画像合成のための高速・簡易カメラ キャリブレーション[†]

出口 光一郎*・多田羅 哲 夫*

A Fast Camera Calibration for Image Synthesis

Koichiro DEGUCHI* and Tetsuo TATARA*

This paper proposes a fast and approximate solution of camera calibration for image synthesis. We present three types of the approximation for perspective imaging, and compare their performances to that of the exact solution by exact perspective model. The proposed techniques reduce the processing time drastically. This is because, while the exact solution must employ biquadratic equations, by using approximations to perspective, a fast solution with quadratic equations was constructed for real time image synthesis. This technique allows some amount of errors by the approximation, but it is shown to be tolerant for practical use.

Key Words: computer vision, camera calibration, image synthesis, perspective modeling, perspective 3 point problem

1. はじめに

人工現実感の実現のための画像、景観の予測評価、アニメーション画像の作成などで、ある与えられた実動画像にほかの画像や合成画像を埋め込むことが行われる。このとき現実味のある画像を合成するためには、原画像を撮影したカメラの位置・姿勢を知っていないと行えない。そこで、画像に写っている形のわかっている対象をもとにカメラの位置・姿勢を求める。本来、この問題では、厳密な解は、4次方程式を解くことで得られる。これに対して、ここでは、画像への投影モデルを近似することで、多少の誤差を許しても、リアルタイムでの画像合成を可能にするための、高速で簡便なキャリブレーション手法を提案する。本手法は、2次方程式を解くだけで良く、実時間での応用が可能となり、モデル近似による誤差も合成画像にとっては十分実用的に許容できる範囲であることが確かめられた。

2. 画像合成のためのカメラキャリブレーション

ここで想定している応用では、ある実画像が与えられたときに、まず、その実画像を撮影したときと同じ視点と姿勢から別の3次元形状モデルを撮影したとすれば、きつと「こう見えるはずだ」という画像を作る。その画像を実画像に合成すると、あたかも同じときと同じ視点と姿勢で撮影されたかのような合成画像を作り出すことができる(Fig. 1)。このためには、与えられている実画像を撮影したカメラの視点と姿勢を知っている必要がある。撮影時にこのような情報を保存しておかなかった画像では(実際には、このような場合が普通である)、画像内の3次元形状がわかっている対象の画像から、この視点と姿勢を推定する。これを「カメラキャリブレーション」という。

カメラキャリブレーションの手法についてはこれまでさまざまな研究がなされてきた^{1),2)}。この論文では、動画像に対する画像合成のための高速で簡便なカメラキャリブレーションの手法の開発を目指す。ここでいう「高速で簡便」とは、計算の基準として必要な3次元位置のわかっている点(制御点と呼ぶ)の個数が少なく、リアルタイムで画像合成ができる時間で計算を行うことができ、画像の読みとり誤差に対して安定であるが、そのかわり

[†] 第33回計測自動制御学会学術講演会で発表(1994・7)

* 東京大学工学部 東京都文京区本郷7-3-1

* Faculty of Engineering, University of Tokyo,
Bunkyo-ku, Tokyo

(Received August 23, 1994)

(Revised November 24, 1994)

多少のキャリブレーション誤差は許容できるということである。

厳密な透視モデルに基づくカメラキャリブレーションの解法では、4次方程式を解く必要があり、計算に手間がかかる。また、方程式の係数の微小変化に対して、不安定な挙動を示すので、画像読み取りの誤差に弱いという欠点がある。そこで、ここでは、近似的な透視モデルによる解法を提案する。その解法では2次方程式を解けばよいことになるために、計算時間ははるかに小さくなって、実時間処理が可能になる。もちろん、近似を行っているために誤差が生じるが、この誤差は十分に許容範囲内であることが評価実験による検討で確かめられた。

