ユーラパラメータの近似による H_∞ 補償器の低次元化[†]

渡 辺 隆 男*・安 田 恵一郎*・横 山 隆 一*

A Reduction Method of H_∞ Controller Based on Truncation of Youla Parameter

Takao WATANABE*, Keiichiro YASUDA* and Ryuichi YOKOYAMA*

In this paper, a reduction problem of H_∞ controllers is considered. The problem treated here is that of truncating high order H_∞ controllers which are complicated by high order free parameters. This problem sometimes appears when a numerical approach is used for H_∞ control problems. The H_∞ controller is truncated by approximating a free parameter which is high order solution of the Model Matching Problem using the balanced realization approximation technique. This method preserves internal stability of closed loop systems and the domain in which closed loop poles locate. A sufficient condition for preserving an H_∞ -norm constraint of the closed loop system in which a high order controller is approximated by low order one is derived. Thus, in this reduction method closed loop properties are taken into account, i.e. the internal stability and the domain in which all closed loop poles locate are preserved.

Key Words: model reduction, H_∞ control, balanced realization approximation, bilinear transformation

1. はじめに

H_∞ 制御問題は、ユーラパラメトリゼーション(YJB)により H_∞ ノルムでの仕様を満たす安定かつプロパーな有理関数を求めるモデルマッチング問題(MMP)に帰着される。MMP を解く一つの解法として近年、Boyd らのアプローチ²⁾が注目されている。このアプローチでは、最適化手法を用いて H_∞ ノルムでの仕様を満足するように MMP のフリーパラメータを最適化している。このアプローチの特徴の一つは、解析的に解くことの困難な多数の仕様を満たす補償器を数値的手法によって求めることを可能にしている点にある。たとえば、ロバスト安定条件に加え、フリーパラメータの自由度を用いて閉ループ系の極指定などを行いながら MMP を解くことにより、閉ループ系の時間領域における特性を考慮した H_∞ 補償器を求めることが可能である。しかしながら本アプローチでは、求められるフリーパラメータの次数が高次元となり、その結果、補償器の次数が増大することに問題点

がある²⁾。したがって、このような高次元の H_∞ 補償器を、設計された閉ループ特性をできるだけ保ちつつ低次元化することは重要な課題である。

そこで本論文では、高次元で求められた MMP の解(以下ではユーラパラメータとする)を低次元化することにより、 H_∞ 補償器の次数を間接的に低次元化する H_∞ 補償器低次元化手法を提案する。低次元化手法は、まずはじめに平衡実現近似手法を用いる。平衡実現近似手法は、モデルの漸近安定性を保存し、入出力特性を保存しやすい近似手法である。また、平衡実現近似手法を用いた場合、元のシステムモデルのハンケル特異値を用いることによって、近似誤差の上限を求めることが可能である。これらのことにより、閉ループ系の内部安定性が保存され、さらに閉ループ系の伝達関数の H_∞ ノルム条件を容易に調べることが可能である。しかしながら、平衡実現近似手法はモデルの極配置を一般に保存しないため、平衡実現近似手法を用いてユーラパラメータを近似すると、閉ループ極が指定領域に配置されない場合が生ずる。したがって、閉ループ系の極配置を考慮して MMP の最適化を行った場合、平衡実現近似を直接用いてユーラパラメータの低次元化を行うと、指定領域に極配置を行うことが不可能となる。そこで本論文では、極を指定領域に保存しながらユーラパラメータを低次元化する近

[†] 第 23 回制御理論シンポジウムで発表(1994・5)

* 東京都立大学工学部 八王子市南大沢 1-1

* Dept. of Electrical Engineering, Tokyo Metropolitan University, Hachioji

(Received July 12, 1994)

(Revised November 8, 1994)

似手法を提案し、さらに本近似手法を用いて補償器を低次元化した場合の H_∞ ノルム条件保存のための十分条件を導出する。

また、ユーラパラメータの中には極-零点相殺の影響によって、補償器の次数を下げるものが存在する。このような場合、ユーラパラメータを低次元化すると、補償器の次数が下がらないことがしばしば起きる。これに対して本論文では、 H_∞ 補償器の線形分数変換において起こり得る極-零点相殺を考慮し、最終的に得られる近似補償器の次数が元の補償器の次数よりも低くなるための十分条件を導出する。

このように本低次元化手法は内部安定性と閉ループ極の存在領域を保存するという意味において閉ループ特性を考慮し、また容易な計算によって H_∞ ノルム条件を調べることの可能な有用性のある手法である。

本論文の構成は以下のとおりである。第2章において本論文で用いる数式の説明と、問題設定を行う。第3章では、平衡実現近似手法を直接用いてユーラパラメータを近似したとき、 H_∞ ノルム条件が保存されるための十分条件を導出する。またさらに、モデルの極配置を保存する低次元化手法を提案し、本手法を用いてユーラパラメータを近似したときの H_∞ ノルム条件保存のための十分条件を導出する。第4章では、極-零点相殺の影響を考慮して、近似補償器の次数が元の補償器の次数よりも低次となるための十分条件を導出する。第5章では数値例を示し、本手法の有効性を確認する。第6章はまとめである。

