サンプル値系における H_∞ 制御理論を用いた磁気浮上系の制御

斉 潤 徳*・辻 輝 生*

Control of a Magnetic Levitation System by Using H_∞ Control Theory for Sampled-data Control Systems

Run-De Qi* and Teruo TSUJI*

This paper presents an H_∞ control system design for a levitation transport equipment by electromagnets attraction with nonlinear characteristics. The control systems consist of a levitation system, a guide system and a run system. As the feature of this system, state variables and outputs evolve in continuous-time and others evolve in discrete-time in the system, and controllers are restricted to be digital controllers through samplers and zero order holds with a fixed sampling period. In the control system design, we consider the influence of both disturbances and uncertainties in the model. The main disturbances stem from the position sensors. The electromagnetic uncertainties are due to the gain change in the current amplifier, the influence of leakage flux and linearization error in the magnetic circuit, and the mechanical uncertainties are due to the changes of the mass and the moment of inertia of the vehicle. The controller design is based on the H_∞ type control problem for sampled-data control systems.

The results of several experiments show that the H_∞ controller designed for sampled-data control systems gives a higher performance as the sampling period gets longer compared with the H_∞ controller designed for continuous-time control systems.

Key Words: magnetic levitation system, nonlinear characteristics, sampled-data systems, H_∞ control

1. はじめに

磁気浮上を利用した非接触支持系は、クリーンルームなどに代表される無発塵性の要求が厳しい環境に適しているものとして有望視されており、搬送装置としての応用が現在すでに実用化されている。一般に吸引形磁気浮上系には、電流アンプのゲイン変化、漏れ磁束などの電気磁気的な不確かさや、搬送物の搭載による質量の変化などの機械的な不確かさが存在している。この事実およびモデル化における近似はモデル化誤差となり、設計した系の制御性能を損なう恐れがある。また、本磁気浮上装置のもう一つの問題点は、電磁石と移動子とのギャップが比較的狭いこと(定常位置において、磁石と移動子のギャップが0.8 mm)である。したがって、ロバスト性が

要求されるとともに、応答特性に対する制限が厳しくなる。これまで、著者らは、本磁気浮上系に対する制御器の設計として、以下の二つの方法を用いてきた。1) デジタル制御系として、外乱補償オブザーバの方法により制御器を設計する⁷⁾。2) 連続時間制御系として、 H_∞ 制御理論により設計した制御器を極・ゼロ点写像を用いて離散時間制御器に変換する⁸⁾。また、これらの二つの方法に対して、有効性を実験により確認してきた。しかし制御性能について、つぎの問題点があると思われる。1) の方法では、モデル化誤差の影響に対するロバスト性が弱く、センサからのノイズなどの外乱の影響を受けやすく、定常状態における微振動が生じたりする欠点がある。2) の方法は、サンプリング周期が短い場合には低感度性と外乱にもロバスト安定性が達成されるとともに、過渡応答にオーバーシュートがない好ましい特性を得たが、サンプリング周期が長くなると、制御性能が劣化し、モデル化誤差などによる振動が発生したりする。サンプリング周期が長くなる理由としては、以下のことが考えられる。

* 九州工業大学 北九州市戸畑区仙水町 1-1

* Kyushu Institute of Technology, Kitakyushu
(Received March 15, 1994)
(Revised September 5, 1994)

本磁気浮上装置は、搬送装置として6方向の制御が要求される。これまでの制御系では浮上系と案内系の計5方向の制御を行い、その際、サンプリング周期は0.75 msであった。しかし、走行系の制御に必要な時間を加えれば、サンプリング周期は0.9 ms程度が必要となる。また、コストの低減のため、安価なCPUを用いるときは(現在はT 800を用いている)、サンプリング周期は長いほど演算時間に余裕が生じ好ましいことはいうまでもない。本論文は、上述のような方法の問題点の解決とサンプリング周期に対する連続系と離散系とが混在したサンプル値系を近似を用いず直接的に扱う方法^{1)~4)}の応用について考察した。すなわち、本システムにおいては、制御対象となるのは連続時間系で、制御系を実現するのはマイクロプロセッサが使われている離散時間系であるところのサンプル値制御系となっている。具体的には、実際の入力値は、各電磁石に対する電流指令値であるので、加速度と電流との関係を考慮した公称伝達行列を導き、これに対して、サンプル値系における H_∞ 制御理論に基づいて制御器設計を行った。上述の2)の方法と比較して、本論文で設計したシステムのほうが良好な制御性能を示すことを実機による実験結果によって確認した。

