離散時間・擬線形系の部分実現および実時間部分実現理論[†]

長谷川 泰 道*・松 尾 強**

Partial Realization and Real-Time, Partial Realization Theory of Discrete-Time Pseudo-Linear Systems

Yasumichi HASEGAWA* and Tsuyoshi MATSUO**

The realization problem of pseudo-linear systems had been presented with the following realization theorem.

Realization theorem [For any invariant input-response map (equivalently, any input/output map with causality and time-invariance), there exist at least two canonical pseudo-linear systems which realize it. Moreover any two canonical pseudo-linear systems with same behavior are isomorphic each other.] Where electric circuits with FET transistors are examples of pseudo-linear systems. Moreover, the finite-dimensionality of pseudo-linear systems had been discussed.

In this paper, being based on the above results, we will discuss problems of the partial and real-time partial realization. The problems can be roughly described as the follows. The partial realization problem [For a given partial time-invariant input response map by multi-experiments, find uniquely a minimal dimensional pseudo-linear system which partially realizes it. The real-time partial realization problem [For a given partial time-invariant input response map by single-experiment, find uniquely a minimal dimensional pseudo-linear system which partially realizes it. And the following results are obtained.

- (1) A necessary and sufficient condition for minimal partial realization systems to be unique is given by the rank condition of input/output matrix.
- (2) For a given partial time-invariant input response map by multi-experiments, an algorithm to obtain the minimal partial realization system is given.
- (3) For a given partial time-invariant input response map by single-experiment, an algorithm to obtain the minimal realization system is given.

We conclude that these results about partial realization are the extension of the finite-dimensional, constant, linear systems to a non-linear system.

Key Words: pseudo-linear system, partial realization theory, real-time partial realization theory, non-linear system, discrete-time system

1. はじめに

本論文では 離散時間系を取り扱う。筆者らは文献1)において擬線形系の実現問題を定義し、擬線形系が時不変入力応答関数(因果律および時不変を満たす任意の入出力写像)により特徴づけられるつぎの実現定理を得た。実現定理:「任意の時不変入力応答関数に対しそれを実

現する正準(擬可到達であり、可観測である)擬線形系が必ず存在し、任意の二つの正準実現系は互いに同形である」

また、擬線形系の具体例としてFETを含む電気回路があることを示した。さらに、文献2)において有限次元擬線形系を論じ、その主な成果として、有限次元擬線形系が正準であるための必要十分条件を導出し、有限次元正準擬線形系の同形類の代表元として擬可到達標準系が存在することを示し、時不変入力応答関数が有限次元擬線形系の挙動であるための必要十分条件を与えた。さらにその条件を満たす与えられた時不変入力応答関数から、それを実現する擬可到達標準系を求める手順を与え

[†] 第35回自動制御連合講演会で発表(1992・10)

* 岐阜大学工学部 岐阜市柳戸1-1

** 東邦大学理学部 船橋市三山2-2-1

* Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu

** Faculty of Science, Toho University, Funabashi
(Received April 1, 1994)

た。

本論文では、それらの成果に基づいて擬線形系の部分実現および実時間部分実現問題を論じる。部分実現、実時間部分実現問題は大きくはいえ、それぞれつぎのようになる。

部分実現問題：「任意に与えられた部分時不変入力応答関数(多重実験による有限個の入出力データ)と同じ挙動(入出力関係)をもつ最小次元の擬線形系を求めよ」

実時間部分実現問題：「任意に与えられた時不変入力応答関数の単一実験による入出力データから対象と同じ挙動をもつ最小次元の擬線形系を求めよ」

本論文の成果は Kalman らが確立した有限次元定係数線形系の部分実現理論³⁾の擬線形系への拡張になっている。

2. 準備

本章では部分実現問題を論じるのに必要な内容を文献 1), 2) から抽出する。なお、つぎのような記号を用いる。

N は非負の整数の集合(時間の集合を表わす), K はある体(field)であり, K^n は体 K 上の n 次元ベクトル空間, $K^{n \times n}$ は $n \times n$ 行列の集合である。 $F(A, B)$ は集合 A から集合 B への関数の全体, $L(A, B)$ は線形空間 A から線形空間 B への線形写像の全体, $L(A) = L(A, A)$ をそれぞれ表わす。 $\langle X \rangle$ は集合 X を含む最小の線形空間を表わす。

2.1 入出力関係

本節では本論文で取り扱う入出力写像を考察する。 U を入力値集合(入力を取りうる値の集合)とし, U をアルファベットとするワード(語)の集合 U^* を入力系列の集合とする。入力 $\omega = \omega(n)\omega(n-1)\cdots\omega(1) \in U^*$ の長さ $|\omega|$ を n と定義する。ただし $n \in N$ である。そこで連鎖の演算 $|$ を $\omega_1, \omega_2 \in U^*$ に対し $\omega_2|\omega_1$ とする。 $\omega_2|\omega_1$ は入力 ω_1 を与えた後すぐに入力 ω_2 を与えることを表わす。空な入力系列を l とし, $|l|=0$ とする。さらに $u \in U, t \in N$ に対し $u^t \in U^*$ を $u^t(i) = u, 0 \leq i \leq t$ と定義する。

出力値集合 Y (出力を取りうる値の集合) を多出力系, すなわち $Y = K^p$ として議論することができるが記号の簡単化のため, $Y = K$ (一出力系) とする。そこで, ブラック・ボックスの入出力関係に関してつぎの事実がある⁴⁾。

{任意の因果律を満たす入出力写像は入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ により, $\gamma(|\omega|) = \alpha(\omega), \omega \in U^*$ で与えられる。}ただし, $\gamma(|\omega|)$ は入力 ω を入れ終わったときの時刻 $|\omega|$ の出力値を表わす。

本論文ではつぎの定義(2.1)を満たす入力応答関数を取り扱う。

(2.1) 定義

入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が時不変性:

$$\alpha(\omega_1|\omega) - \alpha(\bar{\omega}_1) = \alpha(\bar{\omega}_1|\omega) - \alpha(\bar{\omega}_1)$$

を満たすとき, α は時不変入力応答関数といわれる。ただし任意の $\omega, \omega_1, \bar{\omega}_1 \in U^*, |\omega_1| = |\bar{\omega}_1|$ である。

(2.2) 定理

時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し関数

$$GI: U \rightarrow F(N, Y); u \mapsto GI(u); t \mapsto \alpha(u^{t+1}) - \alpha(u^t)$$

が対応し この対応は全単射である。

(注意) 逆対応が次式により与えられることに注目すれば明らかである。

$$\alpha(\omega) = \alpha(l) + \sum_{j=1}^{|\omega|} \{GI(\omega(j))\}(|\omega| - j)$$

(2.3) 定義

時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し定理(2.2)で与えられる関数

$$GI: U \rightarrow F(N, Y); u \mapsto GI(u); t \mapsto \alpha(u^{t+1}) - \alpha(u^t)$$

を α の補正一般インパルス応答という。

(注意) 定理(2.2)により時不変入力応答関数は補正一般インパルス応答により特徴づけられることがわかる。

2.2 擬線形系

(2.4) 定義

つぎの状態方程式で与えられる系を擬線形系といい, $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ と表わす。

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x(t+1) = Fx(t) + g(\omega(t+1)) \\ \gamma(t) = h^0 + hx(t) \end{cases}$$