2. 準備と問題設定

本稿ではつぎの記号を用いる。

$\deg(G)$: 伝達関数行列 $G(s)$ のマクミラン次数

RH_∞ : 安定でプロパーな有理関数の集合

RH_n^∞ : マクミラン次数が n で安定かつプロパーな有理関数の集合

$\|\cdot\|_\infty$: H_∞ ノルム

また、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx + Du \quad (2)$$

によって表わされるシステムの伝達関数行列 $G(s)$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} (s) \\ = D + C(sI - A)^{-1}B \quad (3)$$

を

$$G(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (4)$$

で表わすことにする。線形分数変換を

$$F_l(G(s), K(s)) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (5)$$

で表わす。

Fig. 1 の単一入力単一出力フィードバック系について考える。 $P(s)$, $K(s)$ はそれぞれ制御対象、補償器を表わすプロパーな有理関数、 $\Delta(s)$ は制御対象の加法的不確かさを表わす安定でプロパーな有理関数と仮定する。また、 $\Delta(s)$ により制御対象の不安定極の総数は変化しないと仮定する。

一般に準最適 H_∞ 制御問題はつぎのように評価関数の H_∞ ノルムを1未満にする形で定式化される^{1),4)}。

[問題1]

$$\|WH\|_\infty < 1 \quad (6)$$

を満たす全ての安定化補償器 $K(s)$ を求めよ。 ■

本論文では(6)式の条件を満足する安定化補償器を H_∞ 補償器と呼ぶことにする。ここで、 $W(s) \in RH_\infty$ は重み関数である。また、 $H(s)$ は閉ループ伝達関数であり、 $P(s)$ と $K(s)$ の関数である。たとえば、重み関数 $W(s)$ を

$$|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \quad \forall \omega \quad (7)$$

を満たす安定かつプロパーな有理関数、 $H(s)$ を

$$H(s) = K(s)(1 + P(s)K(s))^{-1} \quad (8)$$

と選択すれば問題1はロバスト安定化問題となる。以下では、伝達関数の表記において(s)を適宜省略することにする。

つぎに、問題1をYJBを介してMMPに変換する。まずつぎのように P を安定な有理関数 $N, M \in RH_\infty$ で既約分解する。

$$P = NM^{-1} \quad (9)$$

また、適当な $X \in RH_\infty$, $Y \in RH_\infty$ に対して N, M はベズー等式

$$XN + YM = 1 \quad (10)$$

を満たす。

このとき、YJBにより、制御対象を安定化する補償器 $K(s)$ は

$$K(s) = F_l(K_0, Q) \quad (11)$$

で表わされる³⁾⁻⁵⁾。ただし、

$$K_0 = \begin{bmatrix} Y^{-1}X & Y^{-1} \\ Y^{-1} & Y^{-1}N \end{bmatrix} (s) \quad (12)$$

$Q \in RH_\infty$ である。ここで、 Q は RH_∞ のクラスに属するフリーパラメータであり、 Q が RH_∞ のクラスに属して

Fig. 1 Feedback system

Fig. 2 Structure of stabilising controller

いれば K は安定化補償器であることが保証されている。安定化補償器 K の構造を Fig. 2 に示す。

$$K_0 = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Q(s) = \begin{bmatrix} A_Q & B_Q \\ C_Q & D_Q \end{bmatrix} \quad (14)$$

とすれば、安定化補償器は

$$K(s) = \begin{bmatrix} A + B_2 D_Q E C_2 & B_2 (I + D_Q E D_{22}) C_Q \\ B_Q E C_2 & A_Q + B_Q E D_{22} C_Q \\ C_1 + D_{12} D_Q E C_2 & D_{12} (I + D_Q E D_{22}) C_Q \\ B_1 + B_2 D_Q E D_{21} \\ B_Q E D_{21} \\ D_{11} + D_{12} D_Q E D_{21} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ただし、

$$E = (I - D_{22} D_Q)^{-1} \quad (16)$$

で表される。(15)式の実現は最小実現であるとは限らず、 K のマクミラン次数と、 K_0 と Q のマクミラン次数との関係は

$$\deg(K) \leq \deg(K_0) + \deg(Q) \quad (17)$$

で表される。

この K を用いて問題 1 を書き直すとつぎの MMP に変換される。

[問題 2]

$$\|T_1 - Q T_2\|_\infty < 1 \quad (18)$$

を満たす全ての $Q \in RH_\infty$ を求めよ。ただし、 $T_1, T_2 \in RH_\infty$ である。

ここで、問題 1 においては準最適 H_∞ 制御問題が (6) 式の H_∞ ノルム条件と補償器 K の内部安定条件により構成されているのに対し、問題 2 では、(18) 式のノルム条件を満たす RH_∞ のクラスに属する全ての Q を求める問題となっていることに注目する。問題 2 において求められる解を $Q^* \in RH_\infty$ とし、ユーラパラメータと呼ぶことにする。

