部分的ループ伝達関数回復手法による離散時間非最小位相系に対する 積分型サーボ系の設計[†]

郭 海 蛟*・石 原 正*・竹 田 宏**

A Design of Discrete-Time Integral Controllers for Non-Minimum Phase Plants Using Partial LTR Technique

Hai-Jiao GUO*, Tadashi ISHIHARA* and Hiroshi TAKEDA**

Application of the partial LTR (Loop Transfer Recovery) technique to design integral controllers for discrete-time non-minimum phase plants is discussed. We focus our attention to the feedback property at the plant input side assuming that unit step computation delay exists in a controller. First, based on the all-pass/minimum phase decomposition of the plant transfer function matrix, we construct the minimum phase state feedback (MSF) integral controller which feeds back the minimum phase state of a plant. For the output feedback case, we construct the minimum phase estimate feedback (MEF) integral controller by replacing the minimum phase state in the MSF integral controller by its estimate generated by the prediction type Kalman filter. We show that the feedback property achieved by the MEF integral controller approaches that of the MSF integral controller as the intensity of a fictitious disturbance inserted between the minimum phase and the all-pass parts tends to infinity. For the performance index consisting of the quadratic forms of the plant output and input, the feedback property achieved by enforcing the conventional LTR technique coincides with that achieved by the partial LTR technique. This fact clarifies the system theoretic significance of the enforcement of the conventional LTR technique. It should be noted that this fact does not make the partial LTR technique obsolete because it provides more design freedom than the conventional technique. A numerical example making use of the freedom is presented.

Key Words: discrete-time systems, non-minimum phase systems, integral controllers, type I servosystem, robust tracking, partial loop transfer recovery

1. はじめに

郭ら^{1),2)}は、美多らに³⁾より提案された離散時間積分型サーボ系の設計法を基に、コントローラの演算時間を考慮した出力フィードバック積分型サーボ系のループ伝達関数回復手法⁴⁾による設計について考察し、離散時間制御対象モデルが最小位相であれば、状態フィードバック

が可能である場合のフィードバック特性が回復可能であることを明らかにしている。しかし、連続時間系が最小位相であっても、その離散時間モデルは非最小位相系となることが多い⁵⁾。一般に、非最小位相系に対しては、ループ伝達関数回復手法によるループ特性の完全な回復は不可能であるが、非最小位相系に対するループ伝達関数回復手法の適用に関する最近の研究成果^{6),7)}によれば、連続時間最小位相系の離散化により得られる非最小位相系に対しては、通常のループ伝達関数の手続きにより、目標とするフィードバック特性に十分近い特性が回復されることが期待できる。したがって、郭ら^{1),2)}により提案されている設計法は非最小位相系に対しても適用可能であると考えられるが、この場合のループ伝達関数回復手法のシステム論的な意味を明らかにしておく必要が

[†] 第 19 回制御理論シンポジウムで発表(1990・5)

* 東北大学工学部 仙台市青葉区荒巻字青葉

** 東北学院大学工学部 多賀城市中央 1-13-1

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai

** Faculty of Engineering, Tohoku Gakuin University, Tagajyou

(Received February 21, 1994)

(Revised October 3, 1994)

ある。また、非最小位相系に対してより効果的なループ伝達関数回復手法について考察する必要があると思われる。

石原⁷⁾は、予測型 Kalman フィルタを用いた離散時間 LQG 制御系に対して、通常のループ伝達関数回復の手続きを適用した場合に達成されるフィードバック特性は部分的ループ伝達関数回復手法^{8),9)}により達成されるものと一致することを示し、非最小位相系に対するループ伝達関数回復手法の意味を明らかにしている。さらに、石原⁷⁾は部分的ループ伝達関数回復手法を用いることにより、通常のループ伝達関数回復手法では得られないフィードバック特性を達成できることを指摘している。

