非標準な H_2 制御問題と最適制御器の導出

美 多 勉*・Jeremy B. MATSON**

A Non-Standard H_2 Problem and Derivation of All H_2 Optimal Controllers

Tsutomu MITA* and Jeremy B. MATSON**

Recently the robust control theory is extensively studied and a number of new results including the H_∞/H_2 control have been developed. In the H_∞/H_2 control, we need to know a full parametrization of all nonstandard H_2 controllers. However, the parametrization of nonstandard H_2 controllers has not been well studied except several special cases. Therefore, in this paper, we shall derive complete parametrizations of all nonstandard H_2 controllers for generalized plants of which D_{12} and D_{21} are of full rank.

Key Words: H_2 control, Non-standard problem

1. はじめに

昨今ロバスト制御の中でも H_∞ 制御が精力的に研究され、また、各方面への応用も盛んである。一方、 H_2 制御 (LQ 制御, LQG 制御) の解は 1960 年代から現在までに種々な方法で導かれており、多くの著作がある¹⁾。特に、文献 2) で Doyle らは H_∞ 制御と並行してより直接的な方法で解を示している。しかし、これらはどれも標準 H_2 制御問題を対象としている。すなわち、制御量数が操作量数より多く D_{12} が縦長で列フルランクである場合、および、外乱数が観測量数より多く D_{21} が横長で行フルランクの場合を扱っている。ところが、実際の制御問題や H_∞ 制御との混合制御問題ではこれらの仮定が成り立たないことがある。たとえば、アクチュエータの増設で制御量数が標準問題から増えた場合、また、文献 9) で取扱っているように、標準問題の観測量以外に部分状態が観測できる場合がこれに当る。また、 H_∞ 状態フィードバック制御の自由度を H_2 制御で最適に調整する混合制御問題でも観測量数が外乱数を越える場合¹⁰⁾。このように、操作量数が制御量数を越える場合や観測量数が外乱数を越える場合には、標準問題以上の制御効果が期待でき、そ

の現れは、この非標準問題に対する H_2 制御器が標準 H_2 制御器に比して適当な自由度を残すことで表現できる。すなわち、非標準 H_2 制御問題では制御器のパラメトリゼーションが基本的な興味対象となる。しかし、従来の研究では非標準 H_2 制御器のパラメトリゼーションは明らかにされていない^{3), 4)}。そこで、本論文では、非標準問題でも比較的簡単な

- ①操作量数が制御量数より多く、 D_{12} が横長、かつ、行フルランクの場合
- ②観測量数が外乱数より多く、 D_{21} が縦長、かつ、列フルランクの場合
- ③①、②両方が成り立つ場合

の三つの場合の H_2 制御問題を扱い、 H_2 制御器をパラメトライズすることを目的とする^(注 1)。

以下、第 2 章では準備を、第 3 章では以下で示す仮定 A), B) のもとで、標準 H_2 制御問題および非標準 H_2 制御問題に対するリカッチ方程式が常に半正定な安定化解をもつことを証明する。第 4 で H_2 制御器の形式を明示した後、第 5 章では上のリカッチ方程式の解とその性質を使い評価関数を順次等価変換し、それを固定された部分と最適化可能な部分に分け、最適化可能な部分を最小にするように制御器を定める。また、制御系の内部安定性を保証するため、この過程でユラのパラメトリゼーション

(注 1) 従来の LQ 制御⁹⁾で、操作量の重み行列 R が非正則である問題は①の範疇には入らない。これは、 D_{12} が列フルランクでも行フルランクでもない問題となるので注意しておく。

* 東京工業大学 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Tokyo Institute of Technology, Tokyo

** Research School of Physical Sciences and Engineering, Australian National University, ACT 2600, Australia

(Received January 13, 1994)

(Revised August 3, 1994)

ンを適用する。この証明法は文献2), 7)に沿ったものである。

以下、つぎの約束をする。

- RH_{∞} : 安定でプロパーな有理伝達関数全体
- RH_2 : 安定で厳密にプロパーな有理伝達関数全体
- RH_2^+ : 反安定で厳密にプロパーな有理伝達関数全体
- 伝達関数 $C(sI - A)^{-1}B + D$ を

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

で表わすことになる。

- $U^-(s) = U^T(-s)$

2. 問題の設定と準備

以下で扱う一般化プラントを

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \quad (1a)$$

$$z = C_1 x + D_{12} u \quad (1b)$$

$$y = C_2 x + D_{21} u \quad (1c)$$

とし

z : m 次元制御量, u : p 次元操作量

w : r 次元外乱, y : q 次元観測量

とする。また、本式を

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (2a)$$

ただし

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (2b)$$

とも記述する。つぎに、制御はプロパーな制御器 $K(s)$ による出力フィードバック

$$u = K(s)y \quad (3)$$

とする。(3)式を(1)式へ代入したときの閉ループ系の w から z までの閉ループ伝達関数は

$$\begin{aligned} G_{zw} &= LFT\{G, K\} \\ &= G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。本論文での問題は G, K で構成された閉ループ系 (G, K) を内部安定にし、かつ、