2. 制御対象とそのモデル化

Fig. 1 は制御対象となる装置の電磁石と移動子との位置関係を示したものである。 $M_1 \sim M_4$ は引き上げ用電磁石、 $M_1' \sim M_4'$ は引き下げ用電磁石である。 $M_{1G} \sim M_{2G'}$ は案内用電磁石である。走行系はリニアモータを採用している。電磁石 M_1 と M_2 の中点から移動子の重心 Q までの距離を l とする(以後、重心位置と呼ぶ)。

Fig. 1 に示したような浮上体に対して力学方程式はつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_v &= f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - mg \\ I_r\ddot{x}_r &= \frac{k}{2}(f_1 + f_3 - f_2 - f_4) \\ I_p\ddot{x}_p &= l(f_1 + f_2 + f_3 + f_4) - h(f_3 + f_4) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Fig. 1 The movable vehicle and the positions of the magnets

ここで、 m : 移動子の質量、 I_r : ローリング方向の慣性モーメント、 I_p : ピッチング方向の慣性モーメント、 x_v : 重心の位置、 x_r : ローリング角、 x_p : ピッチング角、 $f_1 \sim f_4$: 各上下電磁石による吸引力、 g : 重力加速度、 h , k : 電磁石間の距離、 l : 重心位置である。各方向の加速度をそれぞれ a_v, a_r, a_p とおき、さらに

$$T = \begin{bmatrix} 1/m & 1/m & 1/m & 1/m \\ k/2I_r & -k/2I_r & k/2I_r & -k/2I_r \\ l/I_p & l/I_p & (l-h)/I_p & (l-h)/I_p \end{bmatrix} \quad (2)$$

$a = \text{col}(a_v, a_r, a_p)$, $F = \text{col}(f_1, f_2, f_3, f_4)$, $g = \text{col}(-g, 0, 0)$, $x_{\text{real}} = \text{col}(x_v, x_r, x_p)$ とすれば、ベクトル加速度と力学方程式は

$$a = TF + g \quad (3)$$

$$\ddot{x}_{\text{real}} = a \quad (4)$$

となる。

Fig. 2 はモデル化の対象とした電磁石である。すなわち、Fig. 1 の各 M_i または M_i' に相当している。まず、力 f_i と電流との関係が以下のようにして与えられる。電磁石鉄心および移動子の比透磁率を μ_1, μ_2 、それらの等価的な磁路長を ℓ_1, ℓ_2 、また、それらの等価断面積を S_1, S_2 とし、さらに移動子と上下電磁石との距離を g_u, g_d とすれば、電磁石吸引力は

$$f_i = \frac{\mu_0 S_3 N_u^2 i_{ui}^2}{[(\ell_1 S_3 / \mu_1 S_1) + (\ell_2 S_3 / \mu_2 S_2) + 2g_{ui}]^2} - \frac{\mu_0 S_4 N_d^2 i_{di}^2}{[(\ell_1 S_4 / \mu_1 S_1) + (\ell_2 S_4 / \mu_2 S_2) + 2g_{di}]^2} \quad (5)$$

$$i = 1, 2, 3, 4$$

となる。ここで、 N_u, N_d : 各上下電磁石コイルの巻数、 $g_{mn}(m=u, d; n=1, 2, 3, 4)$: 各引上げと引下げ用電磁石の移動子からの距離、 $i_{mn}(m=u, d; n=1, 2, 3, 4)$: 各上下電磁石の電流である。この(5)式を後述の(8)式のように近似するのであるが、その前に電磁石の電流の近似について述べる。サンプリング周期 δ の間に各上下電

Fig. 2 The shape and the equivalent dimension of the magnets

磁石の電流 i_{ui}, i_{di} はつぎの式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} i_{ui}(t) &= i_{ui}(k)e^{-(t-k\delta)/\tau_u} + i_{ui}^*(k)(1 - e^{-(t-k\delta)/\tau_u}) \\ i_{di}(t) &= i_{di}(k)e^{-(t-k\delta)/\tau_d} + i_{di}^*(k)(1 - e^{-(t-k\delta)/\tau_d}) \end{aligned} \right\} \quad t \in [k\delta, (k+1)\delta] \quad (6)$$