本論文では、郭ら^{1),2)}により提案された設計法の拡張として、部分的ループ伝達関数回復手法による離散時間積分型サーボ系の設計について考察する。簡単のために、コントローラは1ステップの演算時間遅れを伴うものとして、制御対象入力側のフィードバック特性について考察する。まず、部分的ループ伝達関数回復の目標特性として、美多ら³⁾のサーボ系を最小位相部分の状態のみをフィードバックするよう再構成し、この場合のフィードバック特性を明らかにする。つぎに、出力フィードバックの場合に対して、最小位相部分の状態予測値のみをフィードバックするコントローラを構成し、LQG 制御系に対する渡部ら⁹⁾と同様の手法により、部分的ループ伝達関数回復が達成されることを示す。さらに、通常のループ伝達関数回復手法の形式的適用と部分的ループ伝達関数回復の関係を明らかにする。最後に、数値例を通して、提案した設計法の有効性について検討する。

2. 制御対象の分解表現と確率モデル

制御対象はつぎのような離散時間状態空間モデルで記述されるものとする。

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (2.1)$$

ここで、 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^p$ は操作量、 $y(t) \in R^q$ は出力ベクトルであり、行列対 (A, B) は可制御、 (C, A) は可観測であるものとする。また、行列 CB は正則と仮定する。むだ時間を含まない連続時間系を零次ホールドを前置して離散化して得られるモデルは、ほとんどの場合、この仮定を満足する。さらに、操作量 $u(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数行列 $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ は不安定零点を含むものとし、 $G(z)$ のつぎのような分解が与えられているものとする。

$$G(z) = C(zI - A)^{-1}B_m G_a(z) \quad (2.2)$$

ここで、 $C(zI - A)^{-1}B_m$ は最小位相部分を表わし、 $G_a(z)$ は $G(z)$ の全ての不安定零点を含む全域通過部分であり、 $G_a(z)G_a(z^{-1}) = I$ を満足する。さらに、 $G(z)$ は $z=$

1 に零点をもたないかと仮定する。

(2.2)式のような分解はいくつかの方法により求めることができる。 $G(z)$ が一個の実不安定零点を含む場合に対しては連続時間系に対して Enns により見いだされた零方向ベクトルを用いる方法の離散時間版が石原⁷⁾により与えられている。

全域通過部分 $G_a(z)$ の最小次元の一つが状態空間表現 $\{A_a, B_a, C_a, D_a\}$ で与えられているものとし、制御対象のつぎのような確率モデルを構成する。

$$\begin{aligned} \chi(t+1) &= \Phi\chi(t) + \Gamma u(t) + \Theta w(t) \\ y(t) &= H\chi(t) + v(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} A & B_m C_a \\ 0 & A_a \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} B_m D_a \\ B_a \end{bmatrix}, \\ \Theta &= \begin{bmatrix} B_m & B_m D_a \\ 0 & B_a \end{bmatrix}, \quad H = [C \quad 0] \end{aligned} \quad (2.4)$$

であり、 $\chi(t)$ は、(2.2)式の最小位相部分の状態ベクトルを $x_m(t)$ 、全域通過部分の状態ベクトルを $x_a(t)$ とするとき、つぎのように定義される状態ベクトルである。

$$\chi(t) = [x'_m(t) \quad x'_a(t)]' \quad (2.5)$$

また、 $w(t)$ は外乱ベクトルであり、つぎのように定義される。

$$w(t) = [w'_f(t) \quad w'_s(t)]' \quad (2.6)$$

ここで、 $w_s(t)$ は制御対象入力に加わる外乱ベクトルであり、 $w_f(t)$ は部分的ループ伝達関数回復を達成するために導入した最小位相部分の入力側に加わる仮想的な外乱ベクトルである。

$w(t)$ は零平均正規性確率過程であり、その共分散行列はつぎのように与えられるものとする。

$$Q = \text{diag}[Q_f I \quad Q_s I] \quad (2.7)$$

ただし、 $Q_f \geq 0$ 、 $Q_s \geq 0$ である。また、(2.3)式における観測雑音 $v(t)$ は $w(t)$ と独立な零平均正規性確率過程であり、その共分散行列は R で与えられるものとする。

