内部モデル制御系のモデルと補償器の一体化[†]

舒 志 斌*・渡 部 慶 二*・山 田 功*

Unification of Model and Compensator of Internal Model Control

Zhibin SHU*, Keiji WATANABE* and Kou YAMADA*

In this paper, a unification of model and compensator of internal model control systems is presented. It is shown that (1) if the plant does not contain any unstable zeros, the design method of unification of model and compensator on the basis of state space design method of filtered inverse systems is proposed. (2) In the presence of unstable zeros, the solution to the problem is presented by using inner-outer factorization method. (3) By pole assignment, the simple design method of unification of model and compensator of internal model control systems in the SISO system is presented. In addition, simulation result is shown.

Key Words: internal model control, unification of model and compensator, noninteract method, inner-outer factorization, pole assignment

1. ま え が き

プロセス制御に多用される内部モデル制御は Horowitz¹⁾より提案され, Morari ら²⁾により発展された制御方法で, 制御対象に並列に制御対象のモデルを接続し, 出力誤差を補償器に介して入力にフィードバックする制御方法である。希望入出力伝達特性がモデルで, 低感度特性がモデルと補償器の伝達関数の積 1 に近づくことで, 容易に実現できる特徴がある。

しかし, 制御器として, モデルと補償器の二つが必要で, 多次元と多入力多出力のとき, 制御器が大きくなる。もし, モデルと補償器の設計を一体化にすれば, 制御器の構造を小さくできる。

本稿では, 多入力多出力内部モデル制御系の設計法を簡単に説明した後, モデルと補償器の一体化法を提案する。本方法は, 不安定零点をもたない対象に対する低域通過形逆システムの構成³⁾をもとに, そのサブシステムを取り出して, 一体化する方法である。また, この設計法は伝達関数上の逆システムの計算を必要としないの

で, 設計は簡単になる。制御対象が不安定零点をもつ場合には, インナー・アウト分解⁶⁾を用いて, アウター分解に本方法を適用する。また, 真にプロパー場合のインナー・アウト分解は複雑なるので, 1 入力 1 出力系に対し, インナー・アウト分解を経ずに, 極配置から設計する法も与える。

2. 内部モデル制御

内部モデル制御系を Fig. 1 に示す。制御対象は m 入力 m 出力のシステム

$$G_p(s) = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p \quad (1)$$

とする。ただし, $G_p(s) \in RH_\infty^{m \times m}$, $A_p \in R^{n \times n}$, $B_p \in R^{n \times m}$, $C_p \in R^{m \times n}$ とする。

モデルを

Fig. 1 Internal model control system

[†] 第 36 回自動制御連合講演会で一部発表(1993・10)

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa

(Received July 21, 1994)

(Revised October 31, 1994)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2)$$

とする。ただし、 $G(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$, $\text{rank } G(s) = m$, $G(s)$ が最小位相推移系であり、 (A, B) が可制御、 (C, A) が可観測であり、 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^{m \times n}$, C, B がランク m とする。

$Q(s) \in RH_{\infty}^{m \times m}$ は安定な補償器である、 $r(s) \in R^{m \times 1}$ は目標入力、 $y(s) \in R^{m \times 1}$ は出力、 $d(s) \in R^{m \times 1}$ は外乱である。

目標入力 $r(s)$ に対する出力 $y(s)$ は次式で与えられる。

$$y(s) = G_p(s)(I + Q(s)(G_p(s) - G(s)))^{-1}r(s) \quad (3)$$

制御対象とモデルが一致し $G_p(s) = G(s)$ とすると、

$$y(s) = G(s)r(s) \quad (4)$$

となる。この場合、Fig. 1 から、フィードバックが働かず開ループ制御となり、制御対象、モデルは安定でなければならぬとされてきた。

制御対象とモデルの間に誤差があり、入力側のモデル誤差を考えると、誤差 $\Delta G(s)$ はつぎのように定義する。

$$G_p(s) = G(s)(I + \Delta G(s))$$

$$\Delta G(s) = G(s)^{-1}(G_p(s) - G(s)) \quad (5)$$

$\Delta G(s)$ は乗法誤差と呼ばれ、 $\Delta G(s)$ は安定プロパーで、 $\Delta G(s) \in R^{m \times m}$ とする。