さて、閉ループ系の時間領域での特性は、 N, M, X, Y と Q^* の極配置によって指定することが可能である。しかし、閉ループ系の極配置を複素左半平面上において左

遠方にした場合、(18) 式の条件を満たす Q^* の次数は無限大となることが示されており、一般に閉ループ系の時間特性を考慮すると Q^* の次数は高くなることが多くなる。また、Boyd らの提案手法により、凸最適化手法を用いて閉ループ極を指定しつつ Q^* の最適化を行うと、 Q^* の次数は増大することが知られている²⁾。したがって、閉ループ系の時間特性を考慮すると、(17) 式の関係より、 H_∞ 補償器のマクミラン次数は高次となり、しばしば補償器の低次元化が必要となる。しかしながら、何らかの低次元近似手法を用いて補償器を望みの次数に近似したとしても、高次の H_∞ 補償器を直接近似することによって得られる低次元化補償器が内部安定条件と (6) 式のノルム条件の両方を満足するか調べなければならず、もしこれらの条件の片方でも満足されていなければ再度低次元化をやり直し、これらを調べ直さなければならない。

そこで本研究では、 RH_∞ のクラスに属する、より低次元の関数 Q_r で Q^* を近似することを考える。このように Q^* を RH_∞ のクラスに属する Q_r で近似すれば、閉ループ系の内部安定性は自動的に保証されるので、(18) 式のノルム条件を調べるだけで、得られる低次元化補償器が H_∞ 補償器であるかが判別可能である。したがって、つぎの問題を考える。

[問題 3]

問題 2 において求めたユーラパラメータ $Q^* \in RH_\infty$ を、 $Q_r \in RH_\infty^r$ ($r < n$) で近似する場合、 Q_r が

$$\|T_1 - Q_r T_2\|_\infty < 1 \quad (19)$$

を満足するか、また Q^* は (18) 式の条件を満たしたまま最高何次まで低次元化することができるか。

3. ユーラパラメータ Q^* の近似

本章では、第 2 章で述べた考え方に従い、問題 2 で求めたユーラパラメータ $Q^* \in RH_\infty$ を、 $Q_r \in RH_\infty^r$ ($r < n$) で近似することにより内部安定条件を満足し、 H_∞ 条件を満たす低次元 H_∞ 補償器を求めることを考える。また、閉ループ系の極配置を考慮して Q^* を求めた場合には、 Q^* の極の存在領域を保存しながら Q^* を低次元化する必要がある。そこで本章では、極の存在領域を保存する低次元化手法を提案し、 H_∞ ノルム条件を保存するための十分条件を導出する。

3.1 平衡実現近似による Q^* の近似とノルム条件

前章で議論したように、閉ループ系の内部安定性を保存するためには、ユーラパラメータ Q^* を RH_∞ のクラスの中で低次元化することが必要である。そこで、システムモデルの安定性を保存したまま近似モデルを構成することの可能な平衡実現近似手法^{7),8),10)}を用いる。

平衡実現近似手法は、システムの可制御性可観測性に着目し、システムのそれぞれのモードについて可制御性と可観測性の度合いが等しくなるようにシステム全体の等価変換(平衡化)を行った後、可制御可観測性の低いモードを打ち切る低次元化手法である。したがって、システムの入出力特性を保存しやすく、漸近安定性も保存する特徴を有している。

漸近安定で平衡実現された n 状態システム

$$Q^* = \begin{bmatrix} A_{Q^*} & B_{Q^*} \\ C_{Q^*} & D_{Q^*} \end{bmatrix} \quad (20)$$

について考える。

Q^* のハンケル特異値を

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} \geq \dots \geq \sigma_n \quad (21)$$

とし、

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r) \quad (23)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n) \quad (24)$$

とする。このとき Σ はリアプノフ方程式

$$\Sigma A_Q^T + A_Q \Sigma + B_Q B_Q^T = 0 \quad (25)$$

$$\Sigma A_Q + A_Q^T \Sigma + C_Q^T C_Q = 0 \quad (26)$$

を満足する。 Q^* を Σ と同様に

$$A_{Q^*} = \begin{bmatrix} A_{Q11} & A_{Q12} \\ A_{Q21} & A_{Q22} \end{bmatrix}, \quad B_{Q^*} = [B_{Q1} \ B_{Q2}] \quad (27)$$

$$C_{Q^*} = \begin{bmatrix} C_{Q1} \\ C_{Q2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

と分解すると、低次元化システム Q_r は

$$Q_r(s) = \begin{bmatrix} A_{Q11} & B_{Q1} \\ C_{Q1} & D_{Q^*} \end{bmatrix} \quad (29)$$