3. 近似モデルに基づく解法

3.1 透視3点問題と結像系の近似

まず、本手法にとって中心的な「透視3点問題²⁾」について説明する。「透視3点問題」は、Fig. 2にExact Per-

Fig. 1 Schematic process flow of camera calibration and image synthesis

spectiveと呼んで示すように、空間の3点A, B, Cと、その3点の像X, Y, Zから、カメラの視点Pと姿勢を決定するという問題である。このとき、A, B, Cの空間位置はわかっている。このように、何個かの点の3次元位置がわかっている、その像の画像面上の位置から、カメラの相対的な位置・姿勢を求めるとき、必要な最小の点数は3である。

すなわち、ここでは、AB, ACの長さ l_{ab} , l_{ac} 、その間の角度 α は既知である。また、画像から図の γ_1 , γ_2 , ϕ が読みとれる。これらを元に、 θ_1 , θ_2 , l_a を決めることができれば、カメラのA, B, Cに対する相対的な位置・姿勢が決まる。この問題に対する研究の歴史は古く、厳密な透視モデルに基づく解法はいくつか知られている⁵⁾。それらのいずれの解法でも、最低でも4次方程式を解かねばならない²⁾。ここでの実験に用いた、それらの解法の一つを付録に示す。

このExact Perspectiveに対して、光学系を近似するモデルがいくつか提案されている。このうち、それぞれある条件の元ではかなり良い近似を与え、しかも計算が簡略化できる近似的な透視モデルとして、図に示す、Weak Perspective, Paraperspective, Orthoperspectiveの三つモデルを考える^{3), 4)}。

これらのそれぞれの近似モデルでは、図に示すように、一旦、A点を通る仮想的な平面にB, C点を射影し、その点がさらに画像として画像面Y, Zに投影されるものとして、そのときのXYZをABCの像とみなす。この仮想面の作り方と、その面への射影のし方がそれぞれで異なっているが、いずれも画像への透視の近似モデルとなっている。

以下に、この三つの近似モデルについて、それらを統一的に扱っている文献⁴⁾での記法を引用して簡単に説明する。

Fig. 2 Exact perspective and its approximations for the high-speed camera calibration

Weak Perspective では、点 A を通り画像面と平行な面 Π へ、ほかの 2 点 B, C から下ろした垂線の足 H_1, H_2 の像が、Y, Z であるとする。すなわち、三角形 XYZ は三角形 AH_1H_2 の像であるとする。また、 θ_1, θ_2 はそれぞれカメラの光軸と AB, AC のなす角、 β_1, β_2 はそれぞれ、直線 PX に垂直な面と XY, XZ がなす角である。三角形 PAH_1 と三角形 AH_1B 、三角形 PAH_2 と三角形 AH_2C の関係からつぎの式が成り立っている。

$$\frac{\sin \theta_1}{l_a/l_{ab}} = \frac{\sin \gamma_1}{\cos(\gamma_1 + \beta_1)} \quad (1)$$

$$\frac{\sin \theta_2}{l_a/l_{ca}} = \frac{\sin \gamma_2}{\cos(\gamma_2 + \beta_2)} \quad (2)$$

Weak Perspective の図と Exact Perspective の図を見比べるとわかるように、像 XYZ が画像面の中心近くにあるときは、良い近似となっているが、中心から離れるに従い、点 B, C が視点と画像を結ぶ直線上から離れ、近似精度が悪くなると予想される。

つぎに、Paraperspective では、やはり点 A を通り画像面と平行な面 Π を考えるが、それぞれ点 B, C を A への視線 PA に平行に平面 Π 上に下ろし、その足を点 Q_1, Q_2 として、画像面上の点 X, Y, Z は、点 A, Q_1, Q_2 の像であるとする。三角形 PAQ_1 と三角形 AQ_1B 、三角形 PAQ_2 と三角形 AQ_2C の関係からつぎの式が成り立っている。

$$\frac{\sin \theta_1}{l_a/l_{ab}} = \frac{\sin \gamma_1 \cos \beta_1}{\cos(\gamma_1 + \beta_1)} \quad (3)$$

$$\frac{\sin \theta_2}{l_a/l_{ca}} = \frac{\sin \gamma_2 \cos \beta_2}{\cos(\gamma_2 + \beta_2)} \quad (4)$$