(5)式を用いて、(3)式は

$$y(s) = G(s)(I + \Delta G(s)) \times (I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1}r(s) \quad (6)$$

となる。 $Q(s)$ を

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \end{bmatrix} G^{-1}(s) \quad (7)$$

とする。 $\text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \right\}$ は $Q(s)$ をプロパーにするためのフィルタである。 $\tau \rightarrow 0$ にすれば、 $y(s) = G(s)r(s)$ にできる。

同じように、外乱 $d(s)$ に対する出力 $y_d(s)$ は

$$y_d(s) = G_p(s)(I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1} \cdot (I - Q(s)G(s))d(s) \quad (8)$$

となる。 $\tau \rightarrow 0$ にすると、 $y_d(s) = 0$ になり、外乱の影響をなくすることができる。

これらのことを感度からみるとつぎのようになる。制御対象とモデルが一致するときの入出力伝達関数 $H(s) \in R^{m \times m}$ は

$$H(s) = G(s) \quad (9)$$

である。制御対象の伝達関数が(6)式のときの入出力伝達関数は

$$\bar{H}(s) = G(s)(I + \Delta G(s))$$

$$\cdot (I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1} \quad (10)$$

である。感度関数 $S(s) \in R^{m \times m}$ を

$$S(s) = (\bar{H}^{-1}(s)(\bar{H}(s) - H(s))) \cdot [\Delta G(s)(I + \Delta G(s))^{-1}]^{-1} \quad (11)$$

で定義すると、

$$S(s) = I - Q(s)G(s) \quad (12)$$

が得られる。これは Fig. 1 の p 点でループを開いたときの感度である。 $\tau \rightarrow 0$ にすることは、感度 $S(s)$ をゼロに近づけることである。

制御系の安定性について、ナイキストの安定判別法を用いて、(10)式から、つぎの定理がある。

<定理1> $G_p(s)$, $G(s)$ は不安定零点と不安定極をもたないとする。 $\det [I + Q(s)G(s)\Delta G(s)]$ のナイキスト軌跡が、 s 平面の $(0, 0)$ 点をまわらないとき、そのときに限って、内部モデル制御系は安定である。

(証明) ナイキストの安定判別法から、明らかである。

ここで、モデルの誤差 $\Delta G(s)$ の大きさがあらかじめわかっており

$$\sigma_{\max}(\Delta G(j\omega)) < |W(j\omega)| \quad (13)$$

とする。ただし、 $\sigma_{\max}(\Delta G(j\omega))$ は $\Delta G(j\omega)$ の最大特異値であり、 $W(s)$ が有理関数である。

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(Q(j\omega)G(j\omega)\Delta G(j\omega)) \\ \leq \sigma_{\max}(Q(j\omega)G(j\omega))\sigma_{\max}(\Delta G(j\omega)) \\ \leq \sigma_{\max}(Q(j\omega)G(j\omega))|W(j\omega)| \\ \leq \left| \frac{1}{(1+j\tau\omega)^q} \right| |W(j\omega)| \end{aligned} \quad (14)$$

$$q = \min \{q_i | i=1, \dots, m\} \quad (15)$$

となる。したがって、Fig. 2 に示すように、 $1/|W(j\omega)|$ のゲイン線図の 0 dB を交叉する角周波数を ω_0 としたとき、

$$\frac{1}{\tau} < \omega_0 \quad (16)$$

に選べば、

$$\left| \frac{1}{(1+j\tau\omega)^q} \right| |W(j\omega)| < 1 \quad (17)$$

となる。(14)、(17)式から、

$$\sigma_{\max}(Q(j\omega)G(j\omega)\Delta G(j\omega)) < 1$$

Fig. 2 Relation between $|W(j\omega)|$ and $1/(1+j\tau\omega)^q$

$$\forall \omega \geq 0 \quad (18)$$

が成立し, $\det [I + Q(s)G(s)\Delta G(s)]$ のナイキスト軌跡が, s 平面の $(0, 0)$ 点をまわらず, 定理 1 から, フィードバック系が安定である.