で与えられる。

平衡実現近似に関するつぎの補題が知られている。

[補題 1]⁹⁾

Q^* を漸近安定、最小実現の n 次元システムとする。平衡実現近似によって得られる r 次元低次元化システムを $Q_r (n > r)$ とするとき

$$\begin{aligned} & 1) Q_r \text{ は漸近安定で、最小実現} \\ & 2) \|Q^* - Q_r\|_\infty \leq 2 \text{ trace } \Sigma_2 \end{aligned} \quad (30)$$

が成り立つ。

以上の平衡実現近似手法の特徴を利用して、 H_∞ 補償器の低次元化を考える。以下では、

$$\lambda^* = \|T_1 - Q^* T_2\|_\infty \quad (31)$$

$$\lambda_r = \|T_1 - Q_r T_2\|_\infty \quad (32)$$

とする。このとき、つぎの補題が成り立つ。

[補題 2]

Q^* を Q_r で近似したとき、

$$\lambda_r \leq \lambda^* + \|Q^* - Q_r\|_\infty \|T_2\|_\infty \quad (33)$$

が成立する。

(証明)

$$\begin{aligned} \lambda_r &= \|T_1 - Q_r T_2\|_\infty \\ &= \|T_1 - Q^* T_2 + (Q^* - Q_r) T_2\|_\infty \\ &\leq \|T_1 - Q^* T_2\|_\infty + \|Q^* - Q_r\|_\infty \|T_2\|_\infty \end{aligned} \quad (34)$$

より、

$$\lambda_r \leq \lambda^* + \|Q^* - Q_r\|_\infty \|T_2\|_\infty \quad (35)$$

が成立する。

補題 2 より、 $\lambda^* < 1$ が満足されていても $\lambda_r < 1$ が満足されない場合が存在する。このような場合、低次元化補償器は H_∞ 条件を満足しない。そこで、 H_∞ 条件を満たしたまま Q^* はどれだけの次数を低次元化することができるか、ということについてつぎの結果が得られる。

《定理 1》

平衡実現近似手法を用いて $Q^* \in RH_\infty^n$ を、 $Q_r \in RH_\infty^r$ ($r < n$) で近似した場合、つぎの条件

$$\lambda^* + 2 \text{ trace } \Sigma_2 \|T_2\|_\infty < 1 \quad (36)$$

$$\text{ただし、} \Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n) \quad (37)$$

が成立すれば補償器

$$\tilde{K} = F_l(K_0, Q_r) \quad (38)$$

は、 H_∞ 補償器である。

(証明)

補題 1 より

$$\|Q^* - Q_r\|_\infty \leq 2 \text{ trace } \Sigma_2 \quad (39)$$

が成り立つ。また、補題 2 より

$$\lambda_r \leq \lambda^* + \|Q^* - Q_r\|_\infty \|T_2\|_\infty \quad (40)$$

が成り立つ。これから

$$\lambda_r \leq \lambda^* + 2 \text{ trace } \Sigma_2 \|T_2\|_\infty \quad (41)$$

が成立する。したがって、

$$\lambda^* + 2 \text{ trace } \Sigma_2 \|T_2\|_\infty < 1 \quad (42)$$

が成り立てば

$$\lambda_r < 1 \quad (43)$$

となる。また、 $Q_r \in RH_\infty$ であることから、 $\tilde{K}$ は H_∞ 補償器である。

この結果の重要なポイントは、平衡実現近似手法によって直接近似されるユーラパラメータ Q^* のハンケル特異値を用いることにより、近似した補償器の H_∞ 条件を逐一補償器を計算せずに調べることが可能であると同時に、ハンケル特異値の和を計算するのみで、 H_∞ 条件を満たしたままどれだけ Q^* の次数を低減できるかについて知ることが可能な点にある。

3.2 極配置を考慮した Q^* の近似

閉ループ系の極配置は、過渡応答特性と密接な関係がある。したがって、ロバスト安定化などの仕様と共に閉ループ極の指定を行うことは十分意義がある。 N, M, X, Y をそれぞれ指定領域内に極が存在するように求め、さ

らに指定領域内に極が存在するように Q を最適化すれば、閉ループ極は指定領域内に配置される。平衡実現近似手法は、前節で述べたように、システムモデルの漸近安定性と入出力関係を保存する特徴を有する近似手法である。しかしながら、近似した際にシステムモデルの極の存在領域は保存されない場合があり、本論文で提案する補償器の低次元化手法において平衡実現近似手法を直接用いた場合、閉ループ極は指定した領域内に保存されない。そこで本節では、ユーラパラメータ Q^* の極を左半面上の円領域内に保存しながら Q^* を近似する低次元化手法を提案する。さらに本手法を用いてユーラパラメータ Q^* を近似したときの H_∞ ノルム条件の保存についての結果を述べる。