ここで、 $i_{ui}(k), i_{di}(k), i_{ui}^*(k), i_{di}^*(k)$ は、それぞれ各上下電磁石巻線の電流のサンプリング時の初期値およびそれらに対応する指令値である。また、 τ_u, τ_d は引上げおよび引下げ用電磁石コイルの時定数である。これらの時定数は電磁石鉄心と移動子との距離により変化するが、いま、定常位置における値で一定であると仮定して、 $\bar{\tau}_u, \bar{\tau}_d$ で近似する。したがって、各上下電磁石の電流は近似的に

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_{ui}(t) &= \bar{i}_{ui}(k)e^{-(t-k\delta)/\bar{\tau}_u} + \bar{i}_{ui}^*(k)(1 - e^{-(t-k\delta)/\bar{\tau}_u}) \\ \bar{i}_{di}(t) &= \bar{i}_{di}(k)e^{-(t-k\delta)/\bar{\tau}_d} + \bar{i}_{di}^*(k)(1 - e^{-(t-k\delta)/\bar{\tau}_d}) \end{aligned} \right\} \quad t \in [k\delta, (k+1)\delta] \quad (7)$$

となる。さらに本実験機の場合、比透磁率は、10, 200~15, 100であるので、サンプリング時間間隔 $[k\delta, (k+1)\delta]$ の間、 $g_{ui}(k)$ と $g_{di}(k)$ で(5)式の g_{ui} と g_{di} を近似し、 S_1 で(5)式の S_3 と S_4 を近似すれば、各支持点における吸引力は、近似的に

$$\bar{f}_i = \frac{\mu_0 S_1}{4} \left(\frac{N_u^2 \bar{i}_{ui}^2}{g_{ui}^2(k)} - \frac{N_d^2 \bar{i}_{di}^2}{g_{di}^2(k)} \right) \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (8)$$

と書くことができる。そこで $\bar{\mathbf{F}} = \text{col}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \bar{f}_4)$ とおき、近似ベクトル加速度 $\bar{\mathbf{a}} = \text{col}(\bar{a}_v, \bar{a}_r, \bar{a}_p)$ を

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{g} \quad (9)$$

とおく。同様に力の指令値を $\mathbf{F}^* = \text{col}(f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*)$ とおき、ベクトル加速度指令値 $\mathbf{a}^* = \text{col}(a_v^*, a_r^*, a_p^*)$ を

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{T}\mathbf{F}^* + \mathbf{g} \quad (10)$$

とおけば、付加的な条件 $f_1^* - f_3^* = f_2^* - f_4^*$ より、 $\mathbf{F}^*$ は

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{T}^*(\mathbf{a}^* - \mathbf{g}) \quad (11)$$

と書くことができる。ここで、

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} m(h-l)/2h & I_r/2k & I_p/2h \\ m(h-l)/2h & -I_r/2k & I_p/2h \\ ml/2h & I_r/2k & -I_p/2h \\ ml/2h & -I_r/2k & -I_p/2h \end{bmatrix} \quad (12)$$

である。

加速度指令値 $\mathbf{a}^*$ を用いて、電流指令値 $i_{ui}^*(k), i_{di}^*(k)$ を求めるために、

$$\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \mathbf{a}^* dt = \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \bar{\mathbf{a}} dt \quad (13)$$

を満足するようにするものとする。このようにすれば、サンプル値系の制御器を設計するときに、電磁石の電流の遅延を補償できる。したがって、(9)式と(10)式により、

$$\int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \mathbf{F}^* dt = \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \bar{\mathbf{F}} dt \quad (14)$$