Fig. 1 より, 制御系の制御器は $Q(s)$ と $G(s)$ からなる. 制御対象が多次元と多入力多出力のとき, 制御器の次数が大きくなる. 以下で, この問題を解決するために, モデルと補償器の一体化法を与える.

3. モデルと補償器の一体化設計法

(7) 式から, $Q(s)$ と $G(s)$ の間に次式が成立する.

$$Q(s)G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

(2) 式から, $G(s)$ の状態空間表示を

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_g(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (20)$$

とする. ただし, $y_g \in R^{m \times 1}$ が出力, $u \in R^{m \times 1}$ が入力であり, $x \in R^{n \times 1}$ が状態である.

$Q(s)$ を

$$Q(s) = \bar{C}(sI - A)^{-1}\bar{B} + \bar{D} \quad (21)$$

とする. ただし, $\bar{A} \in R^{n \times n}$, $\bar{B} \in R^{n \times m}$, $\bar{C} \in R^{m \times n}$, $\bar{D} \in R^{m \times m}$ とする. $Q(s)$ の状態空間表示を

$$\begin{cases} \dot{x}_q(t) = \bar{A}x_q(t) + \bar{B}y_g(t) \\ y_q(t) = \bar{C}x_q(t) + \bar{D}y_g(t) \end{cases} \quad (22)$$

とする. ただし, $y_q \in R^{m \times 1}$ が出力, $x_q \in R^{n \times 1}$ が状態である. 結合系 $Q(s)G(s)$ は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_q(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}C \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ B \end{bmatrix} u(t) \\ y_q(t) = [\bar{C} \quad \bar{D}C] \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

となる. (23) 式に等価変換

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

を行うと, (23) 式は,

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_q(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & -\bar{A} + \bar{B}C + A \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ B \end{bmatrix} u(t) \\ y_q(t) = [\bar{C} \quad -\bar{C} + \bar{D}C] \begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (25)$$

となる. (19) 式が成立するためには, $u(t)$ から $y_q(t)$ までの伝達行列式に A の固有値が含まれてはいけなから, $y_q(t)$ から状態 $\bar{x}(t)$ が不可観測になっていなければならない. 十分条件として, 次式

$$\bar{A} = A + \bar{B}C$$

$$\bar{C} = \bar{D}C \quad (26)$$

を満足すると, 不可観測になる. (25) 式は

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_q(t) \\ \dot{\bar{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ B \end{bmatrix} u(t) \\ y_q(t) = [\bar{C} \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{x}_q(t) \\ \bar{x}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (27)$$

となる. (27) 式の出力 $y_q(t)$ に接続しているサブシステムを取り出すと, 次式になる.

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_q(t) = (A + \bar{B}C)\bar{x}_q(t) + Bu(t) \\ y_q(t) = \bar{D}C\bar{x}_q(t) \end{cases} \quad (28)$$

$u(s)$ から $y_q(s)$ までの伝達行列 $Q(s)G(s)$ は

$$Q(s)G(s) = \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B \quad (29)$$

となる. ところで, Fig. 1 の系で,

$$e(s) = Q(s)(y(s) - G(s)u(s)) \quad (30)$$

が成り立つ. (21) 式, (29) 式を (30) 式に代入すると

$$\begin{aligned} e(s) &= (\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} + \bar{D})y(s) \\ &\quad - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}Bu(s) \\ &= (\bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}\bar{B} + \bar{D})y(s) \\ &\quad - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}Bu(s) \\ &= \bar{D}y(s) - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1} \\ &\quad \cdot (Bu(s) - \bar{B}y(s)) \end{aligned} \quad (31)$$

となる. (31) 式を状態空間上で表示すると,

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + Bu(t) + \bar{B}(Cx_e(t) - y(t)) \\ e(t) = \bar{D}(y(t) - Cx_e(t)) \end{cases} \quad (32)$$

となる. ただし, $x_e \in R^{n \times 1}$ が状態である. したがって, モデル $G(s)$ と補償器 $Q(s)$ を一体化するものとして, Fig. 3 に示す制御系が考えられる. (32) 式は一般化安定化器⁷⁾の状態フィードバック行列を 0 にした場合に相当する.

検算のため, Fig. 3 の入出力関数と感度を求めるとそれぞれつぎようになる.

