御誤差 $\bar{\alpha}^T(t)\xi(t)$ の 0 への収束を意味するからである.

4. あとがき

以上, 連続時間形式の間接法による MRACS について, Gronwall の定理を用いる証明法を示した. この証明法は, 数式処理が多少煩雑というきらいはあるが, とくに難しい数学知識を必要とせず, 理解は容易であると考えられる. ここでは, 簡単のため, 適応則は (16) 式のような固定ゲイン形としたが, 証明過程からもわかるように, $\bar{\theta}(t)$ の $\mathcal{L}_2$ 性と $\bar{\theta}_d(t) \geq b_{d\min}$ が保証されるものならば可変ゲイン形の適応則の使用も可能である. なお, ここに示した証明法は離散時間形式の MRACS に対しても適用可能である. 離散時間形式の場合には微分信号を扱う必要がないので, 証明は連続時間の場合より簡単である. これについては稿を改めて述べることにしたい.

参 考 文 献

- 1) R. V. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans., AC-19-5, 474/484 (1974)
- 2) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines: Discrete-Time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans., AC-35-3, 449/456 (1980)
- 3) K. S. Narendra and Y. H. Lin: Stable Discrete Adaptive Control, ibid., 456/461 (1980)
- 4) A. S. Morse: Global Stability of Parameter-Adaptive Control Systems, ibid., 433/439 (1980)
- 5) K. S. Narendra, Y. H. Lin and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design-Part II. Proof of Stability, ibid., 440/448 (1980)
- 6) S. Sastry and M. Bodson: Adaptive Control-Stability, Convergence and Robustness, Prentice Hall (1989)
- 7) G. C. Goodwin and D. Q. Mayne: A Parameter Estimation Perspective of Continuous Time Model Reference Adaptive Control, Automatica, 23-1, 57/70 (1987)
- 8) K. S. Narendra and A. M. Annaswamy: Stable Adaptive Systems, Prentice Hall, 85/86 (1989)

《付 録》

A. (32) 式の導出

まず, $\alpha^T \xi(t)$ は, その定義式より

$$\alpha^T \xi(t) = \frac{R(s)B(s)}{G(s)}u(t) + \frac{S(s)}{G(s)}y(t)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{R(s)B(s)}{G(s)}u(t) \\ &\quad + \frac{G(s)H(s) - R(s)A(s)}{G(s)}y(t) \\ &= \sum_{i=d}^n b_i R(s) \frac{s^{n-i}}{G(s)}u(t) \\ &\quad + \left\{ H(s) - \sum_{i=0}^n a_i R(s) \frac{s^{n-i}}{G(s)} \right\} y(t) \quad (\text{A.1}) \end{aligned}$$

ただし, $a_0 = 1$

したがって, $\bar{\alpha}^T(t)\xi(t)$ は,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^T(t)\xi(t) &= \sum_{i=d}^n \bar{b}_i(t) \bar{R}(s, t) \frac{s^{n-i}}{G(s)}u(t) \\ &\quad + \left\{ H(s) - \sum_{i=0}^n \bar{a}_i(t) \bar{R}(s, t) \frac{s^{n-i}}{G(s)} \right\} y(t) \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

ここに, $\bar{a}_i(t)$, $\bar{b}_i(t)$ は a_i , b_i の推定値を意味する. また, $\bar{R}(s, t)$ は (33) 式に示される時変係数多項式である.

(A.2) 式より (A.1) 式を引き, (1) 式の関係に留意すると,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^T(t)\xi(t) &= \sum_{i=d}^n \bar{b}_i(t) \bar{R}(s, t) \frac{s^{n-i}}{G(s)}u(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \bar{a}_i(t) \bar{R}(s, t) \frac{s^{n-i}}{G(s)}y(t) \quad (\text{A.3}) \end{aligned}$$

ただし, $\bar{a}_i(t) = \bar{a}_i(t) - a_i$, $\bar{b}_i(t) = \bar{b}_i(t) - b_i$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_i(t) &= \bar{\theta}_i(t) \frac{s^{n-i}}{D(s)}u(t) = \zeta_i(t); \quad i = d \sim n \\ \bar{a}_i(t) &= -\bar{\theta}_{n+i}(t) \frac{s^{n-i}}{D(s)}y(t) = \zeta_{n+i}(t); \quad i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

なる関係に留意すると, (A.3) 式は

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^T(t)\xi(t) &= \sum_{i=d}^{2n} \bar{\theta}_i(t) \left\{ \bar{R}(s, t) \frac{D(s)}{G(s)} \zeta_i(t) \right\} \\ &= \bar{\theta}^T(t) \left\{ \bar{R}(s, t) \frac{D(s)}{G(s)} \zeta(t) \right\} \quad (\text{A.5}) \end{aligned}$$

となり, (32) 式の関係が得られる.