Paraperspective は、三点 A, B, C がともに光軸に対して同じ側にあるとき、良い近似になっている。

3 番めの Orthoperspective では、点 A を通り A への視線 PA に垂直な平面を Π とし、点 B, C から面 Π に下ろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とする。画像面上の点 X, Y, Z は、それぞれ点 A, H_1, H_2 の像であるとする。三角形 PAH_1 と三角形 AH_1B 、三角形 PAH_2 と三角形 AH_2C の関係からつぎの式が成り立つ。

$$\frac{\sin \theta_1}{l_a/l_{ab}} = \tan \gamma_1 \quad (5)$$

$$\frac{\sin \theta_2}{l_a/l_{ca}} = \tan \gamma_2 \quad (6)$$

Orthoperspective は、まず、視点と点 A を結ぶ視線 PA がレンズの光軸と一致させるようにカメラを回転し、Weak perspective による投影して、その後、カメラの位置を元に戻すような回転をしたのと同様である。したがって、三点 A, B, C が近くにあれば、画像上の位置によらずに良い近似となっている。

3.2 近似透視モデルによる透視 3 点問題の解法

このようなそれぞれの近似モデルを使って、透視 3 点

問題を解くことを考える。

以下の θ_1 と θ_2 を導く解法は、文献 4) によるものであり、ここでの実験でもこの手法を用いた。この手法は、三つの近似モデルを共通した方程式に落すもので、それぞれのモデルにとって最高速に解を得る解法ということでは必ずしもないが、三つのモデルの対比が鮮明になることから、この手法を用いた。

(1) と (2) 式、(3) と (4) 式、(5) と (6) 式のそれぞれで、 $\sin \theta_1 / \sin \theta_2$ を作ることで、 l_a を消去する。ここで

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = K \quad (7)$$

と定義する。K は foreshortening ratio と呼ばれ、A, B, C の 3 点の位置関係と画像から直接に読みとれる量の上に依存し、それぞれのモデルに対して、

$$\text{Weak: } K = \frac{\sin \gamma_1 / l_{ab} \cos(\gamma_2 + \beta_2)}{\sin \gamma_2 / l_{ca} \cos(\gamma_1 + \beta_1)} \quad (8)$$

$$\text{Para: } K = \frac{\sin \gamma_1 / l_{ab} \cos \beta_1 \cos(\gamma_2 + \beta_2)}{\sin \gamma_2 / l_{ca} \cos \beta_2 \cos(\gamma_1 + \beta_1)} \quad (9)$$

$$\text{Orth: } K = \frac{\tan \gamma_1 / l_{ab}}{\tan \gamma_2 / l_{ca}} \quad (10)$$

となる。

また、 $\angle BAC$ の角度 α は θ_1 と θ_2 との間に、

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \phi + \cos \theta_1 \cos \theta_2 = \cos \alpha \quad (11)$$

なる関係がある。ここで ϕ は、weak perspective では線分 XY と XZ のなす角であり、ほかの近似透視法では、辺 AB, 辺 AC のそれぞれと視点を通る面がなす角である。

(7) 式を用いて、(11) の $\sin \theta_2$ を消去すると、三つのどの近似モデルに対しても、 $\sin \theta_1$ について、形式的にはつぎの同じ形の二次方程式が得られる。

$$\sin^2 \phi X_1^2 - (K^2 - 2K \cos \alpha \cos \phi + 1) X_1 + K^2 \sin^2 \alpha = 0 \quad (12)$$

ただし、

$$X_1 = \sin^2 \theta_1 \quad (13)$$

である。

この方程式は常に二つの正の実数解をもち、さらに一方の解のみが 1 以下になる。また、 $0 \leq \theta_1 \leq \pi$ であるから $0 \leq \sin \theta_1 \leq 1$ である。

したがって、結局、

$$\sin \theta_1 = \left[\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2 \sin^2 \phi} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