$$J = \|G_{zw}\|_2 \rightarrow \min \quad (5)$$

とする $K(s)$ をパラメトライズすることである。

最初につぎの定義を行う。

【定義1】⁷⁾ 1. D が列フルランクならば, D^+ を

$$D^+ = (D^T D)^{-1} D^T \quad (6a)$$

と定義し、さらに、 D^+ を

$$\begin{bmatrix} D^+ \\ D^+ \end{bmatrix} [D, (D^+)^T] = I \quad (6b)$$

を満たすものとして定義する。このとき

$$DD^+ + (D^+)^T D^+ = I \quad (6c)$$

も成り立つ。ただし、 D が正方ならば $D^+ = 0$ と定義する。

2. D が行フルランクならば, D^+ を

$$D^+ = D^T (DD^T)^{-1} \quad (7a)$$

と定義し、さらに、 D^+ を

$$\begin{bmatrix} D \\ (D^+)^T \end{bmatrix} [D^+, D^+] = I \quad (7b)$$

を満たすものとして定義する。このとき

$$D^+ D + D^+ (D^+)^T = I \quad (7c)$$

も成り立つ。ただし、 D が正方ならば $D^+ = 0$ と定義する。

以下、 D が列フルランクか行フルランクかで定義1)の第1項と第2項を使い分けるものとする。

【補題1】^{5), 7)} $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ とする。このとき以下が成り立つ。

1. D が列フルランクならば, $G(s)$ の不変零点(以下単に零点と呼ぶ)は

$$\{A - BD^+C, D^+C\} \quad (8)$$

の不可観測極となる。

2. D が行フルランクならば, $G(s)$ の零点は

$$\{A - BD^+C, BD^+\} \quad (9)$$

の不可制御極となる。

さて、本論文を通してつぎの二つの仮定を導入する。

【仮定A】 (A, B_2) 可安定, D_{12} はフルランク, $G_{12}(s)$ は $j\omega$ 零点をもたない。

【仮定B】 (A, C_2) 可検出, D_{21} はフルランク, $G_{21}(s)$ は $j\omega$ 零点をもたない。

また、 D_{12}, D_{21} のサイズにしたがって本論文で扱う問題を場合分けすると

ケース0) D_{12} 列フルランク, D_{21} 行フルランク

ケース1) D_{12} 行フルランク, D_{21} 行フルランク

ケース2) D_{12} 行フルランク, D_{21} 列フルランク

ケース3) D_{12} 列フルランク, D_{21} 列フルランク

となる。ケース0)は標準問題^{2), 7)}である。ケース1), ケース2)では D_{12} が非標準となり、ケース2), ケース3)では D_{21} が非標準となる。本論文ではケース1)とケース2)の H_2 制御器を導出し、ケース3)の制御器をケース1)の制御器の双対として求める。

まず、次章以降必要となる補題を上げておく。

【補題2】 列フルランクな V に対して, $AV = V\alpha, B = V\beta, CV = 0$ が成り立つとき、次式を得る。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

(証明) V の補助基底 U を使った $T = (U, V)$ の相

似変換によって, $AT = T\hat{A}$, $B = T\hat{B}$, $CT = \hat{C}$ の相似変換を行えば次式を得る.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' & 0 & 0 \\ \times & \alpha & \beta \\ \times & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

ここで, α' と $\times$ は適当な要素である. 上式から不可制御な α' , 不可観測な α を取除けば, 右辺は 0 となる.

[補題 3]^{9)~8)} (A, B_2) 可安定, (A, C_2) 可検出の (1) 式の一般化プラント $G(s)$ において,

$$A_F = A + B_2 F, \quad A_H = A + H C_2 \quad (12)$$

を安定にするように F, H を選ぶと, (G, K) を内部安定にする制御器 $K(s)$ は

$$K = LFT \left\{ \begin{bmatrix} A + B_2 F + H C_2 & -H & B_2 \\ F & 0 & I_p \\ C_2 & -I_q & 0 \end{bmatrix}, S \right\} \quad (13)$$

と表わされる. ここで, $S(s) \in RH_\infty$ は自由パラメータである. またこのとき,

$$C_F = C_1 + D_{12} F, \quad B_H = B_1 + H D_{21} \quad (14)$$

とおくと, (4) 式は

$$G_{zw}(s) = T_1 - T_2 S T_3 \quad (15 a)$$

となる. ただし

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_F & -B_2 F & B_1 \\ 0 & A_H & B_H \\ C_F & -D_{12} F & 0 \end{bmatrix} \quad (15 b)$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} A_F & B_2 \\ C_F & D_{12} \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} A_H & B_H \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (15 c)$$

3. リカッチ方程式とその構造

ここでは, 標準 H_2 制御, 非標準 H_2 制御に関するリカッチ方程式を示し, それらが仮定 A), B) のもとで常に半正定な安定化解をもつことを示しておく. 以下, D_{12} , D_{21} が列フルランクか行フルランクかによって, 定義 1, 補題 1 の D を使い分けて利用するものとする. まず, 標準 H_2 制御に関しては以下の補題が成り立つことが知られている.