ここで、つぎの記号を定義する。

$$C := \{s \mid |s+a| = \beta, \operatorname{Re} s < 0\} \quad (44)$$

$$D := \{s \mid |s+a| < \beta, \operatorname{Re} s < 0\} \quad (45)$$

ただし、 α, β は実数、 $\alpha > \beta > 0$ とする

複素領域内の左半面上の、中心が $(-a, 0)$ 、半径が β の円領域 D (Fig. 3) は、アフィン変換

$$\nu = \frac{s+\alpha}{\beta} \quad (46)$$

と、双一次変換

$$\bar{s} = \frac{\nu-1}{\nu+1} \quad (47)$$

により複素数領域の左半平面 (Fig. 4) に変換される。このとき、円領域 D から左半平面への変換は

$$\bar{s} = \frac{s+\alpha-\beta}{s+\alpha+\beta} \quad (48)$$

で表わされる。この変換を用いて s -平面上の円領域 D 内のみに極をもつユーラパラメータ $Q^*(s)$ を左半面のみに極をもつ伝達関数に書き直すと

$$Q^*\left(\frac{(-\alpha-\beta)\bar{s}+\alpha-\beta}{\bar{s}-1}\right) \quad (49)$$

となる。これを改めて $R^*(\bar{s})$ で表わすことにする。 $R^*(\bar{s})$ は右半平面において正則であり、漸近安定な伝達関数である。

つぎに、漸近安定な伝達関数 R^* を平衡実現近似手法

を用いて漸近安定な伝達関数で近似し、近似したこの伝達関数をアフィン変換と双一次変換の逆変換により、円領域 D 内のみに極を有する伝達関数に変換する。このようにして、左半面上の円領域 D 内に極をもつ伝達関数を、同じ領域内のみに極を有する低次元の伝達関数によって近似することを考える。このとき、つぎの補題が成立する。

[補題 3]

$R^*(\bar{s})$ は右半面で正則であると仮定する。 $R^*(\bar{s})$ を平衡実現近似し、それを $\hat{R}(\bar{s})$ とする。このとき、

$$\|R^*(\bar{s}) - \hat{R}(\bar{s})\|_\infty < a \quad (50)$$

ならば

$$\|Q^*(s) - \hat{Q}(s)\|_\infty < a \quad (51)$$

が成立する。ただし、

$$\hat{Q}(s) = \hat{R}\left(\frac{s+\alpha-\beta}{s+\alpha+\beta}\right) \quad (52)$$

とする。

(証明)

$$E(\bar{s}) = R^*(\bar{s}) - \hat{R}(\bar{s}) \quad (53)$$

$$H(s) = Q^*(s) - \hat{Q}(s) \quad (54)$$

とする。このとき、 $Q^*(s)$ 、 $\hat{Q}(s)$ は円領域 D 内のみに極をもつことから、 $H(s)$ は円領域 D の外側において正則である。したがって最大値の原理から、 $H(s)$ の円周 C 上における最大値は、虚軸上での最大値よりも大きい。すなわち、

$$\sup_{\omega} \{H(s)\} > \sup_{\omega} \{H(j\omega)\} \quad (55)$$

が成立する。

(48) 式の変換は、円周 C 上の値を虚軸上の値に写像する変換であり、 $E(\bar{s})$ の $\bar{s}$ 平面上における虚軸上での上限は $H(s)$ の s 平面上における円周 C 上での上限に一致する。すなわち、

$$\sup_{\omega} \{E(j\omega)\} = \sup_{\omega} \{H(s)\} \quad (56)$$

が成立する。また、 $R^*(\bar{s}) \in RH_\infty$ 、 $\hat{R}(\bar{s}) \in RH_\infty$ であることから、 $E(\bar{s})$ は右半平面において正則であり、 $E(\bar{s})$ の H_∞ ノルムは虚軸上での最大値に一致する。したがって、

Fig. 3 Disk domain

Fig. 4 Left half plane

$$\|E(\tilde{s})\|_{\infty} = \sup\{H(s)\} \quad (57)$$

である。(57)式より

$$\|E(\tilde{s})\|_{\infty} < a \quad (58)$$

が成立すれば

$$\sup\{H(s)\} < a \quad (59)$$

となる。よって、(55)式と(59)式より

$$\begin{aligned} \sup_{\omega} \{H(j\omega)\} &= \|H(s)\|_{\infty} \\ &< a \end{aligned} \quad (60)$$

が成立する。■

補題1と補題3よりただちにつぎの定理が導かれる。

《定理2》

平衡実現近似手法を用いて $R^* \in RH_{\infty}^n$ を $\hat{R} \in RH_{\infty}^n (r \leq n)$ で近似する。 R^* の近似されたモードのハンケル特異値を $\sigma_{R,r+1}, \sigma_{R,r+2}, \dots, \sigma_{R,n}$ とする。このとき、

$$\lambda^* + 2 \operatorname{trace} \sum_{R2} \|T_2\|_{\infty} \leq 1 \quad (61)$$

$$\text{ただし, } \sum_{R2} = \operatorname{diag}(\sigma_{R,r+1}, \sigma_{R,r+2}, \dots, \sigma_{R,n}) \quad (62)$$