ここで、B, Δ は

$$B = -(K^2 - 2K \cos \alpha \cos \phi + 1), \quad (15)$$

$$\Delta = B^2 - 4K^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \phi \quad (16)$$

である。

$\sin \theta_1$ がわかると (7) 式によりそれぞれのモデルでの $\sin \theta_2$ もわかる。また、それぞれ、(1) 式、(3) 式、(5)

式から l_a が求まる。ただし、(12)を満たす θ_1, θ_2 の組合わせは2通りあることになる。

以上が文献4)による解法である。 θ_1, θ_2 から視点Pと、視線の方向を決定するには、つぎのようにする。点Aから視点Pへ向かう向きの単位ベクトルを $\mathbf{n}_a$ とすると、

$$\begin{cases} \mathbf{n}_a \cdot \overrightarrow{AB} = \cos(\pi - \theta_1) l_{ab} \\ \mathbf{n}_a \cdot \overrightarrow{AC} = \cos(\pi - \theta_2) l_{ca} \\ \|\mathbf{n}_a\| = 1 \end{cases} \quad (17)$$

であり、点A, B, Cの位置ベクトルは既知であるので、この方程式を解いて $\mathbf{n}_a$ が求まり、 l_a はすでに計算されているので、視点Pの位置ベクトルが求まる。続いて、Pと画像面上の点X, Y, Zの位置関係からカメラの光軸の方向ベクトルも求まる。

この近似解法では、上記のように2組の解を得る。これらの中からほかの点の像の位置を参考にして一つに決定する。そのし方はいろいろ考えられるが、ここでは、つぎのようにした。まず先に計算で使った3点のうち点Aは同じ点をとる。点B, Cのうち一つまたは両方をほかの点と入れ換え、もう1度カメラの座標・方向ベクトルを計算する。ここまでで得られた視点四つのうち距離の最も近い2点を選び、それらの座標と対応する方向ベクトルの平均をそれぞれ正しい解とする。

厳密解法では、4次方程式を解くことになるから、その解は最大で四つある。また、それぞれの解に対して、姿勢として二つずつの互いに逆向きの方向ベクトルが決まるので、結局厳密解法による解は、最大で全部で八つ

求まる。ただし、そのときの四つは一見して無意味な解であることがわかるので除ける。ここでは本題でないで、残された解からの絞り込みには触れない。

4. 評価実験

各モデルによるカメラキャリブレーションの処理時間および精度を、まずシミュレーション実験で、厳密なモデルによる解法の結果と比較し、実用性を検討した。

比較実験では、立方体を対象として、それが様々な位置に置かれたときの画像を厳密な透視モデルで合成し、画像データとした。Fig. 3に示すように、まず、カメラの位置・姿勢を設定し、画像を作る。その画像上の立方体の頂点を特徴点として座標を読みとる。その座標値から、前記の各モデルによりカメラの位置・姿勢を再現する。

本来のカメラキャリブレーションでは、この位置・姿勢がどの位の精度で再現できているかが主要な関心であるが、ここでは、始めに述べたように、この再現された位置・姿勢をもとに画像合成を行うことを目的としているので、つぎのようにして誤差を評価した。この再現されたカメラ位置・姿勢により、最初の立方体の画像を合成する。そして、先の本当の位置・姿勢から見た画像と比較する。

この方法により、どの近似モデルがどの程度有効であるかを調べた。続いて、実画像へも応用して、有効性を確認した。

Fig. 3 Evaluation method of the calibration errors

Fig. 4 Target object shape and position used in the simulation

Fig. 5 Image area in which the error was evaluated

4.1 シミュレーション実験の設定と誤差の評価法

対象は、Fig. 4 に示す立方体である。この対象を xyz 空間の様々な位置に置いたカメラから見る。ただし、カメラの姿勢は、この立方体の各頂点の像が Fig. 5 に示すように画像面上で視点であるレンズの焦点から見ておおよそ 15° の範囲に入る場合のみを評価の対象とした。