ただし X は体 K 上の線形空間であり, $x(t) \in X, F \in L(X), \omega(t) \in U, g \in F(U, X), \gamma(t) \in Y, h^0 \in Y, h \in L(X, Y)$ である。

擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対し関数

$$\alpha_\sigma: U^* \rightarrow Y; \omega \mapsto \alpha_\sigma(\omega) = h^0 + h \left(\sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} g(\omega(j)) \right)$$

を σ の挙動(behavior)という。関数

$$GI_\sigma: U \rightarrow F(N, Y); u \mapsto (GI_\sigma)(u); t \mapsto hF^{t-1}g(u)$$

を σ の補正一般インパルス応答という。

時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し $\alpha_\sigma = \alpha$ となる擬線形系 σ は α を実現するという。

$\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ を擬線形系とする。可到達集合 $\{\sum F^{|\omega|-j}g(\omega(j)); \omega \in U^*\}$ の線形包が X に一致するとき, σ は擬可到達であるといわれる。任意の $m \in N$ に対

し、 $hF^m x=0$ ならば $x=0$ が成り立つとき、 σ は可観測であるといわれる。擬可到達であり、可観測である σ は正準系であるといわれる。(定義(2.4)終わり)

(注意1) 擬可到達は状態空間 X が入力による影響を必要最小限もっていることを示し、可観測は出力から見て状態空間が最も整理されていることを示す。

(注意2) 擬線形系 σ の挙動 α_σ と σ の補正一般インパルス応答 GI_σ とは1対1に対応する。

(2.5) 定義

$\sigma_1=((X_1, F_1), g_1, h_1, h^0)$, $\sigma_2=((X_2, F_2), g_2, h_2, h^0)$ を擬線形系とする。 $TF_1=F_2T$, $Tg_1=g_2$ および $h_1=h_2T$ を満たす線形写像 $T: X_1 \rightarrow X_2$ を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の擬線形系射という。 T が全単射であるとき T を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の同形射という。

擬線形系 $\sigma=((X, F), g, h, h^0)$ の状態空間 X が有限次元 [n 次元] であるとき、 σ を有限次元 [n 次元] 擬線形系という。 n 次元擬線形系は、一般性を失うことなく、 $\sigma=((K^n, F), g, h, h^0)$ と表わすことができる²⁾。

ただし、 $F \in K^{n \times n}$, $h \in K^{1 \times n}$ である。

3. 擬線形系の部分実現問題

本章以降は入力値集合 U を有限、すなわち $U=\{u_i; 1 \leq i \leq m\}$ とする。このとき、擬線形系 $\sigma=((X, F), g, h, h^0)$ の写像 $g: U \rightarrow K^n$ は $\{g(u_i); 1 \leq i \leq m\}$ により完全に表わされる。この仮定は文献2)で示されたようにそれほど特殊な仮定ではない。その例として区分的線形化法 (piecewise-linear method)^{6),7)} により非線形性をもつ電界効果トランジスタのある電気回路を取り扱えることを示した。その手法は隣接した折点(ここの $u_i; 1 \leq i \leq m$ に相当する)により分割してできる区間ごとに1次関数で近似することにより写像 $g: U \rightarrow K^n$ をたとえば写像 $g: V \rightarrow K^n$ に拡張しようとするものである。ただし、 V は実数の集合 R のある有界集合である。

この章において、部分実現問題を論じるのに必要な擬可到達性および可観測性について考察する。そこで、任意に与えられた有限長の因果律・時不変性を満たす入力データに対する部分実現問題を論じる。

(3.1) 定義

擬線形系 $\sigma=((X, F), g, h, h^0)$ が

$$X=\left\{\left\{\sum_{j=1}^{\omega} \lambda(j, \omega(j)) F^{j-1} g(\omega(j))\right\}; \lambda(j, \omega(j)) \in K,\right.$$

$$\left.\omega \in U^*, |\omega| \leq p\right\}$$

を満たすとき、 σ を p -擬可到達であるという。ただし p はある正数である。

擬線形系 $\sigma=((X, F), g, h)$ が任意の $t(0 \leq t \leq q)$ に対して $hF^t x=0$ ならば $x=0$ が成り立つとき σ を q -可観測

であるという。ただし q はある正数である。

(3.2) 定義

正の整数 M に対し、関数 $\alpha: U^*(\leq M) \rightarrow Y$ を時不変入力応答関数 $\alpha: U^* \rightarrow Y$ の $U^*(\leq M)$ への制限とする。その時、関数 $\alpha: U^*(\leq M) \rightarrow Y$ を部分時不変入力応答関数という。ただし、 $U^*(\leq M)=\{\omega \in U^*; |\omega| \leq M\}$ である。

定理(2.2)によれば 時不変入力応答関数は同等的に m 個の補正一般インパルス応答 $\{GI(u_i) \in F(N, Y); 1 \leq i \leq m\}$ により表わすことができる。

それと同様にして、部分時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*(\leq M), Y)$ は同等的に関数 $GI(u_i) \in F(M, Y), 1 \leq i \leq m$ により表わすことができる(定理(2.2)の注を参照)。それらの対応は次式により与えられる。

$$(GI(u_i))(t) = \alpha(u_i^{t+1}) - \alpha(u_i^t),$$

$$u \in U, 0 \leq t \leq M$$

ただし、 $M=\{0, 1, \dots, M\}$ である。

$$GI(u_i) \in F(M, Y), 1 \leq i \leq m$$

を部分補正一般インパルス応答という。

擬線形系 $\sigma=((X, F), g, h, h^0)$ が

$$hF^t g(u_i) = (GI(u_i))(t), 1 \leq i \leq m$$

を満たすとき σ は部分補正一般インパルス応答 GI を部分実現するという(定義(2.4)参照)。

(3.3) 部分実現問題

与えられた部分補正一般インパルス応答 $GI(u_i) \in F(M, Y), 1 \leq i \leq m$ に対しその最小次元部分実現系を求め、できればそれらが同形を除いて一意であることを示せ。

(3.4) 命題

任意の部分補正一般インパルス応答 $GI(u_i) \in F(M, Y), 1 \leq i \leq m$ に対し、それを部分実現する有限次元擬線形系が存在する。したがって $GI(u_i)$ の最小次元部分実現系が存在する。

(証明) 付録(B.3)参照。

部分補正一般インパルス応答の最小次元部分実現系は一般的に同形の意味でさえも一意ではない。そこで 自然部分実現系の概念を導入し、自然部分実現系が存在すればそれは最小次元の部分実現系であり、一意であることを示す。

(3.5) 定義

部分補正一般インパルス応答 $GI(u_i) \in F(M, Y), 1 \leq i \leq m$ および $0 \leq p+q < M$ を満たす正の整数 p, q に対し p -擬可到達、 q -可観測となる $GI(u_i)$ の部分実現系 σ を $GI(u_i)$ の自然部分実現系という。

(3.6) 定義(付録(A.11)参照)

部分時不変入力応答関数 $\alpha: U^*(\leq M) \rightarrow Y$ に対して α の有界入出行列という。

$$\mathcal{H}_{\alpha(p, M-p)}(s, u) = \begin{bmatrix} \vdots \\ \dots \underline{\alpha}(u^{s+t+1}) - \underline{\alpha}(u^{s+t}) \end{bmatrix}$$

ただし $0 \leq s \leq p$, $0 \leq t \leq M-p$, $u \in U$ である.