(2.1)式において、 (A, B) は可制御、 (C, A) は可観測であれば、 (Φ, Γ) は可安定、 (H, Φ) は可検出であることが容易に確かめられる⁹⁾。また、(2.1)式の伝達関数行列 $G(z)$ が $z=1$ に零点をもたないとき、(2.1)式の操作量 $u(t)$ から出力 $y(t)$ までの伝達関数行列は $z=1$ に零点をもたないことが容易に確かめられる。すなわち、行列

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Phi - I & \Gamma \\ H & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

は正則である。

3. 最小位相部分状態フィードバック

本章では、制御対象の最小位相部分の状態ベクトルの

$$\Sigma_{\text{MSF}}(z) = D^{-1}(z)N(z) \quad (3.14)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D(z) &= I + L_a(zI - A_a)^{-1}B_a + L_m(zI - A)^{-1} \\ &\quad B_m G_a(z) + (z-1)^{-1}MG(z) \quad (3.15) \\ N(z) &= I + L_a(zI - A_a)^{-1}B_a + z^{-1}L_m B_m G_a(z) \quad (3.16) \end{aligned}$$

である。(2.4), (3.4)式で定義される行列を用いると、(3.15)式はつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} D(z) &= I + \Lambda(zI - \Phi)^{-1}\Gamma \\ &\quad + (z-1)^{-1}MH(zI - \Phi)^{-1}\Gamma \quad (3.17) \end{aligned}$$

ここで、行列方程式(3.3)の解 Λ, M がつぎのように与えられることに注意する。

$$\begin{aligned} \Lambda &= \Psi + [H(I - \Phi + \Gamma\Psi)^{-1}\Gamma]^{-1}H(I - \Phi + \Gamma\Psi)^{-1} \\ M &= [H(I - \Phi + \Gamma\Psi)^{-1}\Gamma]^{-1} \quad (3.18) \end{aligned}$$

(3.18)式を(3.17)式に用い、若干の計算を行うと、つぎの表現が得られる。

$$D(z) = z(z-1)^{-1}[I + \Psi(zI - \Phi)^{-1}\Gamma] \quad (3.19)$$

(3.16), (3.19)式から(3.11)式の表現が得られる。■

(3.11)式の感度行列の表現は、積分器の効果 ($\Sigma(1) = 0$) を陽に表わしているだけではなく、設計に用いられたレギュレータ問題に対する感度行列との関係をも与えている。

上の命題の結果は、行列 $\Phi - \Gamma\Psi$ を安定化する任意の状態フィードバックゲイン行列 Ψ に対して成立するが、 Ψ をつぎのような2次形式評価関数に対する最適フィードバックゲイン行列として選ぶ場合を考えよう。

$$V = \sum_{t=0}^{\infty} [y'(t)y(t) + \rho u'(t)u(t)] \quad (3.20)$$

ここで、 $\rho \geq 0$ である。以下議論では、簡単のために、制御対象は1個の不安定零点を含むものと仮定するが複数個の不安定零点を含む場合への拡張は容易である。このとき、つぎの結果が成立する⁷⁾。

[補題 3.1] $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ は1個の不安定零点 $q(|q| > 1)$ を含むものとする。この不安定零点に対応する零方向単位入力ベクトルおよび零状態ベクトルをそれぞれ ξ, η とする。すなわち

$$\begin{bmatrix} qI - A & -B \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = 0, \quad \eta'\eta = 1 \quad (3.21)$$