が成立すれば、補償器

$$\hat{K} = FI(K_0, \hat{Q}) \quad (63)$$

は H_{∞} 補償器である。また、このときの閉ループ極は円領域 D 内のみに存在する。

(証明) 補題1より

$$\|R^* - \hat{R}\|_{\infty} \leq 2 \operatorname{trace} \sum_{R2} \quad (64)$$

が成立する。したがって補題3より

$$\|Q^* - \hat{Q}\|_{\infty} \leq 2 \operatorname{trace} \sum_{R2} \quad (65)$$

が成立する。また、

$$\begin{aligned} \|T_1 - \hat{Q}T_2\|_{\infty} &= \|T_1 - Q^*T_2 + (Q^* - \hat{Q})T_2\|_{\infty} \\ &\leq \|T_1 - Q^*T_2\|_{\infty} + \|Q^* - \hat{Q}\|_{\infty} \|T_2\|_{\infty} \\ &= \lambda^* + \|Q^* - \hat{Q}\|_{\infty} \|T_2\|_{\infty} \\ &< \lambda^* + 2 \operatorname{trace} \sum_{R2} \|T_2\|_{\infty} \end{aligned} \quad (66)$$

となり、

$$\lambda^* + 2 \operatorname{trace} \sum_{R2} \|T_2\|_{\infty} \leq 1 \quad (67)$$

が成立すれば

$$\|T_1 - \hat{Q}T_2\|_{\infty} < 1 \quad (68)$$

であり、 $\hat{Q} \in RH_{\infty}$ より

$$\hat{K} = FI(K_0, \hat{Q}) \quad (69)$$

は H_{∞} 補償器である。また、 N, M, X, Y, Q の極は円領域 D 内のみに存在することから、それらの積と和で表わされる閉ループ伝達関数は、円領域 D 内のみに極をもつ。■

4. H_{∞} 補償器の低次元化

前章では、ユーラパラメータ Q^* を低次元化することによって得られる補償器が H_{∞} 条件を満足する条件を導出した。しかしながら、 Q^* を低次元化することによって得られる H_{∞} 補償器の近似モデルが、元の H_{∞} 補償器の

次数よりも実際には低次とならない場合が存在する。これは、元の H_{∞} 補償器において、 K_0 と Q^* との間で極-零点相殺が起こり、補償器全体のマクミラン次数が K_0 と Q^* のマクミラン次数の和より小さくなる場合に起こり得る。本章では、補償器の内部において起こり得る極-零点相殺について考察し、ユーラパラメータを低次元化することによって近似された H_{∞} 補償器が、元の H_{∞} 補償器よりも低次元となるための条件を導出する。

以下では $Q_r(s)$ と $\hat{Q}(s)$ を区別せず、 $Q_r(s)$ で表わすことにする。 $Q^*(s)$ の実現を

$$Q^*(s) = \begin{bmatrix} A_{Q^*} & B_{Q^*} \\ C_{Q^*} & D_{Q^*} \end{bmatrix} \quad (70)$$

とすると、 H_{∞} 補償器は

$$\begin{aligned} K &= FI(K_0, Q^*) \\ &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_{Q^*} F C_2 & B_2(I + D_{Q^*} F D_{22}) C_{Q^*} \\ B_{Q^*} F C_2 & A_{Q^*} + B_{Q^*} F D_{22} C_{Q^*} \\ C_1 + D_{12} D_{Q^*} F C_2 & D_{12}(I + D_{Q^*} F D_{22}) C_{Q^*} \\ B_1 + B_2 D_{Q^*} F D_{21} & B_{Q^*} F D_{21} \\ D_{11} + D_{12} D_{Q^*} F D_{21} & \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (71)$$

$$\text{ただし, } F = (I - D_{22} D_{Q^*})^{-1} \quad (72)$$

で表わされる。(71)式は最小実現とは限らず、不可制御モードまたは不可観測モードが存在する場合には極-零点相殺が起こり、 H_{∞} 補償器 K のマクミラン次数は低下する。したがって、

$$\deg(K) \leq \deg(K_0) + \deg(Q^*) \quad (73)$$

という関係が成立する。

一方、 $\hat{K} = FI(K_0, Q_r)$ についても、

$$\deg(\hat{K}) \leq \deg(K_0) + \deg(Q_r) \quad (74)$$

という関係が成立する。したがって、極-零点相殺の影響により、近似補償器の次数が元の補償器の次数よりも大きくなることがある。

ここで、

$$K_0 = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} (s) \quad (75)$$

としたとき、 $FI(K_0, Q)$ の不可制御モード、不可観測モードについてはつぎの結果が示されている。

[補題4]⁷⁾

$FI(K_0, Q)$ の全ての不可観測モードは、 K_{12} の零点、また、 $FI(K_0, Q)$ の全ての不可制御モードは K_{21} の零点である。