有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(p, M-p)}$ の列ベクトルを便宜的に $S^i \underline{GI}(u) \in F(M-p, Y)$ と表わす.

(3.7) 定理

部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ に対する有界入出力行列を $\mathcal{H}_{\alpha(\cdot)}$ とする. そのとき $\underline{GI}$ の自然部分実現系が存在するための必要十分条件は $0 \leq p < M$ を満たすある整数 p に対し

$$\begin{aligned} \text{rank } \mathcal{H}_{\alpha(p, M-p)} &= \text{rank } \mathcal{H}_{\alpha(p, M-p-1)} \\ &= \text{rank } \mathcal{H}_{\alpha(p+1, M-p-1)} \end{aligned}$$

が成り立つことである.

(証明) 付録(B.8)参照.

(3.8) 定理

与えられた部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ の自然部分実現系が存在するための必要十分条件は $\underline{GI}(u_i)$ の最小次元の部分実現系が同形を除いて一意であることである.

(証明) 付録(B.10)参照.

4. 部分実現アルゴリズム

文献2)において, 擬可到達標準系を導入し有限次元正準擬線形系の同形類の代表元として一つの擬可到達標準系があることを示した. さらに与えられた時不変入力応答関数の無限入出力行列の階数が有限であるとき, 不変入力応答関数を実現する擬可到達標準系を求める手順を与えた. この章では, 部分補正一般インパルス応答が自然部分実現系の条件を満たすとき, それを部分実現する最小次元擬線形系(特に擬可到達標準系)を求めるアルゴリズムを与える.

(4.1) 定義

入力値集合を U を $U := \{u_j; 1 \leq j \leq m\}$ とし, 写像 $\|: N \times U \rightarrow N$ を

$$(i, u_j) \mapsto \|(i, u_j)\| = m * i + j$$

と定義し $\|(i, u_j)\|$ を $(i, u_j) \in N \times U$ の数値という. ここで, 集合 $N \times U$ に対し, 全順序関係をこの数値により定義する. すなわち

$$(a, u_b) \geq (p, u_a) \Leftrightarrow \|(a, u_b)\| \geq \|(p, u_a)\|$$

とする.

(4.2) 定理

与えられた部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ が定理(3.7)の条件を満たすとす

る. そのとき $\underline{GI}(u_i)$ の自然部分実現系(擬可到達標準系)

$$\sigma_s = ((K^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$$

がつぎの手順により得られる. ただし $\underline{GI}(u_i)$ の有界入出力行列を $\mathcal{H}_{\alpha(\cdot)}$ に対し $n = \text{rank } \mathcal{H}_{\alpha(p, M-p)}$ である.

① 有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(p, M-p)}$ の列ベクトル $\{S^i(\underline{GI}(u)); u \in U, 0 \leq i \leq n-1\}$ の中から集合 $N \times U$ の数値の順に, 1 次独立ベクトルを選ぶ.

② 状態空間を K^n とする. 写像 $g_s: U \rightarrow K^n$ を $I_i = 0$ なる $u_{ji} \in U$ に対し $g_s(u_{ji}) = e_i$ とし $(0, u_{ji}) < (0, u_j) < (0, u_{ji+1})$ (または $(1, u_{ji+1})$) なる $u_j \in U$ に対し

$$g_s(u_j) = \sum_{i=1}^j \alpha_i e_i, \alpha_i \in K$$

とする.

③ 線形写像 $h_s: K^n \rightarrow Y$ を

$$\begin{aligned} h_s := & [\underline{\alpha}(u_{j1}^{i+1}) - \underline{\alpha}(u_{j1}^i), \underline{\alpha}(u_{j2}^{i+1}) \\ & - \underline{\alpha}(u_{j2}^i), \dots, \underline{\alpha}(u_{jn}^{i+1}) - \underline{\alpha}(u_{jn}^i)] \end{aligned}$$

とする.

④ $F_s = [f^1, f^2, \dots, f^n] \in K^{n \times n}$, $f^i \in K^n$ を

$$S^{i+1} \underline{GI}(u) = \sum f_{ij} S^i \underline{GI}(u),$$

$$f_{ij} \in K \text{ に対し } f^i := [f_{i1}, f_{i2}, \dots, f_{in}]^T$$

と定義する.

⑤ $h^0 = \underline{\alpha}(I)$ とする.

ただし, $e_i := [00 \cdots 010 \cdots 0]^T \in K^n$, T は転置を表わす.

(証明) 付録(C.1)を参照

5. 実時間部分実現アルゴリズム

第4章において 理想的な(多重実験により得られる有限個の入出力データに基づく)部分実現問題を論じた. 一般的に, 非線形系の部分実現問題を解くには多重実験が要求される. この章では 4 章の成果に基づいて単一実験による部分実現問題(実時間部分実現問題)を論じる. したがって 多重実験により得られた入出力データと同じ効果をもたらす単一実験による入出力データを得ることを目的とする.

(5.1) 実時間部分実現問題

考察対象である時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が有限次元擬線形系の挙動であるとする. そのとき時不変入力応答関数 α および単一実験である有限個の入出力データ $\{\alpha(\underline{\omega}) \in Y; \text{ある有限長の入力 } \underline{\omega} \in U^*\}$ に対し

$$\alpha_\sigma(\omega) = \alpha(\omega), \forall \omega \in U^*$$

となる正準擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ および有限長の入力 $\underline{\omega} \in U^*$ を求めよ.

(5.2) 定義

考察対象である有限次元擬線形系に対し, 実時間部分実現問題の解が存在するときの入力 $\underline{\omega} \in U^*$ を(実時間部分)実現信号という.

(注意) 実現信号 $\underline{w} \in U^*$ は, 単一実験であるが見掛け上の多重実験の効果をもたらす.

(5.3) 補題

与えられた時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が L 次元以下の擬線形系の挙動であると仮定する. そのときとつぎの手順により有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(L-1, p)}$ が得られる入力 $\underline{w} \in U^*$ が存在する. ただし $P = \max \{L_1, L_2, \dots, L_m\}$ である.

1) 列ベクトル $\{S_i^* \underline{GI}(u_1) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_1 - 1\}$ が一次独立であり $\{S_i^* \underline{GI}(u_1) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_1\}$ が一次従属となる整数 L_1 を見いだす. すなわち, 入力 $w_1 = u_1^{L_1+L}$ を加える.

2) 今までの入力 w_1 に入力 $w_2 := u_1^{L_1+L-1} | u_2$ を付け加えて, 列ベクトル $\{S_i^* \underline{GI}(u_j) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq 2\}$ が一次独立であり $\{S_i^* \underline{GI}(u_j), S_i^{L_2} \underline{GI}(u_2) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq 2\}$ が一次従属となる整数 L_2 を見いだす.

3) 今までの入力 $w_2 | w_1$ に入力 $w_3 := u_1^{L_1+L-1} | u_3$ を付け加えて列ベクトル $\{S_i^* \underline{GI}(u_j) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq 3\}$ が一次独立であり $\{S_i^* \underline{GI}(u_j), S_i^{L_3} \underline{GI}(u_3) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq 3\}$ が一次従属となる整数 L_3 を見いだす.