が成立しているものとする。このとき、(2.2)式における行列 B_m と全域通過部分 $G_a(z)$ の最小実現 $\{A_a, B_a, C_a, D_a\}$ をつぎのように選ぶことができる。

$$B_m = B_a J_q \quad (3.22)$$

$$A_a = \frac{1}{q}, B_a = \frac{1}{q} \left(q - \frac{1}{q} \right) \eta', C_a = \eta, \quad (3.23)$$

$$D_a = I - \left(1 + \frac{1}{q} \right) \eta \eta'$$

ただし、

$$B_q = B - \left(q - \frac{1}{q} \right) \xi \eta' \quad (3.24)$$

$$J_q = I - (q+1) \eta \eta' \quad (3.25)$$

である。このとき、(2.1)式および(2.3)式に対して、評価関数(3.20)式を最小化するレギュレータ問題の最適状態フィードバックゲイン行列をそれぞれ F および

$$\Psi = [F_m \quad F_a] \quad (3.26)$$

とすると、つぎの関係が成立する。

$$F_m = F, \quad F_a = qF\xi \quad (3.27)$$

□

上の補題を用いると、積分型コントローラのフィードバックゲイン行列に関するつぎの結果が得られる。

[補題 3.2] $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ は1個の不安定零点 q を含むものとし、(2.2)式における行列 B_m と全域通過部分 $G_a(z)$ の最小実現 $\{A_a, B_a, C_a, D_a\}$ をそれぞれ(3.22), (3.23)式のように選ぶ。このとき、レギュレータ問題に対する状態フィードバックゲイン行列(3.27)に対する行列方程式(3.3)式の解 $\Lambda = [L_m \quad L_a], M$ はつぎの関係を満足する。

$$L_m = L, L_a = qL\xi, M = T \quad (3.28)$$

ここで、行列 L, T はつぎの行列方程式の解である。

$$[L \quad T]E = [FA \quad I + FB] \quad (3.29)$$

ただし、

$$E = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

である。

(証明) (2.3), (2.4)式を用いると、行列方程式(3.3)は行列 L_m, L_a, M に関してつぎのように書き換えられる。

$$L_m(A - I) + MC = F_m A \quad (3.31)$$

$$L_m B_m C_a + L_a(A_a - I) = F_m B_m C_a + F_a A_a \quad (3.32)$$

$$L_m B_m D_a + L_a B_a = I + F_m B_m D_a + F_a B_a \quad (3.33)$$

ここで、(3.21)式から $(qI - A)\xi = B\eta$ が成立していることに注意すると(3.22), (3.23)式からつぎの関係が得られる。

$$\begin{aligned} B_m C_a &= B_a J_q C_a = -q \left[B\eta - \left(q - \frac{1}{q} \right) \xi \right] \\ &= (qA - I)\xi \quad (3.34) \end{aligned}$$

また、(3.23), (3.25)式から $J_q D_a = I$ が成立することから、

$$B_m D_a = B_q J_q D_a = B_q \quad (3.35)$$

が得られる。(3.27), (3.34), (3.35)式を用いると、(3.31) ~ (3.33)式はつぎのように表わされる。

$$L_m(A - I) + MC = FA \quad (3.36)$$

$$L_m(qA - I)\xi + L_a \left(\frac{1}{q} - 1 \right) = qFA\xi \quad (3.37)$$

$$L_m \left[B - \left(q - \frac{1}{q} \right) \xi \eta' \right] + L_a \frac{1}{q} \left(q - \frac{1}{q} \right) \eta' = I + FB \quad (3.38)$$

ここで、(3.29)式で定義される L, T を用いて(3.28)式で定義される L_m, L_a, M が(3.36), (3.38)式を満足することは容易に確かめられる。また、(3.37)式左辺に(3.28)式を代入し、 L が(3.29)式を満足することを用いると、

$$\begin{aligned} L(qA - I)\xi + (1 - q)L\xi \\ = qL(A - I)\xi = q(FA - TC)\xi \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる。ここで、 $C\xi = 0$ が成立していることに注意すると(3.37)式が成立することがわかる。したがって、(3.28)式で定義される L_m, L_a, M を(3.36)～(3.38)式に代入して得られる関係は(3.29)式と等価であり、(3.3)式は行列 Ω が正則のとき、解の唯一性が保証されることから、状態フィードバックゲイン行列(3.27)に対する行列方程式(3.3)の解は(3.28)式の関係満足する。■