立方体の8頂点を特徴点とし、一つの頂点 (Fig. 4 で、原点 O にある頂点) を点 A とする。残りの頂点の画像面上の点のうち点 A を一つの頂点として面積が最大になる三角形を作るあと二つの頂点を制御点として選ぶことにする。さらに先に述べたように、余分な解を除くために、先に述べた条件を満たしてこの面積が最大になる三角形を作るもう一組の3点を用いる。

まず対象までの距離を固定し、視点と視線の方向ベクトルを変化させて画像面上で物体の像を動かし、その像から視点・方向ベクトルを計算する。誤差の評価は、前節で述べたように、算出された視点・方向ベクトルによる物体の像の各頂点と実際の画像上での対応する頂点間のずれの距離の平均で行う。

4.2 計算時間

上記のような設定で、ある1シーンで立方体の8頂点の像の座標が与えられた時点から、カメラ位置・姿勢をワークステーション (SGI: Indy) で算出するのに要した計算時間の比較を行った。

カメラの様々な位置・姿勢に対して、厳密なモデルと三つの近似モデル用いたそれぞれ1000回の計算での所要時間の平均を Table 1 に示す。応用を考慮して、1/60秒を単位として示してある。厳密解法で、4次方程式はLaguerre法による反復法で解いている。

近似解法の計算時間には、解を絞り込むための2度目の計算と真の解の選択のための処理時間も含んでいる。厳密解法の処理時間には解の絞り込みは含んでいない。

三つの近似モデルでの計算時間の優劣はほとんどなく、透視モデルを近似することで、少なくとも4倍以上の高速化が計られ、また、汎用ワークステーションでも十分に実時間で計算できることが示されている。

4.3 誤差の評価

まず、画像上の点の位置の読みとり誤差はないものとして、近似モデルの良さを先に述べた方法で評価した。

画像での読みとり誤差がなければ、厳密モデルでの誤差は0である。

Fig. 6 は、対象の一辺の長さの10倍の距離にカメラがあるときの、画像合成の平均ずれを示す。ただし、対象の立方体とカメラの相対的な位置・姿勢のとり方は様々にある。ここで示すのは、つぎのようなカメラ姿勢に対する誤差のプロットである。

まず、カメラは Fig. 4 での空間座標の原点 O を通り xyz 軸から等距離にある直線上で点 O から先に述べた距離に置く。原点 O にある頂点の像が画像中心にあるよう最初の姿勢を決める。このとき、視野がおおよそ 15° の範囲にある対象上のすべての点について、その点が画像の中心に来よう、まずカメラを光軸回りに時計廻りに回転して画像面の y 軸上に移動し、続いて上下に振る。このように姿勢を決めたときに、前述のように原点 O にある頂点を点 A としてあとは前述のように画像上で面積最大となる頂点を選んで制御点とした。

こうして選んだ制御点によるカメラキャリブレーションの結果のずれを、点 A への視線の画像中心を通る光軸からの角度で画像上の位置を表わして、プロットしたものである。三つの近似モデルによる誤差を重ねてある。対象の大きさ10に対して、画像面上の1画素の大きさが1/50とし、各頂点の再合成した画像位置のずれの平均を画素を単位として表示してある。

最初の位置からの姿勢の決め方が、点 A の位置に対し

Fig. 6 Calibration errors by approximate projection models (without image reading noise)

Table 1 Processing times on a workstation (SGI: Indy) using the exact perspective model and its three type approximations

Perspective Model	Processing Time (unit: 1/60 sec)
Exact Perspective	0.473
Weak Perspective	0.119
Paraperspective	0.121
Orthoperspective	0.120

て点対象ではないので、図では誤差が点対称にはなっていないが、しかし、全体の傾向としては、像が中心から離れるほど誤差の影響は大きく、その大きさはほとんど点対称、すなわち、対象の置かれている方向によらないとみなせる。

誤差は、どのモデルでも最大で3画素程度であった。その中では、先に予想したように、Orthoperspectiveによる近似が最も良かった。

また、カメラと対象の距離が近くなるほどこの誤差は大きくなる。距離がFig. 6に示した場合の半分(対象の一辺の長さの5倍)のときは、誤差の分布形はほとんどこの図と相似で大きさが2倍に、距離が1.5倍のときは、誤差は同様の分布形で大きさは半分になった。