⋮

m) 今までの入力 $w_{m-1} | \dots | w_2 | w_1$ に入力 $w_m := u_1^{L_1+L-1} | u_m$ を付け加えて, 列ベクトル $\{S_i^* \underline{GI}(u_j) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq m\}$ が一次独立であり $\{S_i^* \underline{GI}(u_j), S_i^{L_m} \underline{GI}(u_m) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq m\}$ が一次従属となる整数 L_m を見いだす. $\underline{w} = w_m | w_{m-1} | \dots | w_2 | w_1$ とする.

m+1) 以上により得られた列ベクトル $\{S_i^* \underline{GI}(u_j) \in K^{L-1}; 0 \leq i \leq L_j - 1, 1 \leq j \leq m\}$ を列ベクトルとして有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(L-1, p)}$ が得られる.

(証明) 付録(C.2)を参照.

(5.4) 定理

与えられた時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が L 次元以下の擬線形系の挙動であると仮定する. そのとき α を実現する正準擬線形系 $\sigma_s = ((K^n, F_s), g_s, h_s, h^0)$ を求める実現信号 $\underline{w} \in U^*$ が存在し, σ_s はつぎのようにして得られる. [補題(5.3)で得られた有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(p, L-1)}$ に対して, 定理(4.2)での部分実現アルゴリズムを適用する.]ただし $p = \max L_i$ である.

(証明) 定理[4.2], 補題[5.3]より明らかである.

6. おわりに

われわれは離散時間非線形系の因果律および時不変を満たすブラック・ボックスの入出力写像(同等的に, 時不

変入力応答関数)に対する擬線形系による部分実現および実時間部分実現問題を提起し, つぎの主な成果を得た.

1) 任意に与えられた有限長の入出力データ(同等的に部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}$) に対し $\underline{GI}$ を部分実現する最小次元擬線形系が必ず存在する.

2) 部分補正一般インパルス応答関数 $\underline{GI}$ に対し, 自然部分実現系なる概念を導入し, $\underline{GI}$ の自然部分実現系が存在するための必要十分条件が $\underline{GI}$ の有界入出力行列の階数により与えられる.

3) 部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}$ の自然部分実現系の存在条件と $\underline{GI}$ の最小次元部分実現系が一意であることと同等である.

4) 与えられた部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}$ から $\underline{GI}$ の自然部分実現系を求めるアルゴリズムの導出.

さらに, これらの理想的な(多重実験による)部分実現問題の成果を基につぎの単一実験に関する成果を得た.

5) 因果律および時不変を満たすブラック・ボックスの入出力写像が有限次元擬線形系で表わせると仮定する. そのとき, その最小次元部分実現系を得る実現信号(入力系列)が存在する.

本論文の部分実現理論は定係数線形系の部分実現理論体系の擬線形系への拡張であることは容易にわかる³⁾. 非線形系にもかかわらず実時間部分実現問題が取扱可能なとなったのは対象のブラック・ボックスを補正一般インパルス応答関数により記述できたことと時不変性による. 本論文の影響は大きい. たとえば, 擬線形系のサブクラスの系として概線形系がある⁷⁾. その概線形系の具体例として“いわゆる”線形系(初期状態が零でない線形系)がある⁷⁾. 本論文の実時間部分実現理論をその系に適用すれば, 従来の線形系の部分実現問題と未知の状態を既知とする推定問題との二つの問題が一つの“いわゆる”線形系の実時間部分実現問題として考えられ, その系が実時間(単一実験)により決定できることを示唆する.

参考文献

- 1) 長谷川, 松尾: 離散時間・擬線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 28-2, 199/207 (1992)
- 2) 長谷川, 松尾: 離散時間・有限次元擬線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 29-9, 1072/1080 (1993)
- 3) R. E. Kalman et al.: Topics in Mathematical System Theory, McGraw-Hill (1969)
- 4) T. Matsuo: Realization Theory of Continuous Time Dynamical Systems, Lecture Notes in Control & Information Sciences, 32, Springer-Verlag (1981)
- 5) L. O. Chua: Introduction to Nonlinear Network Theory, McGraw-Hill (1969)
- 6) 牛田, 森: 非線形回路の数値解析法, 森北出版 (1987)
- 7) 松尾, 長谷川: 離散時間・概線形系の実時間部分実現理論, 第35回自動制御連合講演会前刷, 71/72 (1992)

《付 録 A》

付録 B に必要な事柄を文献 1), 2) から抽出する.

(A.1) 定義

擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対し 対 (X, F) を自由運動といい, 組 $((X, F), g)$ を入力写像付き自由運動という. さらに組 $((X, F), h)$ を出力機構付き自由運動という.

(A.2) 擬線形系の例

$A(N \times U, K) := \{\text{関数 } \lambda: N \times U \rightarrow K; \lambda = \sum \lambda(n, u) e_{(n, u)} \text{ (有限個の和)}, n \in N, u \in U, \lambda(n, u) \in K\}$.

ただし $e_{(n, u)}$ は次式により与えられる. $m, n \in N, u, u' \in U$ に対し

$$e_{(n, u)}(m, u') = 1 \text{ (} m = n, u' = u \text{ のときのみ),}$$

$$e_{(n, u)}(m, u') = 0 \text{ (} m \neq n \text{ または } u' \neq u \text{ のとき).}$$

そのとき, $A(N \times U, K)$ は線形空間である. $A(N \times U, K)$ の基底 $\{e_{(n, u)}: n \in N, u \in U\}$ に対し S_r を

$$S_r e_{(n, u)} = e_{(n+1, u)}$$

とすれば $S_r \in L(A(N \times U, K))$ である. したがって, 対 $(A(N \times U, K), S_r)$ は自由運動である. 写像 $\eta: U \rightarrow A(N \times U, K)$ を任意の $u \in U$ に対し $\eta(u) := e_{(0, u)}$ と定義する. 任意の時不変入力応答関数 $a \in F_s(U^*, Y)$ に対し線形写像 $\underline{a}: A(N \times U, K) \rightarrow Y$ を次式により定義する.

$$\underline{a}(e_{(n, u)}) = a(u^{n+1}) - a(u^n)$$

ただし $e_{(n, u)} \in A(N \times U, K)$ であり, $u^0 := I$ である.

そこで組

$$\sigma = ((A(N \times U, K), S_r), \eta, \underline{a}, \alpha(I))$$

は α を実現する擬可到達な擬線形系である.

(A.3) 擬線形系の例

$F(N, Y) := \{\text{関数 } f: N \rightarrow Y, \gamma \in F(N, Y), t \in N \text{ に対し } (S_t \gamma)(t) := \gamma(t+1) \text{ と定義すれば } S_t \in L(F(N, Y)) \text{ であり, 対 } (F(N, Y), S_t) \text{ は自由運動である. } \alpha \in F(U^*, Y) \text{ を任意の時不変入力応答関数とする. ここで 写像 } \xi: U \rightarrow F(N, Y) \text{ を } u \in U, t \in N \text{ に対し}$

$$(\xi(u))(t) = \alpha(\omega|u) - \alpha(\omega)$$

により定義する. ただし ω は長さ t の任意の入力である. さらに線形写像 $0: F(N, Y) \rightarrow Y$ を $\gamma \mapsto \gamma(0)$ により定義する. そこで組

$$\sigma = ((F(N, Y), S_t), \xi, 0, \alpha(I))$$

は α を実現する可観測な擬線形系である.