目標入力 $r(s)$ に対する出力 $y(s)$ は次式で与える.

$$\begin{aligned} y(s) &= G_p(s)(I + \bar{D}(G_p(s) - C(sI - A - \bar{B}C)^{-1} \\ &\quad \cdot (B - \bar{B}G_p(s))))^{-1}r(s) \\ &= G(s)(I + \Delta G(s))(I + \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B \end{aligned}$$

Fig. 3 Unification of model and compensator of internal model control system

$$\begin{aligned} & \cdot \Delta G(s)^{-1} r(s) \\ & = G(s)(I + \Delta G(s))(I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1} \\ & \cdot r(s) \end{aligned} \quad (33)$$

外乱 $d(s)$ に対する出力 $y_d(s)$ は

$$\begin{aligned} y_d(s) &= G_p(s)(I + \bar{D}(G_p(s) - C(sI - A - \bar{B}C))^{-1} \\ & \cdot (B - \bar{B}G_p(s)))^{-1} \\ & \cdot (I - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B) \\ & = G_p(s)(I + \Delta G(s)) \\ & \cdot (I + \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B \\ & \cdot \Delta G(s))^{-1}(I - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B)d(s) \\ & = G_p(s)(I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1} \\ & \cdot (I - Q(s)G(s))d(s) \end{aligned} \quad (34)$$

である。感度関数 $S(s)$ も

$$\begin{aligned} S(s) &= (\bar{H}^{-1}(s)(\bar{H}(s) - H(s))) \\ & \cdot [\Delta G(s)(I + \Delta G(s))^{-1}]^{-1} \\ & = I - \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B \\ & = I - Q(s)G(s) \end{aligned} \quad (35)$$

得られる。(33)式、(34)式と(35)式がそれぞれ(6)式、(8)式と(12)式に帰着した。

これらのことから、Fig. 3の系は、Fig. 1の系のモデル $G(s)$ と補償器 $Q(s)$ を一体化したものと考えられる。

残りの問題は、

$$\begin{aligned} Q(s)G(s) &= \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (36)$$

を満足する $\bar{D}$ と $\bar{B}$ の設計である。非干渉理論より、 $\bar{D}$ と $\bar{B}$ を求めることができる。(36)式を転置すると

$$\begin{aligned} B^T(sI - A^T - C^T\bar{B}^T)^{-1}C^T\bar{D}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

となることから、 $\bar{D}$ 、 $\bar{B}$ の設計は非干渉理論を用いて、つぎのようにまとめられる。

$$B = [b_1, \dots, b_m] \quad b_i \in R^{n \times 1} (i=1, \dots, m) \quad (38)$$

とおき、 q_i を

$$q_i = \min \{j | CA^{j-1}b_i \neq 0\} \quad i=1, 2, \dots, m \quad (39)$$

とする。さらに、

$$\tau^{q_i} \left(\frac{1}{\tau} + s \right)^{q_i} = \tau^{q_i} (s^{q_i} + \alpha_{1i}s^{q_i-1} + \dots + \alpha_{i q_i}) \quad (40)$$

とき、

$$\begin{aligned} \phi &= [A^{q_1}b_1 + \alpha_{11}A^{q_1-1}b_1 + \dots + \alpha_{1 q_1}b_1, \dots, A^{q_m}b_m \\ & + \alpha_{m1}A^{q_m-1}b_m + \dots + \alpha_{m q_m}b_m] \in R^{n \times m} \end{aligned} \quad (41)$$

$$\varphi = [CA^{q_1-1}b_1, \dots, CA^{q_m-1}b_m] \in R^{m \times m} \quad (42)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} \alpha_{1 q_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{m q_m} \end{bmatrix} \in R^{m \times m} \quad (43)$$