(注意) (3.29)式で定義される行列 L, T は(2.1)式で与えられる制御対象に対する積分型コントローラのフィードバックゲイン行列である。

命題 3.1 と上の補題からつぎの結果が得られる。

[命題 3.2] $G(z) = C(zI - A)^{-1}B$ は 1 個の不安定零点 q を含むものとし、(2.2)式における行列 B_m と全域通過部分 $G_a(z)$ の最小実現 $\{A_a, B_a, C_a, D_a\}$ をそれぞれ(3.22), (3.23)式のように選ぶ。このとき、レギュレータ問題に対する状態フィードバックゲイン行列(3.27)式に対する行列方程式(3.3)式の解(3.28)式を(3.10)式に用いてコントローラを構成する。このコントローラを用いた積分型サーボ系の制御対象入力における感度行列 $\Sigma_{MSF}(z)$ はつぎのように分解表現される。

$$\begin{aligned} \Sigma_{MSF}(z) = z^{-1}(z-1)S(z)\{I + L(zI - A)^{-1} \\ [B - B_m G_a(z)] + z^{-1}L B_m G_a(z)\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

ここで、

$$S(z) = [I + F(zI - A)^{-1}B]^{-1} \quad (3.41)$$

である。

(証明) (3.23)式を用いると、(3.27)式で定義される F_a に対してつぎの関係が成立することがわかる。

$$F_a(zI - A_a)^{-1}B_a = \frac{q^2 - 1}{qz - 1} F \xi \eta' \quad (3.42)$$

また、(3.21)～(3.25)式を用いると、つぎのような関係が成立することを容易に示すことができる。

$$B_m G_a(z) = B - \frac{q^2 - 1}{qz - 1} (zI - A) \xi \eta' \quad (3.43)$$

上式両辺に左側から $F(zI - A)^{-1}$ をかけると、

$$\begin{aligned} F(zI - A)^{-1}B_m G_a(z) \\ = F(zI - A)^{-1}B - \frac{q^2 - 1}{qz - 1} F \xi \eta' \end{aligned} \quad (3.44)$$

が得られる。(3.42), (3.44)式から、(3.27)式で定義さ

れるフィードバックゲイン行列に対してつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} F_a(zI - A_a)^{-1}B_a + F_m(zI - A)^{-1}B_m G_a(z) \\ = F(zI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (3.45)$$

上式を(3.12)式に用いると(3.41)式が得られる。同様に、(3.28)で定義されるフィードバックゲイン行列に対してつぎの関係が成立する。

$$\begin{aligned} L_a(zI - A_a)^{-1}B_a + L_m(zI - A)^{-1}B_m G_a(z) \\ = L(zI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (3.46)$$

ここで、 $L_m = L$ が成立していることに注意し、(3.46)式を(3.11)式に用いると(3.40)式が得られる。■

4. 部分的ループ伝達関数回復

本章では、制御対象の出力のみが測定可能である場合に、予測型 Kalman フィルタを用いて最小位相部分の状態推定値のみをフィードバックするコントローラを構成し、このコントローラに基づく部分的ループ伝達関数回復手法について考察する。

予測型 Kalman フィルタによる(2.3)式で記述される系の状態ベクトルの推定値を

$$\hat{x}(t) = [\hat{x}'_m(t) \quad \hat{x}'_a(t)]' \quad (4.1)$$

とすると、これらの推定値はつぎのようなアルゴリズムにより得られることが示されている。

$$\begin{aligned} \hat{x}_m(t+1) = A \hat{x}_m(t) + B_m G_a(z) u(t) \\ + K_m[y(t) - C \hat{x}_m(t)] \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\hat{x}_a(t+1) = A_a \hat{x}_a(t) + B_a u(t) \quad (4.3)$$