(A.4) 定義

$(X_1, F_1), (X_2, F_2)$ を自由運動とする. $TF_1 = F_2 T$ を満たす線形写像 $T: X_1 \rightarrow X_2$ を $(X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ の自由運動射という.

$g_1, g_2 \in F(U, X)$ に対し $Tg_1 = g_2$ を満たす自由運動射

$T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $((X_1, F_1), g_1) \rightarrow ((X_2, F_2), g_2)$ の入力写像付き自由運動射という.

線形出力機構 $h_1, h_2 \in L(X, Y)$ に対し $h_1 = h_2 T$ を満たす自由運動射 $T: (X_1, F_1) \rightarrow (X_2, F_2)$ を $((X_1, F_1), h_1) \rightarrow ((X_2, F_2), h_2)$ の出力(機構)付き自由運動射という.

(A.5) 補題

$\sigma_1 = ((X_1, F_1), g_1, h_1, h^0), \sigma_2 = ((X_2, F_2), g_2, h_2, h^0)$ を擬線形系とし, T を $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ の擬線形系射とする. そのとき σ_1 の挙動 α_{σ_1} と σ_2 の挙動 α_{σ_2} とは等しい.

(A.6) 定義

擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対し線形写像

$$G: A(N \times U, K) \rightarrow X; e_{(n, u)} \rightarrow F^n g(u)$$

は自由運動射 $G: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (X, F)$ であり, G は g に対応する線形入力写像といわれ, 線形写像

$$H: X \rightarrow F(N, Y); x \mapsto Hx[t \mapsto hF^t k]$$

は自由運動射 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ であり, H は h に対応する線形観測写像といわれる.

特に自由運動射

$$A: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$$

は線形入出力写像といわれる.

(A.7) 命題

任意の入力写像付き自由運動 $((X, F), g)$ に対し, 線形入力写像 $G: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (X, F)$ が唯一に対応し, $g(u) = G(e_{(0, u)})$ によりこの対応は全単射である. 任意の出力機構付き自由運動 $((X, F), h)$ に対し, 線形観測写像 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$ が唯一に対応し, $h = 0 \cdot H$ によりこの対応は全単射である.

(A.8) 補題

任意の線形入出力写像

$$A: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_t)$$

に対し時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ が次式により対応しこの対応は全単射である.

$$\alpha(u^{s+t+1}) - \alpha(u^{s+t}) = (A(e_{(s, u)}))(t)$$

ただし $s, t \in N, u \in U$ である

ある正数 p に対し, $\langle A(N \times U, K)_p \rangle := \{\sum \lambda(q, u) e_{(q, u)} \in A(N \times U, K), q \leq p\}$ とし, 写像 $J_p: \langle A(N \times U, K)_p \rangle \rightarrow A(N \times U, K)$ を標準的単射とする.

(A.9) 定義

入力写像付き自由運動 $((X, F), g)$ が

$$X = \left\langle \left\{ \sum_{j=1}^{|w|} \lambda(j, \omega(j)) F^{j-1} g(\omega(j)); \right. \right.$$

$$\left. \lambda(j, \omega(j)) \in K, \omega \in U^*, |w| \leq p \right\rangle$$

を満たすとき, $((X, F), g)$ を p -擬可到達であるという.

(注意) $((X, F), g)$ は p -擬可到達であることと写像 $G_p := G \cdot J_p: \langle A(N \times U, K)_p \rangle \rightarrow X$ が全射であることと同等である. ただし, G は $((X, F), g)$ に対応する線形

入力写像である。

ある正数 q に対し $q = \{0, 1, \dots, q\}$ とし, $P_q: F(N, Y) \rightarrow F(q, Y)$ を標準的全射とする。また, $\underline{S}_i$ を次式により定義する。

$$\underline{S}_i: F(q, Y) \rightarrow F(q-1, Y); \gamma \mapsto \underline{S}_i \gamma[t \mapsto \gamma(t+1)]$$

(A.10) 定義

出力機構付自由運動 $((X, F), g, h)$ が任意の $t (0 \leq t \leq q)$ に対し $hF^t x = 0$ ならば $x = 0$ が成り立つとき $((X, F), g, h)$ を q -可観測であるという。

(注意) $((X, F), g, h)$ が q -可観測であることと線形写像 $H_q := P_q H: X \rightarrow F(q, Y)$ が単射であることと同等である。ただし, H は $((X, F), h)$ に対応する線形観測写像 $H: (X, F) \rightarrow (F(N, Y), S_i)$ である。

(A.11) 有界入出行列の導出

文献1)において(補題(A.8)参照), 時不変入力応答関数 $\alpha \in F(U^*, Y)$ に対し線形入出力写像

$$A: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_i),$$

$$(A(e_{(s,u)}))(t) = \alpha(u^{s+t+1}) - \alpha(u^{s+t})$$

を導入した。ただし $s, t \in N, u \in U$ である。

それと同様にして部分時不変入力応答関数 $\underline{\alpha}: U^* (\leq M) \rightarrow Y$ に対して部分線形入出力写像

$$A_{p,M-p}: \langle A(N \times U, K)_p \rangle \rightarrow (F(M-p, Y);$$

$$e_{(s,u)} \mapsto A_{p,M-p}(e_{(s,u)})[; t \mapsto$$

$$\underline{\alpha}(u^{s+t+1}) - \underline{\alpha}(u^{s+t})]$$

を考えることができる。その $A_{p,M-p}$ は

$$A_{p,M-p} := P_{M-p} \cdot A \cdot J_p$$

で与えられる。

その $A_{p,M-p}$ の行列表現が α の有界入出行列 $\mathcal{H}_{\alpha(p,M-p)}$ となる。

〔付 録 B〕

この付録で第3章の証明を行う。記号□は「証明終わり」を表わす。

(B.1) 命題

$\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle$ の部分空間 S がつぎの条件を満たすとする。

1) $\lambda \in \langle A(N \times U, K)_p \rangle \cap S$ ならば, $S_r \lambda \in S$ が成り立つ。

2) 任意の $u \in U$ に対し

$$e_{(n+1,u)} - \sum \lambda(q, u') e_{(q,u')} \in S$$

となる $\lambda(q, u') \in K, 0 \leq q \leq p$ が存在する。

そのとき, $\underline{S} \cap \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle = S$ となり, $\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S$ と $\langle A(N \times U, K) / \underline{S} \rangle$ とが線形空間として同形となる。 S_r に関しての不変部分空間 $\underline{S} \subset \langle A(N \times U, K) \rangle$ が唯一存在する。さらに入力写像付き自由運動 $((A(N \times U, K) / \underline{S}, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ は p -擬可到達である。ただし, $\hat{\eta}(u) =$

$e_{(0,u)} + \underline{S}, \forall u \in U$ であり, $\underline{S}_r(\lambda + \underline{S}) = S_r \lambda + \underline{S}$ である。