とする。このとき、

$$\text{rank } \varphi = m \quad (44)$$

ならば、

$$\bar{B} = -\phi\varphi^{-1} \quad (45)$$

$$\bar{D} = \chi\varphi^{-1} \quad (46)$$

とおくことにより⁵⁾、(36)式を満足することができる。

4. 制御対象が不安定零点をもつ場合

上節の設計法では、制御対象が不安定零点をもたない場合に、有効である。制御対象は不安定零点をもつ場合、 $G_p(s)$ の不安定零点の数を p 個とし、制御系の安定性の保証のために、モデルも同じ数の不安定零点をもつほうがいい。このとき、 $G^{-1}(s)$ が不安定極をもつ、 $Q(s)G(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+\tau s)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+\tau s)^{q_m}} \right\}$ をするために、不安定零点と不安定極のキャンセルを発生し、制御系が内部不安定である。したがって、制御対象が不安定零点をもつ場合に、上節の設計法をそのまま使うことができない。これについて、インナー・アウト分解を用いて、アウト部分に、上節の設計法を使うように処理すればよい。以下では、まず、インナー・アウト分解法⁶⁾を簡単に説明する。

制御対象が³⁾(1)式で表わして、 p 個の不安定零点をもつ。モデルの転置を

$$\begin{aligned} G^T(s) &= B^T(sI_n - A^T)^{-1}C^T \\ &= \left\{ I_n, \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T & 0 \end{array} \right] \right\} \in RH_{\infty}^{m \times m} \end{aligned} \quad (47)$$

として、不安定極をもたず、 p 個の不安定零点をもつ。ただし、 $A \in R^{n \times n}$ 、 $B \in R^{n \times m}$ 、 $C \in R^{m \times n}$ とする。 $|G(s)| \neq 0$ 、 A^T が Hurwitz 行列であれば、つぎのインナー・アウト分解がある⁶⁾。

$$\begin{aligned} G^T(s) &= G_i^T(s)G_o^T(s) \\ G(s) &= G_o(s)G_i(s) \end{aligned} \quad (48)$$

ただし、 $G_i^T(s)$ がインナー、 $G_o^T(s)$ がアウトであり、次式で与えられる。

$$G_i^T(s) = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c} I_n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{cc|c} A^T & C^T & 0 \\ \hline B^T - Z & 0 & -I_m \\ \hline Z & 0 & I_m \end{array} \right] \right\} \in RH_{\infty}^{m \times m} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} G_o^T(s) &= \left\{ I_n, \left[\begin{array}{c|c} A^T & C^T \\ \hline B^T - Z & 0 \end{array} \right] \right\} \in RH_{\infty}^{m \times m} \\ &= B_o^T(sI - A_o)^{-1}C_o^T \end{aligned} \quad (50)$$

ただし, $A_o \in R^{n \times n}$, $B_o \in R^{n \times m}$, $C_o \in R^{m \times n}$ とする.

Z は次式を満足する行列である.

$$X = \begin{bmatrix} W & Z^T \\ Z & W \end{bmatrix} \in \text{GRic}(E_z, A_z, B_z B_z^T) \quad (51)$$

ただし, **GRic** は一般化リカッチ方程式で⁶⁾

$$E_z = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad W = [I_n \nu_o^k \mid A^T \nu_o^k] \quad (52)$$

$$A_z = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad B_z = \begin{bmatrix} 0 \\ -I_m \end{bmatrix} \quad (53)$$

(48)式の中で, インナー $G_i(s)$ のノルムは $\|G_i(s)\|_\infty = 1$ であり, アウター $G_o(s)$ は不安定零点と不安定極をもたない. これより, $Q(s)G(s)$ は

$$Q(s)G(s) = Q(s)G_o(s)G_i(s) \quad (54)$$

となる. そうすると, 低感度のために, 前と同じようにして, $Q(s)$ を

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)^{q_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{(1+s\tau)^{q_m}} \end{bmatrix} G_o^{-1}(s) \quad (55)$$

とする. $\text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+\tau s)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+\tau s)^{q_m}} \right\}$ は $Q(s)$ をプロパーにするためのフィルタである.

Fig. 1 の系で, 不安定零点をもつ場合, 目標入力 $r(s)$ から出力 $y(s)$ までの伝達関数 $\bar{H}(s) \in R^{m \times m}$ は

$$\begin{aligned} \bar{H}(s) &= G(s)(I + \Delta G(s))(I + Q(s)G(s)\Delta G(s))^{-1} \\ &= G(s)(I + \Delta G(s)) \\ &\quad \cdot \left(I + \text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+\tau s)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+\tau s)^{q_m}} \right\} \right. \\ &\quad \cdot G_i(s)\Delta G(s) \Big)^{-1} \end{aligned} \quad (56)$$

である.