(4.2)式の推定値の z 変換を $\hat{x}_m(z)$ とし、(3.10)式右辺の $z^{-1}[A \hat{x}_m(z) + B_m G_a(z) u(z)]$ を $\hat{x}_m(z)$ で置き換えることにより、つぎのような出力フィードバックの場合の積分型コントローラが得られる。

$$u(z) = (z-1)^{-1} T(z)[r(z) - y(z)] - L(z) \hat{x}_m(z) \quad (4.4)$$

このコントローラを積分型 MEF (Minimum-Phase Estimate Feedback) コントローラと呼ぶことにする。

Fig. 2 にこのコントローラを用いたサーボ系の構成を示す。

積分型 MEF コントローラの伝達関数行列に関してつぎの結果が成立することが容易に確かめられる。

<補題 4.1> (4.4)式で与えられる積分型 MEF コントローラの $y(z)$ から $u(z)$ までの伝達関数行列 $C_{MEF}(z)$ はつぎのように与えられる。

$$C_{MEF}(z) = D_c^{-1}(z) N_c(z) \quad (4.5)$$

ここで、

$$D_c(z) = I + L(z)(zI - A + K_m C)^{-1} B_m G_a(z) \quad (4.6)$$

$$N_c(z) = (z-1)^{-1} T(z) + L(z)(zI - A + K_m C)^{-1} K_m \quad (4.7)$$

致する。

(証明) このサーボ系の制御対象入力側における感度行列はつぎのように与えられることが文献1)で示されている。

$$S_{\text{INT}}(z) = z^{-1}(z-1)S(z)\{I + L(zI - A + KC)^{-1}B\} \quad (4.17)$$

ここで、 K は(2.1)式に対する予測型 Kalman フィルタのゲイン行列である。観測ノイズの共分散行列を I 、外乱の共分散行列 $\sigma BB'$ として、 $\sigma \rightarrow \infty$ とするとき、ゲイン行列の漸近値は(4.15)式と同様に $K^* = AB_m(CB_m)^{-1}$ で与えられることが知られている。逆行列補題を用いれば、この漸近値に対して次式が成立することが容易に確かめられる。

$$\begin{aligned} L(zI - A + K^*C)^{-1}B \\ = z^{-1}LB_mG_a(z) + L(zI - A)^{-1}[B - B_mG_a(z)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

(4.18)式を(4.17)式に用いることにより、 $S_{\text{INT}}(z)$ の漸近値は(3.40)式で与えられる $\Sigma_{\text{MSF}}(z)$ に一致することがわかる。

上の命題によれば、ループ伝達関数回復手法により達成可能なフィードバック特性の回復のためには、部分的ループ伝達関数回復手法を用いる必要はなく、通常の方法の形式的適用で十分である。しかし、このことは(3.20)式で与えられる評価関数に対して、部分的ループ伝達関数回復手法を適用する場合にいえることである。部分的ループ伝達関数回復手法を用いる場合、(3.20)式より一般的な評価関数を用いることが可能であり、これらの自由度を利用することにより、通常ループ伝達関数回復手法では達成できないフィードバック特性を部分的ループ伝達関数回復手法により得ることが可能である。なお、このような自由度を利用することは周波数依存の重み関数を用いることに相当する。

5. 数 値 例

本章では部分的ループ伝達関数回復手法の有効性を数値例を通して検討する。対象とする制御対象は伝達関数がつぎのように与えられる1入力1出力連続時間系であるものとする。

$$G(s) = \frac{s+10}{(s+1)(s+0.5 \pm 1.2j)} \quad (5.1)$$

この制御対象は最小位相系であり、2次系の部分の自然角周波数は1.3(rad/sec.)、減衰率は0.385である。零次ホールドが前置されるものとして、サンプリング周期 $T=0.1(\text{sec.})$ で離散化すると、不安定零点 $z=-1.2813$ を有する離散時間非最小位相系が得られる。この離散時間系の(2.3)、(2.4)式に対応する状態空間表現の各行列は

つぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2.7636 & -2.6139 & 0.8187 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_m = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= [0.0080 \quad 0.0033 \quad -0.0023], \\ A_a &= -0.7805, \quad B_a = 1, \\ C_a &= 0.3903, \quad D_a = 0.28188 \end{aligned} \quad (5.2)$$