[補題 4]⁷⁾ a. D_{12} は列フルランクとする. このとき, 仮定 A) のもとでリカッチ方程式

$$\begin{aligned} & P(A - B_2 D_{12}^+ C_1) + (A - B_2 D_{12}^+ C_1)^T P \\ & - P B_2 D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T P \\ & + (D_{12}^+ C_1)^T D_{12}^+ C_1 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

は安定化解 $P \geq 0$ をもち,

$$F_2 = -D_{12}^+ C_1 - D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T P \quad (17)$$

とおくと, $A + B_2 F_2$ は安定で

$$U_1(\Omega) = \begin{bmatrix} A + B_2 F_2 & \Omega \\ C_1 + D_{12} F_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (18 a)$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} A + B_2 F_2 & B_2 \\ C_1 + D_{12} F_2 & D_{12} \end{bmatrix} \quad (18 b)$$

は以下を満たす.

$$U_2^{-1} U_2 = D_{12}^+ D_{12}, \quad U_2^{-1} U_1 \in RH_2^+ \quad (19)$$

ただし, Ω は任意の定数行列である.

b. D_{21} は行フルランクとする. このとき, 仮定 B) のもとでリカッチ方程式

$$\begin{aligned} & Q(A - B_1 D_{21}^+ C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^+ C_2) Q \\ & - Q C_2^T (D_{21}^+)^T D_{21}^+ C_2 Q \\ & + B_1 D_{21}^+ (D_{21}^+)^T B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

は安定化解 $Q \geq 0$ をもつ. このとき

$$H_2 = -B_1 D_{21}^+ - Q C_2^T (D_{21}^+)^T D_{21}^+ \quad (21)$$

とおくと, $A + H_2 C_2$ は安定で

$$V_1(\Omega) = \begin{bmatrix} A + H_2 C_2 & B_1 + H_2 D_{21} \\ \Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (22 a)$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} A + H_2 C_2 & B_1 + H_2 D_{21} \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \quad (22 b)$$

は次式を満たす.

$$V_2 V_2^{-1} = D_{21} D_{21}^+, \quad V_1 V_2^{-1} \in RH_2^+ \quad (23)$$

ただし, Ω は任意の定数行列である. ■

この補題の (19), (23) 式, あるいは, 後で述べる補題 6 の (43), (50) 式は H_2 制御問題を二つの独立な制御問題に帰着して解く分離定理を構築するために使われる.

つぎに非標準 H_2 制御に関するリカッチ方程式を扱うが, 問題と以下の取扱いの背景はつぎのとおりである. たとえば, D_{12} が行フルランクの場合, 単に $u = D_{12}^+ u'$ を (1 a), (1 b) 式に代入すれば

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 D_{12}^+ u' \quad (24 a)$$

$$z = C_1 x + u' \quad (24 b)$$

となり非標準問題は標準問題に帰着されそうである. しかし, 仮定 A) だけでは, 対応するリカッチ方程式は補題 4 を満たすとは限らない. また, 求めた制御器は十分条件を満たすに過ぎず, すべての H_2 制御器が求まるとは限らない. したがって, $u = D_{12}^+ u' + D_{12}^+ u''$ として (24) 式を

$$\dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 D_{12}^+ u' + B_2 D_{12}^+ u'' \quad (25 a)$$

$$z = C_1 x + u' \quad (25 b)$$

と等価変換し, $B_2 D_{12}^+$ の項の役割を考えていく必要がある.

[補題 5] a. D_{12} は行フルランクで仮定 A) が成り立つとする. このとき

$$A_{zf} = A - B_2 D_{12}^+ C_1 + B_2 D_{12}^+ L_F \quad (26)$$

において

$$(A - B_2 D_{12}^+ C_1, B_2 D_{12}^+) \quad (27)$$

の可制御空間を安定化するように L_F を選ぶ. すなわち,

この可制御空間の列基底を V_F とするとき

$$A_{ZF}V_F = V_F a_F \quad (28)$$

において a_F を安定とする。このとき、以下が成り立つ。

1. A_{ZF} は $j\omega$ 固有値をもたない。
2. $(A_{ZF}, B_2 D_{12}^+)$ は可安定となる。
- b. D_{21} は列フルランクで仮定 B) が成り立つとする。

このとき、

$$A_{ZH} = A - B_1 D_{21}^+ C_2 + L_H D_{21}^+ C_2 \quad (29)$$

において

$$(A - B_1 D_{21}^+ C_2, D_{21}^+ C_2) \quad (30)$$

の可観測空間を安定化するように L_H を選ぶ。すなわち、この可観測空間の行基底を V_H とするとき

$$V_H A_{ZH} = a_H V_H \quad (31)$$

において a_H を安定とする。このとき、以下が成り立つ。

1. A_{ZH} は $j\omega$ 固有値をもたない。
2. $(A_{ZH}, D_{21}^+ C_2)$ は可検出となる。

(証明) b 項は a 項の双対であるので a 項のみを証明する。

1. D_{12} が行フルランクなので、補題 1 から G_{12} の零点は $(A - B_2 D_{12}^+ C_1, B_2 D_{12}^+)$ の不可制御極である。可制御極は L_F で安定化され、不可制御極は仮定から $j\omega$ 軸上にないので 1. が成り立つ。

2. つぎに正準系をつくって 2. を証明しよう。零点が $(A - B_2 D_{12}^+ C_1, B_2 D_{12}^+)$ の不可制御極であることに注目すると

$$T^{-1}(A - B_2 D_{12}^+ C_1)T = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ A_{01} & A_1 \end{bmatrix} \quad (32 a)$$

$$T^{-1}B_2 D_{12}^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix} \quad (32 b)$$

と相似変換でき、可制御空間の基底 V_F は

$$T^{-1}V_F = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (32 c)$$

と表わされ、 $G_{12}(s)$ の零点は A_0 の固有値、 (A_1, β) は可制御となる。また、

$$T^{-1}B_2 D_{12}^+ = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (32 d)$$