(56)式によって,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \left(\text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_m}} \right\} \right. \\ \cdot G_i(j\omega)\Delta G(j\omega) \Big) < 1 \end{aligned} \quad (57)$$

となれば, $\det \left[I + \text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+\tau s)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+\tau s)^{q_m}} \right\} G_i(s)\Delta G(s) \right]$ のナイキスト軌跡が, s 平面の $(0, 0)$ 点をまわらず, 定理 1 から, このとき制御系が安定である.

前と同じ, モデルの誤差 $\Delta G(s)$ の大きさがあらかじめわかっており, (13)が成立するとする. $G_i(j\omega)$ がインナーであり, $\sigma_{\max}(G_i(j\omega)) = 1$ になる. したがって,

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} \left(\text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_m}} \right\} \right. \\ \cdot G_i(j\omega)\Delta G(j\omega) \Big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sigma_{\max} \left(\text{diag} \left\{ \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_1}}, \dots, \frac{1}{(1+j\tau\omega)^{q_m}} \right\} \right) \\ &\quad \cdot \sigma_{\max}(G_i(j\omega)) \sigma_{\max}(\Delta G(j\omega)) \\ &\leq \left| \frac{1}{(1+j\tau\omega)^q} \right| |W(j\omega)| \end{aligned} \quad (58)$$

$$q = \min \{q_i \mid i=1, \dots, m\} \quad (59)$$

となる. Fig. 2 に示すように, τ の選択は (16) 式を満足すると, 制御系が安定である.

一体化の設計として, 上節と同じように, $Q(s)G_o(s)$ は

$$Q(s)G_o(s) = \bar{D}C_o(sI - A_o - \bar{B}C_o)^{-1}B_o \quad (60)$$

であり, Fig. 4 の系を考えられる. $\bar{B}$ と $\bar{D}$ の設計はそれぞれ (45) 式と (46) 式のような設計する.

上記より, 制御対象が不安定零点をもつ場合, 内部モデル制御系のモデルと補償器の一体化の一般的な設計法を与えた. 真にプロパー場合のインナー・アウター分解は複雑なるので, 1 入力 1 出力系の場合の極配置からの簡単な設計法を以下に示す.

Fig. 3 の系で, $G_p(s)$ の不安定零点の数を p 個とし, 次式で与えられたとする.

$$G_p(s) = k \frac{\prod_{i=1}^p (s - z_i) \prod_{i=p+1}^{n-m} (s + z_i)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (61)$$

モデルを

$$\begin{aligned} G(s) &= \bar{k} \frac{\prod_{i=1}^p (s - \bar{z}_i) \prod_{i=p+1}^{\bar{n}-\bar{m}} (s + \bar{z}_i)}{\prod_{i=1}^{\bar{n}} (s + \bar{p}_i)} \\ &= C(sI - A)^{-1}B \end{aligned} \quad (62)$$

とする. ただし, n, m は $G_p(s)$ の次数, 相対次数, $\bar{n}, \bar{m}$ は $G(s)$ の次数, 相対次数であり, $Re(p_i), Re(z_i), Re(\bar{p}_i), Re(\bar{z}_i) > 0, k > 0, \bar{k} > 0, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, C \in R^{m \times 1}$ とし, (C, A) が可観測である.

(C, A) が可観測であり, $(sI - A - \bar{B}C)$ の極を任意配置できる. このとき, $\bar{D}$ を

Fig. 4 Unification of model and compensator of internal model control system with unstable zeros

$$\bar{D} = \frac{\bar{k}}{\tau^m} \quad (63)$$

とし、 $\bar{B}$ を

$$\det[(sI - A - \bar{B}C)] = \prod_{i=1}^p (s + \bar{z}_i) \prod_{i=p+1}^{n-m} (s + \bar{z}_i) (1/\tau + s)^m \quad (64)$$

を満足するように選べれば、次式が成立する。

$$\bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B = \frac{\prod_{i=1}^p (s - \bar{z}_i)}{\prod_{i=1}^p (s + \bar{z}_i)} \frac{1}{(1 + \tau s)^m} \quad (65)$$