(3.20)式の2次形式評価関数の重み係数 ρ を変化した場合、部分的ループ伝達関数回復の目標特性となる積分型 MSF コントローラにより達成される感度関数と相補感度関数のゲイン-周波数特性を Fig. 3 に示す。前章の命題 4.1 で明らかにしたように、この特性は通常のループ伝達関数回復手法を形式的に適用しても得られる。 ρ を小さくすると、低域での感度は減少するが、高域での相補感度は増加し、高域での不確定性に対するロバスト安定性は劣化する。

部分的ループ伝達関数回復手法により提供される設計の自由度を活用するために、(3.20)式に非最小位相部分の状態変数に関する項を付加したつぎのような2次形評価関数を用いることを考える。

$$V_a = \sum_{t=0}^{\infty} [y^2(t) + ax_a^2(t) + \rho u^2(t)] \quad (5.3)$$

ここで、 $x_a(z) = (zI - A_a)^{-1}B_a u(z)$ であることに注意し、Parseval の等式を用いると(5.3)式の評価関数はつぎの

(a) Gain characteristics of the sensitivity function

(b) Gain characteristics of the complementary sensitivity function

Fig. 3 Feedback properties of the MSF integral controller using the performance index (3.20)

(a) Gain characteristics of the weighting function $\phi_a(z)$

(b) Gain characteristics of the sensitivity function

(c) Gain characteristics of the complementary sensitivity function

Fig. 4 Feedback properties of the MSF integral controller using the performance index (5.3)

ように書ける.

$$V_a = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} [y(z^{-1})y(z) + \rho u(z^{-1})\phi_a(z^{-1})\phi_a(z)u(z)] \frac{dz}{z} \quad (5.4)$$

ここで,

$$\phi_a(z^{-1})\phi_a(z) = 1 + \frac{\alpha B_a^2}{\rho(z^{-1} - A_a)(z - A_a)} \quad (5.5)$$

である.(5.5)式はスペクトル分解の関係式であり, 任意の $\alpha > 0, \rho > 0$ に対してこの関係を満足する安定な $\phi_a(z)$ が存在することが保証される.

(5.4)式から, (5.3)式の評価関数は(5.2)式の評価関数における操作量の重みを周波数依存のものに置き換えたものと解釈できる. 操作量に対する周波数重み $\phi_a(z)$ の

Fig. 5 Effect of the parameter μ on the step reference response

周波数特性を考慮することにより, (5.3)式の重み係数 α, ρ を合理的に決定することができる. 以下, 一例として, 重み係数をつぎのように選んだ場合について考察する.

$$\rho = \frac{\lambda}{\phi_a^2(1)}, \quad \alpha = \mu\rho \quad (5.6)$$

ここで, λ, μ は新たに導入したスカラー調整用パラメータである. この場合, 重み関数 $\phi_a(z)$ はパラメータ μ のみに依存することに注意しよう. したがって, (5.6)式のように重み係数を選ぶことは, (5.4)式の操作量に関する項の直流成分 ($z=1$) に対する重みを一定値 λ とし, パラメータ μ により重み関数 $\phi_a(z)$ の周波数特性を調整できる. $\lambda=0.1$ とし, μ を変化させた場合に対する重み関数 $\phi_a(z)$, 感度関数および相補感度関数のゲイン特性を **Fig. 4** に示す. 明らかに, パラメータ μ により, 低域での特性を大きく変えずに高域での特性を調整できる. 特に, パラメータ μ を増加させることにより, 相補感度の高域におけるゲイン特性を低下させることができることは有用である. このような目標特性は評価関数(3.20)式を用い重み ρ を調整するだけでは実現することが困難である.