とおいておく。

さて、1. は

$$L_F T = (L_1, L_2) \quad (33 a)$$

において、 L_2 を選んで

$$a_F = A_1 + \beta L_2 \quad (33 b)$$

を安定にすることにより、 V_F を安定化し、(28)式を得ることに対応する。一方、 (A, B_2) の可安定性は $\{A - B_2 D_{12}^+ C_1, (B_2 D_{12}^+, B D_{21}^+)\}$ のそれと等しく

$$\text{rank}(A - B_2 D_{12}^+ C_1 - sI, B_2 D_{12}^+, B_2 D_{12}^+) = n$$

$$: \text{Re}\{s\} \geq 0 \quad (34)$$

と等価であるが、(32)式を代入して本式を基本変換すれば、 $\text{Re}\{s\} \geq 0$ で

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A_0 - sI & 0 & 0 & \gamma_1 \\ A_{01} & A_1 - sI & \beta & \gamma_2 \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \left[\begin{array}{cc|cc} A_0 - sI & \gamma_1 & 0 & 0 \\ A_{01} & \gamma_2 & A_1 - sI & \beta \end{array} \right] = n \end{aligned} \quad (35)$$

となる。ここで、 (A_1, β) の可制御性を使うと、 (A, B_2) の可安定性は $(A_0 - sI, \gamma_1)$ のフルランク性、すなわち、 (A_0, γ_1) の可安定性と等価である。つぎに、

$$T^{-1}A_{ZF}T = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ A_{01} + \beta L_1 & A_1 + \beta L_2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

で、 $A_1 + \beta L_2$ が安定なので、(32 d)式の $T^{-1}B_2 D_{12}^+$ の形式と合せて 2. が成り立つ。

つぎに補題 5 の準備のもとで非標準 H_2 制御問題のリカッチ方程式とその特徴を上げる。

[補題 6] a. D_{12} 行フルランクで仮定 A) が成り立つと仮定する。このとき、リカッチ方程式

$$\hat{P}A_{ZF} + A_{ZF}^T \hat{P} - \hat{P}B_2 D_{12}^+ (B_2 D_{12}^+)^T \hat{P} = 0 \quad (37)$$

は安定化解 $\hat{P} \geq 0$ をもつ。ただし、 A_{ZF} は (26) 式で示した行列である。安定化解をもつので

$$\hat{F}_2 = -D_{12}^+ C_1 + D_{12}^+ L_F - D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T \hat{P} \quad (38)$$

とおくと、 $A + B_2 \hat{F}_2$ は安定であり、さらに、以下が成り立つ。

1. 安定化解 $\hat{P}$ は次式を満たす。

$$\hat{P}V_F = 0 \quad (39)$$

2. 安定化解 $\hat{P}$ は L_F の選択に独立である。

$$3. E_F = -(D_{12}^+)^T B_2^T \hat{P} \quad (40)$$

とおくと次式が成り立つ。

$$\left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 & B_2 D_{12}^+ \\ \hline E_F & 0 \end{array} \right] = 0 \quad (41)$$

4.

$$\hat{U}_1(\Omega) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 & \Omega \\ \hline E_F & 0 \end{array} \right] \quad (42 a)$$

$$\hat{U}_2 = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 & B_2 D_{12}^+ \\ \hline E_F & I_m \end{array} \right] \quad (42 b)$$

は次式を満たす。

$$\hat{U}_2^* \hat{U}_2 = I_m, \quad \hat{U}_2^* \hat{U}_1 \in RH_2^+ \quad (43)$$

ただし、 Ω は任意の行列である。

b. D_{21} は列フルランクで仮定 B) が成り立つと仮定する。このとき、リカッチ方程式

$$\hat{Q}A_{ZH}^T + A_{ZH} \hat{Q} - \hat{Q}C_2^T (D_{21}^+)^T D_{21}^+ C_2 \hat{Q} = 0 \quad (44)$$

は安定化解 $\hat{Q} \geq 0$ をもつ。ただし、 A_{ZH} は (29) 式で示したものである。安定化解が存在するので

$$\hat{H}_2 = -B_1 D_{21}^+ + L_H D_{21}^+ - \hat{Q}C_2^T (D_{21}^+)^T D_{21}^+ \quad (45)$$

とおくと, $A + \hat{H}_2 C_2$ は安定であり, さらに以下が成り立つ.

1. 安定化解 $\hat{Q}$ は次式を満たす.

$$V_H \hat{Q} = 0 \quad (46)$$

2. 安定化解 $\hat{Q}$ は L_H の選択に独立である.

$$3. E_H = -\hat{Q} C_2^T (D_{21}^+)^T \quad (47)$$

とおくと次式が成り立つ.

$$\left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline D_{21}^+ C_2 & 0 \end{array} \right] = 0 \quad (48)$$

- 4.

$$\hat{V}_1(\Omega) = \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline \Omega & 0 \end{array} \right] \quad (49a)$$

$$\hat{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline D_{21}^+ C_2 & I_r \end{array} \right] \quad (49b)$$

は次式を満たす.

$$\hat{V}_2 \hat{V}_2^* = I_r, \quad \hat{V}_1 \hat{V}_2^* \in RH_2^+ \quad (50)$$

ただし, Ω は任意の行列である.