(証明) 文献9)参照。■

K_{12} の零点と K_{21} の零点の総数を TZ とすると、つぎの結果が得られる。

《定理3》

$$\deg\{FI(K_0, Q^*)\} > \deg\{FI(K_0, Q_r)\} \quad (76)$$

成り立つための十分条件は、

$$\{Q^* \text{の低次元化数}\} > \{TZ\} \quad (77)$$

である。

(証明)

$$\{Q^* \text{の低次元化数}\} > \{TZ\}$$

すなわち

$$\deg(Q^*) - \deg(Q_r) > TZ \quad (78)$$

が成り立つと仮定する。補題 4 より $Fl(K_0, Q^*)$ の内部における極・零点相殺は $Fl(K_0, Q^*)$ の不可観測または不可制御モードにおいて起こりうる。したがって、

$$\deg\{Fl(K_0, Q^*)\} \geq \deg(K_0) + \deg(Q^*) - TZ \quad (79)$$

という関係が成り立つ。(78)式、(79)式より

$$\deg\{Fl(K_0, Q^*)\} > \deg(K_0) + \deg(Q_r) \quad (80)$$

が成り立つ。また、 $Fl(K_0, Q_r)$ においては

$$\deg\{Fl(K_0, Q_r)\} \leq \deg(K_0) + \deg(Q_r) \quad (81)$$

が成り立つ。したがって、(80)式と(81)式より

$$\deg\{Fl(K_0, Q_r)\} < \deg\{Fl(K_0, Q^*)\} \quad (82)$$

(77)の条件式において、右辺は一定値であり、左辺はあらかじめ設定するユーラパラメータの次元が大きいくほど大きくなる。したがってユーラパラメータの次元をあらかじめ大きく設定してパラメータの最適化を行い、求められたユーラパラメータの近似を行う H_∞ 制御問題の数値的解法を用いる上で本条件は有用となる。以上の結果より、 Q^* を近似することによって得られる H_∞ 補償器が、低次元化補償器であるための条件が導出された。

5. 数 値 例

本数値例では、前章までに得られた結果の有効性を確認するために、制御対象 $P(s)$ 、加法的な不確かさ $\Delta(s)$ がそれぞれ

$$P(s) = \frac{s-2}{(s-1)(s+1)}$$

$$\Delta(s) = 0.1 \frac{3s+1}{s+1}$$

で与えられる Fig. 1 のフィードバック系のロバスト安定化補償器の低次元化について考える。閉ループ極を考慮し、制御対象の伝達関数を安定かつプロパーな有理関数上で次式のように既約分解する。

$$P(s) = N(s)M^{-1}(s)$$

$$N(s) = \frac{s-2}{(s+2)(s+3)}$$

$$M(s) = \frac{(s-1)(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

ベズー等式

$$X(s)N(s) + Y(s)M(s) = 1$$

を満たす $X(s)$ 、 $Y(s)$ を

$$X(s) = \frac{-176s-184}{(s+4)(s+5)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2+14s+248}{(s+4)(s+5)}$$

と求める。(7)式を満たすように重み関数 $W(s)$ を

$$W(s) = \Delta(s)$$

とすると、ロバスト安定化問題は

$$\|WH\|_\infty < 1 \quad (83)$$

ただし、 $H(s) = M(s)X(s) + Q(s)M^2(s)$ とする

を満たす $Q(s)$ を RH_∞ のクラスから求める問題に帰着される。本問題において、(83)式を満たす解 $Q^*(s)$ が得られたときロバスト安定化補償器 $K^*(s)$ は、

$$K^*(s) = Fl(K_0(s), Q^*(s)) \quad (84)$$

で与えられる。ここで、

$$K_0(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^{-1}(s)X(s) & Y^{-1}(s) \\ Y^{-1}(s) & Y^{-1}(s)N(s) \end{bmatrix} \quad (85)$$

である。さて、 $Q^*(s)$ が

$$Q^*(s) = 2.67 \frac{\prod_{i=1}^{17}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{17}(s-p_i)}$$

として求めたとする。 z_i は零点、 p_i は極を表す。 Q^* の極配置を Fig. 5 に示す。このとき $K^*(s)$ は(84)式によって求められ、マクミラン次数は 19 次、評価関数の値は

$$\lambda^* = 0.802$$

である。そこでこのような H_∞ 補償器を閉ループ極の存在範囲を指定しつつ低次元化することを考える。極の指定領域を、左半面上において中心 $(-100, 0)$ 、半径 99.5 の円の内部とする。

$$T_1(s) = W(s)M(s)X(s)$$

$$T_2(s) = -W(s)M^2(s)$$

とすると、

$$\|T_2(s)\|_\infty = 0.3$$

である。(48)式の変換により $R^*(s)$ を求める。 $R^*(s)$ のハンケル特異値を求め、定理 2 の結果を適用すると、

Fig. 6 Pole plot I

Fig. 7 Pole plot II

Table 1 A summary of $\deg(Q_r)$, $\lambda^* + 2 \text{trace} \Sigma_{R2} \|T_2\|_\infty$, λ and McMillan degree of controllers

$\deg(Q_r)$	$\lambda^* + 2 \text{trace} \Sigma_{R2} \ T_2\ _\infty$	λ	$\deg\{F(K_0, Q_r)\}$
17(Q^*)	—	0.802	20(19)
16	0.803	0.802	20(18)
15	0.805	0.802	19(17)
14	0.814	0.802	18(16)
13	0.839	0.804	17(15)
12	0.965	0.807	16(14)
11	1.21	0.826	15(13)
10	2.47	1.09	13(12)