これにより、一体化の設計が達成される。

5. 数 値 例

つぎの2入力2出力の制御対象を考える。

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+3)} & \frac{1}{(s+4)} \\ \frac{1}{(s+2)} & 0 \end{bmatrix} = C_p(sI - A_p)^{-1}B_p \quad (66)$$

$$A_p = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

不安定零点をもたない。モデルを

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y_p(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (68)$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)} & \frac{1}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+3)} & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

とする。

制御系を Fig. 1 のように構成する。補償器を

$$Q(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+s\tau)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+s\tau)} \end{bmatrix} G^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s+3}{1+s\tau} \\ \frac{s+2}{1+s\tau} & \frac{-(s+2)(s+3)}{(1+s\tau)(s+1)} \end{bmatrix} \quad (71)$$

とする。

希望の低感度範囲は 0~10 である。(5)式、(66)式、

(70)式より、 $\sigma_{\max}(\Delta G(j\omega)) < 1$ 、したがって、 τ は希望の低感度範囲より、 $\tau = 0.01$ を選ぶ、定理 1 より、この制御系が安定である。

一体化として、制御系を Fig. 3 のように構成する。 $\bar{B}$ 、 $\bar{D}$ について、3 章で述べた計算手順で計算する。

$$q_1 = 1 \quad q_2 = 1 \quad (72)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 99 & 0 \\ 0 & 98 \\ 97 & 0 \end{bmatrix} \quad \varphi = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\chi = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (74)$$

となる。

$\bar{B}$ と $\bar{D}$ は

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & -99 \\ -98 & 98 \\ 0 & -97 \end{bmatrix} \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 100 & -100 \end{bmatrix} \quad (75)$$

である。

$$Q(s)G(s) = \bar{D}C(sI - A - \bar{B}C)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{(1+0.01s)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+0.01s)} \end{bmatrix} \quad (76)$$

となる。

6. む す び

プロセス制御に多用される内部モデル制御について、多入力多出力の場合、内部モデル制御系のモデルと補償器を一体化する方法を、不安定零点をもたない対象に対する低域通過形逆システムの構成をもとに提案した。制御対象は不安定零点をもつ場合、インナー・アウトパー分解を用いて、設計法を与えた。最後に、真にプロパー場合のインナー・アウトパー分解は複雑なるについて、1 入力 1 出力系に対し、インナー・アウトパー分解を経ずに、極配置から設計する法を提案した。

参 考 文 献

- 1) I. M. Horowitz: Synthesis of Feedback Systems, Academic Press(1963)
- 2) M. Morari and E. Zafriou: Robust Process Control, Prentice Hall(1989)
- 3) 久村富持: 制御システム論の基礎, 共立出版(1988)
- 4) 小郷, 美多: システム制御理論入門, 実教出版(1979)
- 5) 山田, 渡部: 低域通過逆システムの状態空間法での構成, 計測自動制御学会論文集, 28-8, 923/930(1992)
- 6) S. Hara and T. Sugie: Inner-outer factorization for strictly proper functions with $j\omega$ -axis zeros, Systems & Control Letters 16, 179/185(1991)
- 7) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂(1994)

[著 者 紹 介]

舒 志 斌 (正会員)

1987 年, 中国西安交通大学大学院修士課程修了(情報と制御工学専攻)。同年同大学助手を経て, 89 年講師。現在, 山形大学大学院博士課程在学中。むだ時間系の制御, 内部モデル制御に関する研究に従事。

渡 部 慶 二 (正会員)

1966 年, 山形大学工学部電気工学科卒業。同年同大学工学部電子工学科助手, 78 年講師, 85 年助教授を経て 89 年教授, 90 年改組により電子情報工学科教授, 現在に至る。むだ時間系の制御, 内部モデル制御, ロバスト制御の研究などに従事(工学博士)。

山 田 功 (正会員)

1989 年, 山形大学工学研究科修士課程修了(電子工学専攻)。同年山形県企業局入局, 91 年山形大学工学部助手, 現在に至る。ロバスト制御, 繰返し制御などの研究に従事。IEEE, システム制御情報学会, 日本ロボット学会などの会員。