(証明) b 項は a 項の双対であるので a 項のみ証明する. 補題 5 から, 仮定 A) のもとで, A_{zF} は $j\omega$ 固有値をもたず, $(A_{zF}, B_2 D_{12}^+)$ は可安定であった. よって

$$H_{\hat{P}} = \left[\begin{array}{c|c} A_{zF}, & -B_2 D_{12}^+ (D_{12}^+)^T B_2^T \\ \hline 0, & -A_{zF}^T \end{array} \right] \in \text{Dom}(Ric) \quad (51)$$

となり, 対応するリカッチ方程式 (37) 式は常に安定化解をもつ. また, (37) 式は

$$\hat{P}(A + B_2 \hat{F}_2) + (A + B_2 \hat{F}_2)^T \hat{P} + E_F^T E_F = 0 \quad (52)$$

のリアプノフ方程式に整理でき, $A + B_2 \hat{F}_2$ が安定だから $\hat{P} \geq 0$ を得る.

1. (37) 式は

$$\hat{P} A_{zF} + (A + B_2 \hat{F}_2)^T \hat{P} = 0 \quad (53)$$

とも書けるので V_F を右からかけると (28) 式から

$$\hat{P} V_F \alpha_F + (A + B_2 \hat{F}_2)^T \hat{P} V_F = 0 \quad (54)$$

を得, $\alpha_F, A + B_2 \hat{F}_2$ も安定なので, $\hat{P} V_F = 0$ となる.

2. これから $V_F^T \hat{P} V_F = 0$ が成り立つので (32c) 式によれば, $T^T \hat{P} T$ は

$$\tilde{P} := T^T \hat{P} T = \text{diag}(P_0, 0) \quad (55)$$

の形式となる. そこで, P_0 を求めるため (37) 式に左右から T^T, T をかけて整理すると, (36) 式をも使って

$$\begin{aligned} & \tilde{P} \left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline A_{01} + \beta L_1 & A_1 + \beta L_2 \end{array} \right] \\ & + \left[\begin{array}{c|c} A_0 & 0 \\ \hline A_{01} + \beta L_1 & A_1 + \beta L_2 \end{array} \right]^T \tilde{P} \\ & - \tilde{P} \left[\begin{array}{c|c} \gamma_1 \gamma_1^T & \gamma_1 \gamma_2^T \\ \hline \gamma_2 \gamma_1^T & \gamma_2 \gamma_2^T \end{array} \right] \tilde{P} = 0 \end{aligned} \quad (56)$$

と記述される. よって, (55) 式を代入すれば, P_0 は

$$P_0 A_0 + A_0^T P - P_0 \gamma_1 \gamma_1^T P_0 = 0 \quad (57)$$

を満たし L_F に独立である. また, T も L_F に独立なので, $\tilde{P} = (T^T)^{-1} \text{diag}(P_0, 0) T^{-1}$ も L_F に独立に定まる.

3. $A_{zF} V_F = V_F \alpha_F, \hat{P} V_F = 0$ から, $(A + B_2 \hat{F}_2) V_F = \alpha_F V_F, E_F V_F = 0$, さらに, $B_2 D_{12}^+ = V_F \beta$. よって補題 2 から (41) 式を得る.

4. 最後に

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2^* \tilde{U}_2 &= \left[\begin{array}{c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T & E_F^T \\ \hline -(D_{12}^+)^T B_2^T & I \end{array} \right] \\ & \times \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 & B_2 D_{12}^+ \\ \hline E_F & I \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T, & E_F^T E_F & E_F^T \\ \hline 0, & A + B_2 \hat{F}_2 & B_2 D_{12}^+ \\ \hline -(D_{12}^+)^T B_2^T, & E_F & I \end{array} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

となり,

$$\left[\begin{array}{c|c} I, & \tilde{P} \\ \hline 0, & I \end{array} \right] \quad (59)$$

の相似変換と (52) 式を使うと, (58) 式はさらに

$$\left[\begin{array}{c|c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T, & 0 & 0 \\ \hline 0, & A + B_2 \hat{F}_2 & B_2 D_{12}^+ \\ \hline -(D_{12}^+)^T B_2^T, & 0 & I \end{array} \right] = I \quad (60)$$

となる. 同様に次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_2^* \tilde{U}_1 &= \left[\begin{array}{c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T, & E_F^T \\ \hline -(D_{12}^+)^T B_2^T & I \end{array} \right] \\ & \times \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 & \Omega \\ \hline E_F & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T, & 0 & -\tilde{P} \Omega \\ \hline 0, & A + B_2 \hat{F}_2 & \Omega \\ \hline -B_2^T, & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} -(A + B_2 \hat{F}_2)^T & -\tilde{P} \Omega \\ \hline -B_2^T & 0 \end{array} \right] \in RH_2^+ \end{aligned} \quad (61)$$

4. H_2 制御器のパラメトリゼーション

非標準 H_2 制御器は補題 4, 6 を使い (5) 式の J を等価変換して求めて求めるが, 本論文の結果として標準問題の解と共に先にまとめておく.

《定理 1》 1. [ケース 0)]^{2), 7)} ケース 0) の H_2 制御器は,

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 F_2 + H_2 C_2 & -H_2 \\ \hline F_2 & 0 \end{array} \right] \quad (62)$$

となり, 評価関数の最適値は次式となる.

$$J_{\min}^2 = \|U_1(B_1)\|_2^2 + \|V_1(F_2)\|_2^2 \quad (63)$$

ただし, 係数行列の定義は補題 4 の a 項と b 項に従う.