(証明) $J_{p,p+1}: \langle A(N \times U, K)_p \rangle \rightarrow \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle$ を標準的単射とし, $\Pi_s: \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle \rightarrow \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S; \lambda \mapsto \lambda + S$ を標準的全射とする。そのとき条件2)により $\Pi_s \cdot J_{p,p+1}$ は全射である。また, 条件1)により任意の $\lambda \in S$ に対し $S_r \lambda \in S$ が成り立つ。したがって $\underline{S}_r(\lambda + S) = S_r \lambda + S, \forall \lambda \in \langle A(N \times U, K)_p \rangle$ により $\underline{S}_r \in L(\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r)$ は一意に定義できて $((\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ は入力写像付き自由運動となり p -擬可到達である。ただし, $\hat{\eta}(u) := e_{(0,u)} + S$ である。 $((\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ に対応する線形入力写像 $G: (A(N \times U, K), S_r) \rightarrow (\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r)$ は命題(A.7)により一意である。 $G_{p+1} := G \cdot J_{p+1}$ とすれば $\ker G_{p+1} = S$ であり $\underline{S} := \ker G$ は $\underline{S} \cap \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle = S$ を満たし G が線形入力写像であることから $\underline{S}$ は S_r に関しての不変部分空間である。さらに G が全射であるから $((\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ と $((A(N \times U, K) / \underline{S}, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ とは同形である。従って $((A(N \times U, K) / \underline{S}, \underline{S}_r), \hat{\eta})$ は p -擬可到達である。 $\underline{S}$ の一意性は $\underline{S}_r$ と G の一意性による。 □

(B.2) 命題

$F(q+1, Y)$ の部分空間 Z がつぎの条件を満たすとする。

1) 合成写像 $\pi \cdot j: Z \rightarrow F(q+1, Y) \rightarrow F(q, Y)$ が単射である。ただし, j は標準的単射であり, π は標準的全射である。

2) $\text{im}(\underline{S}_i \cdot j) \subseteq \text{im}(\pi \cdot j)$ が $F(q, Y)$ において成り立つ。そのとき, 写像 $P_q|_x: X \rightarrow Z$ が全射となる自由運動 (X, S_i) が唯一存在する。さらに, 出力機構付自由運動 $(X, S_i), 0)$ は q -可観測である。

ただし, $P_q|_x$ は標準的全射 $P_q: F(N, Y) \rightarrow F(q, Y)$ の X への制限である。

(証明) 条件1), 2)により任意の $z \in Z$ に対し $Fz = (\pi \cdot j)^{-1} \underline{S}_i j(z)$ が定義できて $F \in L(Z)$ となる。したがって (Z, F) は自由運動である。線形写像 $0: Z \rightarrow Y; \gamma \mapsto \gamma(0)$ により $((Z, F), 0)$ は可観測な出力機構付き自由運動であり, 写像 $\pi \cdot j: Z \rightarrow F(q, Y)$ が単射であるから $((Z, F), 0)$ は q -可観測である。

$((Z, F), 0)$ に対応する線形観測写像 $: (Z, F) \rightarrow (F(N, Y), S_i)$ を H とすれば命題(A.7)により $0 = 0 \cdot H$ であり, 文献1)の命題(5.8)により H は単射である。ここで, $X := \text{im } H$ とすれば $((X, S_i), 0)$ と $((Z, F), 0)$ とは出力機構付き自由運動として同形である。ゆえに $((X, S_i), 0)$ は q -可観測である。なお, 線形写像 $H^{-1}: X \rightarrow Z$ は明らかに標準的全射 $P_q: F(N, Y) \rightarrow F(q, Y)$ の X への制

限 $P_{q,x}$ である。 X の一意性は F および線形観測写像 H の一意性から得られる。 $\square$

(B.3) 命題(3.4)の証明

任意の $u \in U$, $t \in M = \{0, 1, \dots, M\}$ に対し $(GI(u))(t) = (\underline{GI}(u))(t)$ とし $t \in N \setminus M$ に対し $(GI(u))(t) = 0$ とする。すなわち部分時不変入力応答関数 $\underline{a} \in F(U^*(\leq M), Y)$ に対し $a(u^{t+1}) = \underline{a}(u^{t+1})$, $\forall u \in U$, $\forall 0 \leq t \leq M$ とし, $a(u^{t+1}) = a(u^t)$, $\forall u \in U$, $\forall t > M$ として時不変入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)$ を定める。そのとき $S_i(\zeta(u))(t) = a(u^{t+i+1}) - a(u^{t+i}) = S_i(GI(u))(t)$, $i, t \in N$ が成り立つ。 GI (同等的に a) の決め方により線形空間

$$\langle S_i(\zeta(u); i \in N, u \in U) \rangle =: W$$

は有限次元である。ゆえに組

$$\sigma = ((W, S_i), \zeta, O, \alpha(l))$$

は α を実現する有限次元擬線形系である。したがって $\underline{GI}$ (同等的に $\underline{a}$) を部分実現する有限次元擬線形系が存在する。ゆえに最小次元部分実現系が存在する。(証明終)

つぎの補題の可換図は明らかである。

(B.4) 補題

部分補正一般インパルス応答関数 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ (同等的に 部分時不変入力応答関数 $\underline{a} \in F(U^*(\leq M), Y)$ に対応する部分線形入出力写像を $A_{(\cdot)}$ とする。そのときつぎの 1), 2) の図が可換である。

ただし, $\forall p < M$.

1)

$$\begin{array}{ccc} \langle A(N \times U, K)_p \rangle & \xrightarrow{A_{p, M-p}} & F(M-p, Y) \\ \downarrow \underline{i} & & \downarrow \pi \\ \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle & \xrightarrow{A_{p+1, M-p-1}} & F(M-p-1, Y) \end{array}$$

ただし $\underline{i}$ は標準的単射であり, π は標準的全射である。

2)

$$\begin{array}{ccc} \langle A(N \times U, K)_p \rangle & \xrightarrow{A_{p, M-p}} & F(M-p, Y) \\ \downarrow S_i & & \downarrow \underline{S}_i \\ \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle & \xrightarrow{A_{p+1, M-p-1}} & F(M-p-1, Y) \end{array}$$

(B.5) 命題

部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ に対応する部分線形入出力写像を $A_{(\cdot)}$ とする。そのとき $0 \leq p_2 \leq p_1 \leq M$ を満たす整数 p_1, p_2 に対し $\text{im } A_{p_2+1, M-p_2-1} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1}$ ならば $\text{im } A_{p_1, M-p_1-1} = \text{im } A_{p_2, M-p_1}$ が成り立つ。

(証明) 部分補正一般インパルス応答関数 $\underline{GI}$ に対応する部分時不変入力応答関数を $\underline{a}$ とする。 $0 \leq n \leq M-p_2$

-1 を満たす任意の整数 n に対し $\text{im } A_{p_2+1, M-p_2-1} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1}$ ならば

$$\text{im } A_{p_2+1+n, M-p_2-1-n} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1-n}$$

が成り立つこととこの命題が成り立つことと同等である。そこで前者を帰納法により証明する。 $n=0$ のとき仮定により成り立つ。 $n=k$ のとき成り立つ、すなわち

$$\text{im } A_{p_2+1+k, M-p_2-1-k} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1-k}$$