つぎに、同じ設定で、画像上の点の位置の読みとりで1画素の量子化誤差があるときの誤差を示す。Fig. 7は、前図と同様に示した、厳密モデルによる画像合成の誤差である。ただし、前述のように複数の解が得られたときは、真の解にもっとも近いものの誤差である。したがって、解の絞り込みを誤れば誤差はもっと大きくなる。画

Fig. 7 Calibration error by Exact perspective model with image reading noise

Fig. 8 Calibration error using Orthoperspective model with image reading noise

像の読みとり誤差は、4次方程式の係数の誤差となる。このように高次方程式では係数のわずかな誤差でも、解には時として大きな誤差を生じることがあることがわかる。

これに対して、Fig. 8は、同じ読みとり誤差があるときの、Orthoperspectiveによる近似の結果である。Fig. 6に比べて誤差にばらつきが生じているが、Fig. 7の厳密モデルのときのように不安定な振舞いをすることはない。近似によって、副産物として、画像の読みとり誤差に対してはより頑健に解が得られていることが示されている。

4.4 画像の合成(1)

Orthoperspectiveモデルを使って計算したカメラ位置・姿勢による画像合成で、どの程度のずれが生じるのかを示す。

Fig. 9(a)に示す物体を対象とした画像があり、その画像からカメラの位置・姿勢を計算した後、同図(b)の物体が(a)のくぼみに埋め込まれた画像を合成する。結果はFig. 10(a), (b), (c)に示す。

カメラが対象物体に近いときはモデルの近似が悪くなり、その分ずれが大きくなっているが、実用上は十分な合成ができていると思われる。

4.5 画像の合成(2)

Fig. 11, 12に、実画像に対して適用している結果を示

Fig. 9 Target objects used for camera calibration (a), and image synthesis (b) which is to be superimposed on the image of (a)

Fig. 10 Synthesized images for camera positions of (a) (150, 100, 50), (b) (100, 150, 50), and (c) (70, 70, 50)

Fig. 11 (a) An example of real image of a building model, (b) resulted error of proposed camera calibration for this image

す。

それぞれ、大きさのわかっている模型の建物を撮影した実画像(a)から、カメラの位置・姿勢を求め、その位置・姿勢から見た同じ建物の像を合成して、実際の(a)の建物の位置に重ねて示したのが(b)である。投影モデルは Orthoperspective モデルを用いた。

(a)

(b)

Fig. 12 (a) Another example of real image, and (b) its result

実用上は十分許容できるずれであるとみなせる。

5. おわりに

画像への投影を近似することで、画像から対象を撮影したときのカメラの位置・姿勢を高速で簡易に再現する手法を述べた。三つの近似モデルを示したが、その誤差はどれも十分許容できる範囲であると考えられる。その中でも、モデルの性質上、Orthoperspective モデルが一番小さな誤差を与える。この近似解法を用いると、計算時間は三つの近似モデルともに同程度で、リアルタイムでTV 動画画像合成を行うのに十分間に合う。また、厳密解法では高次方程式を解くので、画像の誤差に弱い面があったが、近似解法では2次方程式を解くだけであるので、逆に誤差には頑健になっていることが示された。

この研究は、文部省科学研究費・一般研究(C)、および、(財)放送文化基金よりの研究補助金によったものである。

参考文献

- 1) 出口光一郎：カメラキャリブレーション手法の最近の動向，情報処理学会コンピュータビジョン研究会報告，82-1，1/8 (1993)
- 2) 出口光一郎：画像と空間，昭晃堂，128/142 (1991)
- 3) J. Aloimonos and M. Swain：Paraperspective Projection：Between Orthography and Perspective，Technical Report CAR-TR-320，Cent. for Automat. Univ. of Maryland (1987)
- 4) D. DeMenthon and L. S. Davis：Exact and Approximate Solutions of the Perspective-Three-Point Problem

lem, IEEE Trans., PAMI-14-11, 1100/1108 (1992)