2. [ケース 1)] ケース 1) の H_2 制御器は,

$$K(s) = LFT$$

$$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A+B_2\hat{F}_2+H_2C_2 & -H_2, B_2D_{12}^+ \\ \hline \hat{F}_2 & 0, D_{12}^+ \\ \hline C_2 & -1, 0 \end{array} \right], W \right\} \quad (64)$$

となる。ここで、 $W(s)(p-m \times q) \in RH_2$ は自由パラメータである。評価関数の最適値は次式となる。

$$J_{\min}^2 = \|\hat{U}_1(B_1)\|_2^2 + \|V_1(C_1 - E_F)\|_2^2 \quad (65)$$

ただし、係数行列の定義は補題 6 の a 項と補題 4 の b 項に従う。

3. [ケース 2)] ケース 2) の H_2 制御器は、

$$K(s) = LFT \left\{ M(s), \left[\begin{array}{c|c} 0, & W_1(s) \\ \hline W_2(s), & W_3(s) \end{array} \right] \right\} \quad (66 a)$$

ただし、

$$M(s) = \left[\begin{array}{c|c|c} A+B_2\hat{F}_2+\hat{H}_2C_2 & -\hat{H}_2, B_2D_{12}^+, B_2D_{12}^+ \\ \hline \hat{F}_2 & 0, D_{12}^+, D_{12}^+ \\ \hline D_{21}^+C_2 & -D_{21}^+, 0 \\ \hline D_{21}^+C_2 & -D_{21}^+, 0 \end{array} \right] \quad (66 b)$$

となる。ここで、 $W_1(m \times q-r)$, $W_2(p-m \times r)$, $W_3(p-m \times q-r) \in RH_2$ は自由パラメータであり、評価関数の最適値は

$$J_{\min}^2 = \|\hat{U}_1(B_1)\|_2^2 + \|\hat{V}_1(C_1 - E_F)\|_2^2 \quad (67)$$

となる。係数行列の定義は補題 6 の a 項と b 項に従う。

4. [ケース 3)] ケース 3) の H_2 制御器は、

$$K(s) = LFT \left\{ \left[\begin{array}{c|c} A+B_2F_2+\hat{H}_2C_2 & \hat{H}_2, B_2 \\ \hline -F_2 & 0, -I_p \\ \hline D_{21}^+C_2 & D_{21}^+, 0 \end{array} \right], W \right\} \quad (68)$$

となる。ここで、 $W(s)(p \times q-r) \in RH_2$ は自由パラメータであり、評価関数の最適値は

$$J_{\min}^2 = \|U_1(B_1 - E_H)\|_2^2 + \|\hat{V}_1(C_1)\|_2^2 \quad (69)$$

となる。係数行列の定義は補題 4 の a 項と補題 6 の b 項に従う。

5. 定理 1 の証明

5.1 分離定理 (D_{12} が非標準の場合)

D_{12} が非標準なケース 1), ケース 2) を解けば、ケース 1) を係数を転置してケース 3) を得ることができる。

H_∞ 制御と違って仮定 A), B) のもとで、補題 4 や補題 6 に現れたりカッチ方程式は常に半正定の安定化解をもつので、評価関数を最小にする制御器の形式だけが問題となる。以下ではまず文献 2) の G_V (あるいは、 G_{tmp}) に対応するシステムを G_{SEP} として導入し、問題を 2 ブロック化する⁷⁾。また、 S_{SEP} を D_{12} が非標準の場合に拡張する。

したがって、仮定 A) のもとで得られた補題 6 の a 項を使う。このとき、つぎの分離定理を得る。

[命題 1] 1. 仮定 A) が成り立つとする。このとき

$$\Theta(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{U}_1(B_1), & \hat{U}_2 \\ \hline I_r, & 0 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A+B_2\hat{F}_2 & B_1, B_2D_{12}^+ \\ \hline E_F & 0, I_m \\ \hline 0 & I_r, 0 \end{array} \right] \quad (70)$$

および

$$G_{SEP}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B_1, B_2 \\ \hline C_1 - E_F & 0, D_{12} \\ \hline C_2 & D_{21}, 0 \end{array} \right] \quad (71)$$

とおくと、

$$G_{zw}(s) = LFT\{\Theta, LFT\{G_{SEP}, K\}\} \quad (72)$$

が成り立ち、 (G_{SEP}, K) を内部安定にする K は (G, K) も内部安定にする。

2. 次式が成り立つ。

$$J_{\min} = \|\hat{U}_1(B_1)\|_2^2 + \min_K \|LFT\{G_{SEP}, K\}\|_2^2 \quad (73)$$

(証明) 1. (72) 式右辺のスター積を計算し $LFT\{G', K\}$ とおくとき、 G' が G に等しいことを示す。スター積の法則(付録参照)を使えば、

$$G' = \left[\begin{array}{c|c|c} A+B_2\hat{F}_2, B_2D_{12}^+(C_1-E_F) & B_1, B_2D_{12}^+D_{12} \\ \hline 0, A & B_1, B_2 \\ \hline E_F, C_1-E_F & 0, D_{12} \\ \hline 0, C_2 & D_{21}, 0 \end{array} \right] \quad (74 a)$$

となるが、(59) 式で $\hat{P} = I$ とおいた相似変換によって

$$\left[\begin{array}{c|c|c} A+B_2\hat{F}_2, B_2D_{12}^+L_F & 0, -B_2D_{12}^+(D_{12}^+)^T \\ \hline 0, A & B_1, B_2 \\ \hline E_F, C_1 & 0, D_{12} \\ \hline 0, C_2 & D_{21}, 0 \end{array} \right] \quad (74 b)$$