が成り立つとする。そのとき任意の $u \in U$ に対し $F(M-p_2-1-k, Y)$ の意味で

$$\underline{a}(u^{p_2+1+k+t+1}) - \underline{a}(u^{p_2+1+k+t}) = \sum \lambda(m, u_i)$$

$$a(u_i^{m+t+1}) - a(u_i^{m+t}), 0 \leq t \leq M-p_2-1-k$$

となる $\lambda(m, u_i) \in K$, $u_i \in U$, $0 \leq m \leq p_2$ が存在する。したがって $F(M-p_2-1-k-1, Y)$ の意味で

$$\underline{S}_i(\underline{a}(u^{p_2+1+k+t}) - \underline{a}(u^{p_2+k+t})) = \sum \lambda(m, u_i)$$

$$\underline{S}_i(\underline{a}(u_i^{m+t}) - \underline{a}(u_i^{m+t-1}))$$

が成り立つ。ゆえに

$$\text{im } A_{p_2+1+k+1, M-p_2-1-k-1} = \text{im } A_{p_2+1, M-p_2-1-k-1}$$

が成り立つ。一方, $\text{im } A_{p_2+1, M-p_2-1} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1}$ が成り立つことと任意の $j \leq M-p_2-1$ に対し $\text{im } A_{p_2+1, j} = \text{im } A_{p_2, j}$ が成り立つことと同じである。したがって, $\text{im } A_{p_2+1+k+1, M-p_2-1-k-1} = \text{im } A_{p_2, M-p_2-1-k-1}$ が成り立つ。それゆえに $n=k+1$ のとき成り立つ。 $\square$

(B.6) 命題

部分補正一般インパルス応答関数 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ に対応する部分線形入出力写像を $A_{(\cdot)}$ とする。そのとき $0 \leq p_2 < p_1 < M$ を満たす整数 p_1, p_2 に対し $\ker A_{p_1, M-p_1} = \ker A_{p_1, M-p_1-1}$ ならば $\ker A_{p_2, M-p_1-1} = \ker A_{p_2, M-p_2}$ が成り立つ。

(証明) 命題(B.6)は命題(B.5)の双対である。したがって, 命題(B.5)と同様に証明できる。 $\square$

部分時不変入力応答関数 $\underline{a}: U^*(\leq M) \rightarrow Y$, 同等的に部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ の部分実現系, 自然部分実現系に関してつぎの補題が定義により容易に得られる。

(B.7) 補題

部分補正一般インパルス応答 $\underline{GI}(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$, 擬線形系 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ に対しつぎの事柄が成立する。

1) σ が $\underline{GI}$ の部分実現系であることと $0 \leq p < M$ なる任意の整数 p に対し下図が可換であることと同等である。

2) σ が $\underline{GI}$ の部分実現系であることと $0 \leq p < M$ なる整数 p に対し下図が可換であり, G_p が全射および H_{M-p-1} が単射であることと同等である。

$$\begin{array}{ccccc}
 G_p & H_{M-p} & & & \\
 \langle A(N \times U, K)_p \rangle & \longrightarrow & X & \longrightarrow & F(M-p, Y) \\
 S_r \downarrow & & F \downarrow & & \downarrow S_l \\
 G_{p+1} & H_{M-p-1} & & &
 \end{array}$$

$$\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle \longrightarrow X \longrightarrow F(M-p-1, Y)$$

ただし G_p, H_q は g に対応する線形入力写像 G, h に対応する線形観測写像 H に対し $G_p := G \cdot J_p, H_q := P_q \cdot H$ である。

(B.8) 定理(3.7)の証明

有界入出力行列 $\mathcal{H}_{\alpha(\cdot)}$ により与えられている条件を GI に対応する部分線形入出力写像 $A_{(\cdot)}$ により同等的に $*$: $\text{im } A_{p, M-p-1} = \text{im } A_{p+1, M-p-1}$ および $**$: $\text{ker } A_{p, M-p} = \text{ker } A_{p+1, M-p-1}$ とに書き換えられる。まず最初に上記の条件 1), 2) が必要であることを示す。 $\sigma = ((X, F), g, h, h^0)$ を GI (同等的に $\underline{a}$) の自然部分実現系とする。そのとき $p+q < M$ を満たす $p, q \in N$ が存在して σ は p -擬可到達であり q -可観測である。

G を g に対応する線形入力写像, H を h に対応する線形観測写像とし, 整数 p', q' を $p' \geq p, q' \geq q$ とする。そこで $G_{p'} := G \cdot J_{p'}$ は全射であり, $H_{q'} := P_{q'} \cdot H$ は単射である。したがって部分線形入出力写像 $A_{p', q'} := H_{q'} \cdot G_{p'}$ は条件 $*$, $**$ を満たす。つぎに条件 $*$, $**$ が十分であることを示す。 $S := \text{ker } A_{p+1, M-p-1}$, $Z := \text{im } A_{p, M-p}$ とする。そのとき条件 $**$ により写像 $\pi \cdot j: Z \rightarrow F(M-p, Y) \rightarrow F(M-p-1, Y)$ は単射である。ただし, j は標準的単射であり, π は標準的全射である。それゆえに Z は命題(B.2)の条件 1) を満たす。 $*$ により任意の $u \in U$ に対し $A_{p+1, M-p-1}(e_{(p+1, u)}) = A_{p, M-p-1}(\sum \lambda(1, u_i) e_{(1, i)})$ となる $e_{(i, u_i)} \in \langle A(N \times U, K)_p \rangle$ が存在する。補題(B.4)の 1) により, $A_{p+1, M-p-1}(e_{(p+1, u)}) - \underline{j}(\sum \lambda(1, u_i) e_{(1, u_i)})$ となり $e_{(p+1, u)} - \underline{j}(\sum \lambda(1, u_i) e_{(1, u_i)}) \in S$ である。それゆえに S は命題(B.1)の条件 2) を満たす。 $\underline{j}$ を $\text{im } A_{p, M-p-1} \rightarrow F(M-p-1, Y)$ の標準的単射とすれば $**$ により $B := (\underline{j})^{-1} \pi \cdot j: Z \rightarrow \text{im } A_{p, M-p-1}$ は全単射な線形写像である。部分線形入出力写像 $A_{p+1, M-p-1}: \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle \rightarrow F(M-p-1, Y)$ に伴う全単射な線形写像 $A^b := A_{p+1, M-p-1}^b: \langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S \rightarrow \text{im } A_{p+1, M-p-1}$ を考えれば $*$ により線形写像 $B^{-1} \cdot A^b$ は $\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S \rightarrow Z$ の全単射である。

任意の $\lambda \in \langle A(N \times U, K)_p \rangle \cap S$ に対し写像 $B^{-1} \cdot A^b$ の単射性により $A_{p, M-p}(\lambda) = 0$ となる。そこで補題(B.7)の 2) を用いれば $A_{p+1, M-p-1}(S\lambda) = \underline{j} A_{p, M-p}(\lambda) = 0$ が成り立ち $S\lambda \in S$ となる。したがって S は命題(B.1)の 1) を満たす。命題(B.1)により入力写像付き自由運動 $((\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r), \bar{\eta})$ は p -擬可到達である。