Fig. 5 に部分的状態フィードバックが可能な場合に対して, μ を変化させた場合のステップ応答を示す. パラメータ μ はステップ応答にほとんど影響を与えないことが確認できる. また, **Fig. 6** に $\mu=10, \sigma_s=1$ とし, σ_f を変化させた場合の感度関数と相補感度関数のゲイン-周波数特性を示す. $\sigma_f \rightarrow \infty$ とすることにより, 目標とする MSF コントローラの特性に漸近することが確認できる.

6. おわりに

離散時間非最小位相系に対する部分的ループ伝達関数回復手法による離散時間積分型サーボ系の設計について考察した. プラントの入力および出力の2次形式からなる評価関数に対しては, 部分的ループ伝達関数回復手法により得られるフィードバック特性は通常のループ伝達

(a) Gain characteristics of the sensitivity function

(b) Gain characteristics of the complementary sensitivity function

Fig. 6 Feedback properties of the MEF integral controller

関数回復の手続きを形式的に適用して得られるものと一致することを明らかにした。このことにより、非最小位相系に対する通常のループ伝達関数回復の手続きの形式的適用に対してシステム論的な意味付けを与えることができる。また、部分的ループ伝達関数回復手法は通常の方法よりも設計の自由度が大きいのことを指摘し、このような自由度を利用する一例を数値例として与えた。なお、本論文では制御対象入力側におけるフィードバック特性について考察したが、制御対象出力側に対しては、本論文と双対な結果が成立する。

参 考 論 文

- 1) 郭, 石原, 竹田: オプザーバを用いた離散時間1型サーボ系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, **26**-2, 159/166 (1990)
- 2) T. Ishihara, H. J. Guo and H. Takeda: A Design of Discrete-Time Integral Controllers with Computation Delays via Loop Transfer Recovery, *Automatica*, **28**-3, 599/603 (1992)
- 3) 美多, 向田: デジタル制御系における最適サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, **19**-3, 193/198 (1983)
- 4) G. Stein and M. Athans: The LQG/LTR procedure

for Multivariable Feedback Control Design, *IEEE Trans.*, **AC-32**-6, 105/114 (1987)

- 5) K. J. Astrom, P. Hagander and J. Sternby: Zeros of Sampled Systems, *Automatica*, **20**-1, 31/38 (1984)
- 6) Z. Zhang and J.S. Freudenberg: Loop Transfer Recovery for Nonminimum Phase Plants, *IEEE Trans.*, **AC-35**-5, 547/553 (1990)
- 7) 石原 正: 離散時間非最小位相系に対するループ伝達関数回復手法について, 計測自動制御学会論文集, **30**-10, 1172/1177 (1994)
- 8) J.B. Moore and L. Xia: Loop Recovery and Robust State Feedback Designs, *IEEE Trans.*, **AC-32**-6, 512/517 (1987)
- 9) 渡部, 石原, 猪岡: 演算時間を考慮した離散時間系の部分的ループ伝達関数回復, 計測自動制御学会論文集, **27**-1, 41/48 (1991)
- 10) U. Shaked: Explicit Solution to the Singular Discrete-Time Stationary Filtering Problem, *IEEE Trans.*, **AC-30**-1, 34/47 (1985)

[著 者 紹 介]

郭 海 蛟 (正会員)

1988年, 東北大学大学院工学研究科博士課程(前期)修了。90年同大学電気工学科助手。デジタル制御, ロバスト制御などの研究に従事(工学博士)。

石 原 正 (正会員)

1977年, 東北大学大学院工学研究科博士課程単位取得退学。同年同大学電気工学科助手。87年同大学機械工学科助教授。現在, 同大学機械航空工学科助教授。確率系の最適制御および適応制御, デジタル制御系などの研究に従事。電子情報通信学会, システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEEなどの会員(工学博士)。

竹 田 宏 (正会員)

1959年, 東北大学大学院工学研究科博士課程修了。同年富士通(株)入社。60年東北大学電気通信研究所助手。62年同大学助教授。73年同教授。93年東北学院大学教授。最適推定理論, 手動制御系の数学的モデルの研究などに従事。IEEE, 電気学会, 電気情報通信学会などの会員, 本学会フェロー(工学博士)。