となる。ここで、(41) 式を使えば本式は $G(s)$ に一致する。この際、補題 2 の証明に見られるように、安定な $A+B_2\hat{F}_2$ を不可観測や不可制御モードとして相殺したので、 (G_{SEP}, K) と (G, K) の内部安定性は等しい²⁾(詳しくは文献 7) 参照)。

2. 次式

$$G_{zw} = LFT\{\Theta, \Psi\}: \Psi = LFT\{G_{SEP}, K\} \quad (75 a)$$

は Θ の構造、 $\Theta_{21} = I_r$, $\Theta_{22} = 0$ から

$$G_{zw} = \hat{U}_1(B_1) + \hat{U}_2\Psi \quad (75 b)$$

とも書けるので、(43) 式から

$$\|G_{zw}\|_2^2 = \|\hat{U}_1(B_1)\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 \quad (76)$$

を得る。ここで、(42 a), (52) 式から

$$\|\hat{U}_1(B_1)\|_2 = \text{Trace}(B_1^T \hat{P} B_1) \quad (77)$$

を得るので²⁾, 補題6のa-2項から本式は L_F にも $K(s)$ にもよらない一定行列である。よって, (73)式が成り立つ^(注2)。

この命題は $G_{21}(s)$ や D_{21} とは独立に成り立つので, ケース1), ケース2)とも, (G_{SEP}, K) を内部安定にし

$$\|LFT\{G_{SEP}, K\}\|_2 \rightarrow \min \quad (78)$$

とする K を求める問題に帰着する。

5.2 ケース1)の解法(D_{12} が非標準で D_{21} が標準の場合)

5.1節での仮定に加えて, 仮定B)を導入する。また, G_{SEP} に対する H_2 制御器をパラメトライズするため補題3を G_{SEP} に適用する。この場合, F として(38)式の $\hat{F}_2$, H として(21)式の H_2 を選ぶ。すると, K は $S \in RH_\infty$ に対して

$$K = LFT$$

$$\left\{ \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 \hat{F}_2 + H_2 C_2 & -H_2, B_2 \\ \hline \hat{F}_2 & 0, I \\ C_2 & -I, 0 \end{array} \right], S \right\} \quad (79)$$

となるが, $\hat{F}_2$ が(38)式を満たすので

$$C_F = (C_1 - E_F) + D_{12} \hat{F}_2 = 0 \quad (80)$$

が成り立ち, (15c)式で $T_2 = D_{12}$ を得る。また, (15)式で

$$\begin{aligned} T_1 &= \left[\begin{array}{c|c} A + H_2 C_2 & B_1 + H_2 D_{21} \\ \hline C_1 - E_F & 0 \end{array} \right] = V_1 (C_1 - E_F) \\ T_3 &= \left[\begin{array}{c|c} A + H_2 C_2 & B_1 + H_2 D_{21} \\ \hline C_2 & D_{21} \end{array} \right] = V_2 \end{aligned} \quad (81)$$

となるので

$$LFT\{G_{SEP}, K\} = V_1 (C_1 - E_F) - D_{12} S V_2 \quad (82)$$

を得, (23)式より

$$\begin{aligned} \|LFT\{G_{SEP}, K\}\|_2^2 \\ = \|V_1 (C_1 - E_F)\|_2^2 + \|D_{12} S V_2\|_2^2 \end{aligned} \quad (83)$$

となる。第1項は以前同様 L_F に依存しないので, 本式は $D_{12} S D_{21} = 0$ のとき最小値 $\|V_1 (C_1 - E_F)\|_2^2$ をとる。よって, (73)式とあわせて(65)式を得る。一方, D_{21} は行フルランクなので $S D_{21} = 0$ は $S = 0$ 以外の解をもたないが, D_{12} が行フルランクなので $D_{12} S = 0$ は斉次解をもち, $D_{12} S D_{21} = 0$ の一般解は

$$S(s) = D_{12}^{-1} W(s): W \in RH_2 \quad (84)$$

と記述できる。そこで, (84)式を(79)式に代入し整理すれば(64)式の $K(s)$ を得る。

5.3 ケース2)の解法(D_{12} が非標準で D_{21} が非標準の場合)

5.1節での仮定に加えて, 仮定B)を加える。ここでも,

G_{SEP} に補題3を適用するが, F, H には夫々(38), (45)式の $\hat{F}_2, \hat{H}_2$ を選ぶ。 K の形式は(79)式で H_2 を $\hat{H}_2$ に代えたものになり

$$\begin{aligned} C_F &= (C_1 - E_F) + D_{12} \hat{F}_2 = 0 \\ B_H &= B_1 + \hat{H}_2 D_{21} = E_H \end{aligned} \quad (85)$$

が成り立つ。よって, まず, $T_2 = D_{12}$ を得, さらに

$$\begin{aligned} C_2 &= [D_{21} D_{21}^* + (D_{21}^T)^T D_{21}^*] C_2 \\ &= D_{21} D_{21}^* C_2 + (D_{21}^T)^T D_{21}^* C_2 \end{aligned} \quad (86)$$

を使うと, (48)式から

$$\begin{aligned} T_3 &= \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline C_2 & D_{21} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline D_{21} D_{21}^* C_2 & D_{21} \end{array} \right] \\ &+ \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline (D_{21}^T)^T D_{21}^* C_2 & 0 \end{array} \right] \\ &= D_{21} \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline D_{21}^* C_2 & I_r \end{array} \right] = D_{21} \hat{V}_2 \end{aligned} \quad (87)$$