条件 $*$ により任意の $z \in Z$ に対し $S_{\underline{j}}(z) = \underline{j}(y) = \underline{j}B(z') = \pi \cdot j(z')$ となり $\text{im } S_{\underline{j}} \subseteq \text{im } (\pi \cdot j)$ が成り立つ。それゆえに Z は命題(B.2)の条件 2) を満たし, 命題(B.2)により出力機構付き自由運動, $((Z, F), 0)$ は q -可観測である(付録(B.2)の証明参照)。 $B^{-1} \cdot A^b$ が $(\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r) \rightarrow (Z, F)$ の自由運動射であることがわかる。したがって互いに同形な擬線形系 $\sigma_1 = ((\langle A(N \times U, K)_{p+1} \rangle / S, \underline{S}_r), \bar{\eta}, 0 \cdot B^{-1} \cdot A^b, \underline{a}(l))$ と $\sigma_2 = ((Z, F), B^{-1} \cdot A^b \cdot \bar{\eta}, 0, \underline{a}(l))$ とが得られ, それぞれ $\underline{a}$ の自然部分実現系である。それゆえに $\underline{a}$ の自然部分実現系が存在する。 $\square$

(B.9) 補題

二つの正準擬線形系が同形であるための必要十分条件はそれらの挙動が等しいことである。

(証明) 補題(A.5)および文献1)の定理(3.5)により明らかである。

(B.10) 定理(3.8)の証明

部分補正一般インパルス応答 $GI(u_i) \in F(M, Y)$, $1 \leq i \leq m$ (同等的に部分時不変入力応答関数 $\underline{a}$) に対応する部分線形入出力写像を $A_{(\cdot)}$ とする。最初に必要性を示す。 GI の自然部分実現系が存在すると仮定する。そこで異なる p, p' (ただし $0 \leq p' < p < M$) に対し定理(3.8)が成り立つ, すなわち, $*$: $\text{im } A_{p, M-p-1} = \text{im } A_{p+1, M-p-1}$ と $*$: $\text{ker } A_{p, M-p} = \text{ker } A_{p+1, M-p-1}$ および $*$: $\text{im } A_{p', M-p'-1} = \text{im } A_{p'+1, M-p'-1}$ と $*$: $\text{ker } A_{p', M-p'} = \text{ker } A_{p'+1, M-p'-1}$ が成り立つ。そのとき命題(B.5), (B.6)により $Z = \text{im } A_{p, M-p}$ と $Z' = \text{im } A_{p', M-p'}$ との次元は等しい。したがって, 状態空間を Z, Z' として定理(3.6)の証明の手順により得られる $\underline{a}$ の自然部分実現系を σ, σ' とすれば, 明らかに σ と σ' とは同形である。補題(B.9)によればそれらの挙動は等しい。それゆえに $\underline{a}$ の自然部分実現系は整数 p, p' に拘らず同じである。したがって補題(B.9)により $\underline{a}$ の最小次元(正準)部分実現系は同形, すなわち一意である。つぎに十分性を対偶により示す。 $\underline{a}$ の自然部分実現系が存在しないとする。そのとき $\underline{a}$ の最小次元部分実現系は p -擬可到達, q -可観測, $p+q \geq M$ であり $p-1$ 未満では擬可到達であり, $q-1$ 未満では可観測でない。そこで入力 $e_{(p, u)}$ により始めて到達する状態 x の F による推移先を決定しようとするとき観測データが高々 $(M-p-1)(< q)$ までの入力によるものしかないので Fx を一意に決定することができない。したがって状態の推移を表わす F を一意に決定することができない。ゆえに $\underline{a}$ の最小次元部分実現系は一意でない。 $\square$

《付 録 C》

ここでは、第4, 5章の証明を行う。記号□は「証明終わり」を表わす。

(C.1) 定理(4.2)の証明

定理(3.7)の証明(付録(B.8)参照)で得られた $\underline{GI}$ の自然部分実現系 $\sigma_2 = ((Z, F), B^{-1} \cdot A^b \cdot \tilde{\eta}, 0, \underline{\alpha}(l))$ に対し擬線形系射 $T_s: \sigma_2 = ((Z, F), B^{-1} \cdot A^b \cdot \tilde{\eta}, 0, \underline{\alpha}(l)) \rightarrow \sigma_s = ((K^n \cdot F_s), g_s, h_s, h^0)$ を考えることにより得られる。□

(C.2) 補題(5.3)の証明

列ベクトル $\underline{SiGI}(u_i) \in K^{L-1}$ の第 j 番目の成分が $(\underline{SiGI}(u_i))(j-1) = \alpha(u_i^{i+j}) - \alpha(u_i^{i+j-1})$ であることに注目すれば手順1)により $\alpha(u_i^k | \omega_1), \forall k \in N$ が計算から一意に決められる。 α が時不変であることから、任意の $k (1 \leq k \leq L_2 + L)$ に対し $\alpha(u_i^{k-1} | u_2 | \omega_1) - \alpha(u_i^k | \omega_1) + \alpha(u_i^k) - \alpha(u_i^{k-1}) = \alpha(u_i^{k-1} | u_2) - \alpha(u_i^{k-1}) = (\underline{SiGI}(u_2))(j-1), i+j=k$ が得られる。よって入力 $\omega_2 = u_i^{L_2+L-1} | u_2$ を付け加えて手順2)が調べられる。列ベクトル $\underline{SiGI}(u_2)$ の第 j 番目の成分が $(\underline{SiGI}(u_2))(j-1) = \alpha(u_i^{i+j} | u_2 | \omega_1) - \alpha(u_i^{i+j} | \omega_1) + \alpha(u_i^{i+j}) - \alpha(u_i^{i+j-1})$ であるから手順2)により $\alpha(u_i^k | \omega_2 | \omega_1), 1 \leq k \in N$ が計算から一意に決められる。 α が時不変であることから、任意の $k (1 \leq k \leq L_3 + L)$ に対し $\alpha(u_i^{k-1} | u_3 | \omega_2 | \omega_1) - \alpha(u_i^k | \omega_2 | \omega_1) + \alpha(u_i^k) - \alpha(u_i^{k-1}) = \alpha(u_i^{k-1} | u_3) - \alpha(u_i^{k-1}) = (\underline{SiGI}(u_3))(j-1), i+j=k$ が得られる。さらに入力 $\omega_3 = u_i^{L_3+L-1} | u_3$ を付け加えて手順3)が調べられる。列ベクトル $\underline{SiGI}(u_3)$ の第 j 番目の成

分が $(\underline{SiGI}(u_3))(j-1) = \alpha(u_i^{k-1} | u_3) - \alpha(u_i^{k-1}) = \alpha(u_i^{k-1} | u_3 | \omega_2 | \omega_1) - \alpha(u_i^k | \omega_2 | \omega_1) + \alpha(u_i^k) - \alpha(u_i^{k-1}), i+j=k$ であるから手順3)により $\alpha(u_i^k | \omega_3 | \omega_2 | \omega_1), \forall k \in N$ が計算から一意に決められる。

…以下同様の手順を施して有界入出力行列 $\mathcal{H}_{a(p, L-1)}$ が得られる。□

〔著 者 紹 介〕

長谷川 泰 道 (正会員)

1976年、名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了。現在、岐阜大学工学部電子情報工学科助教授。特に離散時間非線形系のシステム理論および2次元図形の研究に従事(工学博士)。

故 松 尾

強

1961年、名古屋大学工学部電気学科卒業。同富士電機製造(株)入社。63年名古屋大学助手。72~75年フロリダ大学数学的システム理論センター研究員。84~89年名古屋大学工学部講師および助教授。89年東邦大学理学部教授。93年4月死去。制御理論、システム理論の研究に従事した(工学博士)。