- 5) R. M. Haralick, et al.: Review and Analysis of Solutions of The Three Point Perspective Pose Estimation Problem, Proc. Computer Vision and Pattern Recognition 91, 592/598 (1991)

《付録 厳密モデルによる解法》

厳密モデルによる解法はいくつか与えられている^{1),2),5)}が,ここでは,文献4)にそって, Fig. 2での表記に基づく解法のあらましを示す。

Exact Perspectiveの図でやはり θ_1, θ_2 を求めれば良い。

$$t_1 = \theta_1 - \gamma_1, \quad t_2 = \theta_2 - \gamma_2 \quad (18)$$

と置き,

$$\frac{\sin t_1}{\sin t_2} = K \quad (19)$$

とすれば, 厳密モデルの場合は,

$$K = \frac{\sin \gamma_1 / l_{ab}}{\sin \gamma_2 / l_{ac}} \quad (20)$$

となる。 t_1, t_2 を使って, (11)を表わすと,

$$\begin{aligned} & p(c_1 \sin t_1 + s_1 \cos t_1)(c_2 \sin t_2 + s_2 \cos t_2) \\ & + (c_1 \cos t_1 - s_1 \sin t_1)(c_2 \cos t_2 - s_2 \sin t_2) = q \end{aligned} \quad (21)$$

ただし,

$$\begin{aligned} p &= \cos \phi, \quad q = \cos \alpha, \quad c_1 = \cos \gamma_1 \\ s_1 &= \sin \gamma_1, \quad c_2 = \cos \gamma_2, \quad s_2 = \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

(19)を使って, t_2 を消去すると, $\sin^2 t_1$ についてのつぎの方程式を得る。

$$u_4 \sin^8 t_1 + u_3 \sin^6 t_1 + u_2 \sin^4 t_1 + u_1 \sin^2 t_1 + u_0 = 0 \quad (22)$$

ただし, 係数は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} u_0 &= -r_2^2, \quad u_1 = q_1^2 - 2q_2 r_2, \\ u_2 &= -q_1^2 - q_2^2 - 2(p_1 q_1 + p_2 r_2), \end{aligned}$$

$$u_3 = p_1^2 - 2p_1 q_1 - 2p_2 q_2,$$

$$u_4 = -p_1^2 - p_2^2$$

$$p_1 = -2(a_1 b_1 + a_2 b_2), \quad q_1 = 2(a_1 b_1 K^2 - q b_2 K),$$

$$p_2 = a_1^2 + 2q_2^2 - b_1^2 - b_2^2,$$

$$q_2 = K^2(-a - 1^2 + b_1^2) b_1^2 K^2 + 2a_2 q K,$$

$$r_2 = K^2(-b_1^2 + q^2),$$

$$a_1 = -s_1 c_2 + p c_1 s_2, \quad b_1 = c_1 c_2 + p s_1 s_2,$$

$$a_2 = -s_1 s_2 - p c_1 c_2, \quad b_2 = c_1 s_2 + p s_1 c_2$$

これは, $\sin^2 t_1$ についての4次方程式で,これを解くことによって θ_1 が与えられ, θ_2 求まり,後は近似モデルの場合と同じである。

[著者紹介]

出口 光一郎 (正会員)

1976年, 東京大学大学院修士修了(計数工学)。同年より同大学工学部助手, 講師を経て, 84年山形大学工学部情報工学科助教授, 88年東京大学工学部計数工学科助教授, 現在に至る。この間, 91年~92年米国ワシントン大学客員準教授。コンピュータビジョン, 画像計測, 並列コンピュータの研究に従事。情報処理学会, 電子情報通信学会, 形の科学会, IEEEなどの会員。

多田 羅 哲 夫 (学生会員)

1995年, 東京大学工学部計数工学科卒業。現在, 同大学大学院修士課程在学。コンピュータビジョンの研究に従事。