を得, さらに

$$T_1 = \left[\begin{array}{c|c} A + \hat{H}_2 C_2 & E_H \\ \hline C_1 - E_F & 0 \end{array} \right] = \hat{V}_1 (C_1 - E_F) \quad (88)$$

となる。よって,

$$LFT\{G_{SEP}, K\} = \hat{V}_1 (C_1 - E_F) - D_{12} S D_{21} \hat{V}_2 \quad (89)$$

を得, (50)式から, その H_2 ノルムは

$$\|\hat{V}_1 (C_1 - E_F)\|_2^2 + \|D_{12} S D_{21}\|_2^2 \quad (90)$$

となる。ここでも, 補題6のb-2項から $\hat{V}_1$ は L_H に独立である。よって, $D_{12} S D_{21} = 0$, すなわち

$$S(s) = (D_{12}^*, D_{12}) \begin{bmatrix} 0, & W_1 \\ W_2, & W_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{21}^* \\ D_{21}^* \end{bmatrix} \quad (91)$$

のとき, (90)式の最小値は $\|\hat{V}_1 (C_1 - E_F)\|_2^2$ となる。ただし, $W_i \in RH_2$ 。よって, (73)式とあわせて(67)式を得る。また, S を $H_2 \rightarrow \hat{H}_2$ と伴に(79)式に代入し, 整理すれば(66)式の $K(s)$ を得る。

6. おわりに

非標準 H_2 制御問題に解を与え, H_2 制御器をパラメトライズした。この結果は今後混合制御問題, および, H_2 制御系の構造と H_∞ 制御系の構造を比較するときなどに利用されると考えられる。ここでは, D_{12}, D_{21} はフルランクと仮定したが, この仮定を取除いた場合の H_2 制御器や H_∞ 制御器のパラメトリゼーションについては研究中である^{11), 12)}。

参考文献

- 1) SICE 自動制御ハンドブック (基礎編)
- 2) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, B. A. Francis: State-Space Solutions to Standard H_∞ and H_2 Control Problems, IEEE Trans., AC-34-8, 831/847 (1989)
- 3) 榎木, 添田, 中溝: 確率システムの基礎, 日新出版
- 4) D. J. Clements and B. D. O. Anderson: Singular Opti-

(注2) L_F, L_H は評価関数には影響しないが制御器の形式に影響する。

mal Control-The Linear Quadratic Problem-, Springer-Verlag, New York (1978)

- 5) 原 辰次: H_∞ 制御によるサーボ系の設計, SICE 基礎講習会— H_∞ 制御入門—テキスト, 計測自動制御学会 (1991)
- 6) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag, New York (1987)
- 7) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)
- 8) 美多, 張: 既約分解を用いないユラパラメトリゼーションの証明法, 計測自動制御学会論文集, 31-4, 540/541 (1995)
- 9) 章, 細江: 部分状態フィードバックによる H_∞ 制御問題, 計測自動制御学会論文集, 29-2, 169/178 (1993)
- 10) 大内, 美多: H_2 制御による H_∞ 制御系の最適化, 計測自動制御学会論文集, 27-10, 1123/1130 (1991)
- 11) 栗山, 美多: デスクリプタ表現による有理関数行列の分解理論とスペクトル分解への応用, 計測自動制御学会論文集掲載予定 (1994)
- 12) K. Kuriyama and T. Mita: A New Method for Factoring Spectral Density Matrices Having $j\omega$ -axis Zeros and Its Application to an H_∞ Control Problem, Proc. 1st ASCC, 2, 37/40 (1994)

《付録(スター積)》

$i=a, b$ に対して

$$M^i(s) = \begin{bmatrix} A^i & B_i^i & B_i^i \\ C_i^i & 0 & D_{i2}^i \\ C_2^i & D_{21}^i & 0 \end{bmatrix}$$

のとき,

$$LFT\{M^a, LFT\{M^b, K\}\} = LFT\{M^{ab}, K\}$$

を満たす M^{ab} は次式となる.

$$M^{ab} = \begin{bmatrix} A^a, B_2^a C_1^b & B_1^a, B_2^a D_{12}^b \\ B_1^b C_2^a, A^b & B_1^b D_{21}^a, B_2^b \\ C_1^a, D_{12}^a C_1^b & 0, D_{12}^a D_{12}^b \\ D_{21}^a C_2^a, C_2^b & D_{21}^a D_{21}^a, 0 \end{bmatrix}$$

[著者紹介]

美多 勉 (正会員)

(Vol. 31, No. 3 参照)

Jeremy B. MATSON

Jeremy Matson was born in Riverton, South Australia in 1968 and is currently pursuing studies towards the degree of Doctor of Philosophy in the Department of Systems Engineering at The Australian National University, Canberra Australia. He completed a bachelor of Science degree in 1990 and a bachelor's degree with honours in Electrical and Electronic Engineering in 1991, both at the University of Adelaide, South Australia.

Mr. Matson is a graduate member of the Institution of Engineers, Australia. His interests include linear robust control theory, industrial process control, soft-sensors, steel production and power system dynamics. He has obtained industrial research experience with BHP Steel as a student through involvement in the Commonwealth Government of Australia's Cooperative Research Centre for Robust and Adaptive Systems. He has spent 5 weeks as a visiting researcher in Chiba University, Japan.