Table 1 に示すように $Q^*(s)$ は極を指定領域に保存し、さらにロバスト安定条件を満たしたままマクミラン次数を5次低減することが可能であることがわかる。**Fig. 6** に Q^* を5次元低次元化して得られた Q_{12} の極を示す。これより、指定領域内に極が配置されていることがわかる。一方、平衡実現近似手法を直接用いて Q^* を5次元低次元化した場合の Q_{12} の極を **Fig. 7** に示す。なお、**Fig. 5**, **Fig. 6**, **Fig. 7** 中の曲線は極の指定領域を表わす円である。ここで、極の指定領域の設定方法については現在のところ解析的な指針はなく、本数値例では思考錯誤により設定した。つぎに、(85)式より $K_{12}(s)$, $K_{21}(s)$ の零点の総数 TZ は4であり、定理3の結果を用いると、近似された H_∞ 補償器は、元の補償器よりも低次元となることがわかる。**Table 1** に Q^* を低次元化した Q_r のマクミラン次数と評価関数の値 λ , 補償器のマクミラン次数の関係を示す。補償器の次数は計算器を用いて計算した値と、理論値()内を示した。ここで理論値は、 $FI(K_0, Q_r)$ において極-零点相殺が起こらない場合のマクミラン次数とした。なお、本数値例の数値計算には MATLAB を用いた。

6. おわりに

本論文では、ユーラパラメータを低次元化することにより、 H_∞ 補償器を間接的に低次元化する H_∞ 補償器低

次元化手法を提案した。近似手法としては、システムモデルの極の存在領域を保存しながら近似することの可能な手法を提案し、これを用いた。本低次元化手法の特徴は

- 1) 内部安定性を保存する。
- 2) 閉ループ極の存在領域を保存する。
- 3) 低次元化した補償器の H_∞ ノルム条件を、低次元化した補償器を逐一求めることなく Q^* のハンケル特異値を求めることによって、容易に調べることが可能。といったことがあげられる。また、 H_∞ 補償器の線形分数変換において起こり得る極-零点相殺を考慮し、最終的に得られる近似補償器の次数が元の補償器の次数よりも低次となるための十分条件を導出した。以上のとおり本提案手法は、内部安定性と閉ループ極の存在領域を保存するという意味において閉ループ特性を考慮した H_∞ 補償器の従来にない新しい低次元化手法である。

参考文献

- 1) S. P. Boyd and C. H. Barratt: Linear Controller Design, Prentice-Hall (1991)
- 2) 小原, 杉江: 凸最適化を用いた制御系設計, システム/制御/情報, 38-3, 139/146 (1994)
- 3) 前田, 杉江: アドバンスド制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店(1990)
- 4) M. Vidyasagar: Control System Synthesis, MIT Press, Boston (1985)

- 5) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag (1987)
- 6) 前田, 児玉, 鄭: 安定領域を指定した H_∞ 制御, 計測自動制御学会論文集, **28**-10, 1194/1200 (1992)
- 7) K. Glover: All Hankel-norm Approximations of Linear Multivariable Systems and Their L_∞ -error Bounds, Int. J. Control, **39**-6, 1115/1193 (1984)
- 8) D. Mustafa and K. Glover: Controller Reduction by H_∞ -Balanced Truncation, IEEE Trans., **AC-36**-6, 668/682 (1991)
- 9) D. J. N. Limebeer, Y. S. Hung: An Analysis of The Pole-Zero Cancellations in H_∞ -Optimal Control Problems of The First Kind, SIAM J. Control And Optimization, **25**-6, 1457/1493 (1987)
- 10) 大日方五郎: 平衡実現, ハンケルノルム及び連分数展開を用いた制御系の低次元化, システム/制御/情報, **34**-9, 508/514 (1990)

=====

[著 者 紹 介]

渡 辺 隆 男 (正会員)

1994 年, 東京都立大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年同大学工学部助手, 現在に至る。ロバスト制御の研究に従事。電気学会の会員。

安 田 恵 一 郎 (正会員)

1989 年, 北海道大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。同年東京都立大学工学部助手, 91 年同大学工学部助教授となり, 現在に至る。主として, 大規模システムの計画・運用・制御に関する研究に従事(工学博士)。電気学会, システム制御情報学会, OR 学会などの会員。

横 山 隆 一 (正会員)

1973 年, 早稲田大学大学院理工学研究科電気工学専攻博士課程修了。74 年(株)三菱総合研究所入社, 78 年東京都立大学工学部助教授, 89 年同大学工学部教授となり, 現在に至る。主として, 大規模システムの計画・運用・制御, デジタルシステム制御, エキスパートシステム, ファジィ理論応用に関する研究に従事(工学博士)。電気学会, システム制御情報学会などの会員。

=====