B. (34) 式の導出

(33) 式の $\bar{R}(s, t)$ の定義より, 次式が得られる.

$$\begin{aligned} \bar{\theta}^T(t) \{ \bar{R}(s, t) v(t) \} &= \bar{\theta}^T(t) \left\{ \sum_{j=0}^{d-1} \bar{r}_j(t) (s^{d-1-j} v(t)) \right\} \\ &= \sum_{j=0}^{d-1} \beta_j^T(t) (s^{d-1-j} v(t)) \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

ただし,

$$v(t) = \frac{D(s)}{G(s)} \zeta(t), \quad \beta_j(t) = \bar{r}_j(t) \bar{\theta}(t) \quad (\text{B.2})$$

ここで, つぎの等式が成り立つことに着目する.

$$\begin{aligned} s^i \{ \beta_j^T(t) v(t) \} &= \beta_j^T(t) (s^i v(t)) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{i-1} s^{i-1-k} \{ \dot{\beta}_j^T(t) (s^k v(t)) \} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

上式において $i = d-1-j$ とおき, その結果を (B.1) 式に用いれば, (34) 式が得られる.

C. (36)式の導出

$$\beta_f^T(t) \left(\frac{1}{G(s)} \xi(t) \right) = w(t) \quad (C.1)$$

とおくと、つぎの関係が成り立つ。

$$G(s)w(t) = \beta_f^T(t) \xi(t) + \sum_{r=0}^{n-2} G_r(s) \left\{ \beta_f^T(t) \left(\frac{s^{n-2-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \quad (C.2)$$

$$D(s)w(t) = \beta_f^T(t) \left(\frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) + \sum_{r=0}^{n-1} D_r(s) \left\{ \beta_f^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \quad (C.3)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} G_r(s) &= s^r + \sum_{i=1}^r g_i s^{r-i}; \quad r=0 \sim n-2 \\ D_r(s) &= s^r + \sum_{i=1}^r d_i s^{r-i}; \quad r=0 \sim n-1 \end{aligned} \right\} \quad (C.4)$$

(C.2), (C.3)式より、つぎの関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \beta_f^T(t) \left(\frac{D(s)}{G(s)} \xi(t) \right) \\ &= \frac{D(s)}{G(s)} \{ \beta_f^T(t) \xi(t) \} \\ & \quad - \sum_{r=0}^{n-1} D_r(s) \left\{ \beta_f^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \\ & \quad + \sum_{r=0}^{n-2} \frac{D(s)G_r(s)}{G(s)} \left\{ \beta_f^T(t) \left(\frac{s^{n-2-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \\ &= \frac{D(s)}{G(s)} \{ \beta_f^T(t) \xi(t) \} \\ & \quad - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_r(s)}{G(s)} \left\{ \beta_f^T(t) \left(\frac{s^{n-1-r}}{G(s)} \xi(t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (C.5)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C_r(s) &= G(s)D_r(s) - D(s)G_{r-1}(s); \\ r &= 0 \sim n-1, G_{-1}(s) = 0 \end{aligned} \quad (C.6)$$

上の多項式 $C_r(s)$ の次数は、(C.6), (C.4)式の定義から明らかなように、 r のいかにかわらず $n-1$ である。

D. 漸近安定なシステムの入出力関係

《定理》 $y(t) = W(s)u(t)$ なるシステムにおいて、 $W(s)$ が厳密にプロパーで漸近安定ならば、次式が成り立つ。

$$|y(t)|^2 \leq c + c \int_0^t |u(\tau)|^2 d\tau \quad (D.1)$$

ここに、 c は適当な正の定数。

(証明) $W(s)$ の最小実現を (A, b, c) 、状態変数を $x(t)$ とすると、 $y(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} y(t) &= c^T \exp[At]x(0) \\ & \quad + \int_0^t c^T \exp[A(t-\tau)]bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (D.2)$$

ここに、行列 A は漸近安定であることに注意。

(D.2)式より、つぎの不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |y(t)|^2 &\leq (|c^T \exp[At]x(0)| \\ & \quad + \int_0^t |c^T \exp[A(t-\tau)]b||u(\tau)|d\tau|^2 \\ &\leq 2|c^T \exp[At]x(0)|^2 \\ & \quad + 2 \left(\int_0^t |c^T \exp[A(t-\tau)]b||u(\tau)|d\tau \right)^2 \end{aligned} \quad (D.3)$$

上式の右辺第1項は行列 A の漸近安定性より有界である。第2項に関しては、Schwarz の不等式よりつぎの関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^t |c^T \exp[A(t-\tau)]b||u(\tau)|d\tau \right)^2 \\ & \leq \left(\int_0^t |c^T \exp[A(t-\tau)]b|^2 d\tau \right) \cdot \left(\int_0^t |u(\tau)|^2 d\tau \right) \end{aligned} \quad (D.4)$$

上式右辺の前項は行列 A の漸近安定性より有界、したがって、(D.3)式より(D.1)式の関係为满足するような定数 c が存在する。

著者紹介

鈴木 隆 (正会員)

1965年、京都大学大学院工学研究科博士課程修了。同年防衛庁技術研究所勤務。67年防衛大学校電気工学教室講師、75年教授となり、現在に至る。適応制御に関する研究に従事。システム制御情報学会、電気学会、IEEEなどの会員(工学博士)。

板宮 敬悦 (正会員)

1993年、筑波大学大学院工学研究科電子・情報工学専攻博士課程修了。同年防衛大学校電気工学教室電気工学科助手、95年講師となり、現在に至る。適応・学習制御の研究に従事(工学博士)。