となる。デジタル制御のため、サンプリング時間間隔 δ の間、 $\mathbf{a}^*$ は固定されるものとすれば、すなわち $f_i^*(i=1, 2, 3, 4)$ は固定されるものとすれば、(7)式と(14)式より、つぎのような関係

$$\begin{aligned} f_i^*(k)\delta &= \int_{k\delta}^{(k+1)\delta} \bar{f}_i dt \\ &= \frac{\mu_0 S_1 N_u^2}{4 g_{ui}^2(k)} (\alpha_{u1} \bar{i}_{ui}^2(k) + 2\alpha_{u2} \bar{i}_{ui}(k) \bar{i}_{ui}^*(k) \\ &\quad + \alpha_{u3} \bar{i}_{ui}^{*2}(k)) - \frac{\mu_0 S_1 N_d^2}{4 g_{di}^2(k)} (\alpha_{d1} \bar{i}_{di}^2(k) \\ &\quad + 2\alpha_{d2} \bar{i}_{di}(k) \bar{i}_{di}^*(k) + \alpha_{d3} \bar{i}_{di}^{*2}(k)) \end{aligned} \quad i=1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i1} &= \frac{\bar{\tau}_i}{2} (1 - e^{-2\delta/\bar{\tau}_i}) \\ \alpha_{i2} &= \bar{\tau}_i (1 - e^{-\delta/\bar{\tau}_i}) - \alpha_{i1} \\ \alpha_{i3} &= \delta - 2\alpha_{i2} - \alpha_{i1} \end{aligned} \right\} \quad i=u, d \quad (16)$$

である。(15)式によって、 $i_{ui}^*(k)$ と $i_{di}^*(k)$ は以下の3種類にわけて決める。

$$1) \quad f_i^*(k)\delta = \frac{\mu_0 S_1}{4} \left(\frac{N_u^2}{g_{ui}^2(k)} \alpha_{u1} \bar{i}_{ui}^2(k) - \frac{N_d^2}{g_{di}^2(k)} \alpha_{d1} \bar{i}_{di}^2(k) \right) \quad \text{のとき、} \quad i_{ui}^*(k) = i_{di}^*(k) = 0.$$

$$2) \quad f_i^*(k)\delta > \frac{\mu_0 S_1}{4} \left(\frac{N_u^2}{g_{ui}^2(k)} \alpha_{u1} \bar{i}_{ui}^2(k) - \frac{N_d^2}{g_{di}^2(k)} \alpha_{d1} \bar{i}_{di}^2(k) \right) \quad \text{のとき、} \quad i_{di}^*(k) = 0, \quad i_{ui}^*(k) \text{ は (15) 式の 2 次方程式の解。}$$

$$3) \quad f_i^*(k)\delta < \frac{\mu_0 S_1}{4} \left(\frac{N_u^2}{g_{ui}^2(k)} \alpha_{u1} \bar{i}_{ui}^2(k) - \frac{N_d^2}{g_{di}^2(k)} \alpha_{d1} \bar{i}_{di}^2(k) \right) \quad \text{のとき、} \quad i_{ui}^*(k) = 0, \quad i_{di}^*(k) \text{ は (15) 式の 2 次方程式の解。}$$

このようにすれば、

$$\mathbf{a}(s) = (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{a}^*(s) \quad (17)$$

$$\mathbf{x}_{real}(s) = \frac{1}{s^2} (\mathbf{I} + \mathbf{A})\mathbf{a}^*(s) \quad (18)$$

となり、システムの公称伝達行列は

$$\mathbf{P}(s) = \frac{1}{s^2} \mathbf{I} \quad (19)$$

となる。乗法的な変動 $\mathbf{A}$ には、上述のようなモデル化における近似誤差のほかに、電流アンプのゲイン変化、搬送物の搭載による質量の変化などのモデル化誤差も含んでいる。

さて、重力方向、ローリング方向およびピッチング方向はすべて同じ制御特性に達成するように設計するとすれば、これら3方向に対する公称伝達関数は、すべて

$$\mathbf{p}(s) = \frac{1}{s^2} \quad (20)$$

となる。

3. 制御器設計

本系に対して、以下のような制御仕様について考察する。

1. 外乱の影響を低減させる。
2. 制御対象のモデル化誤差とパラメータ変動に対して、システムをロバスト安定にする。

したがって、制御系設計の基本は系の感度をできるだけ小さくし、かつロバスト安定性を高めることにある。しかし、周知のように、システムの感度関数 S と相補感度関数 T は独立ではない。そこで、閉ループ特性として、低周波数域で低感度化をはかり、モデル化誤差が一般に大きくなる高周波数域でロバスト安定性を優先に考えるという混合感度問題にすることにより制御器を設計する。したがって、重み関数を次式のように選ぶ。

$$W_s(s) = \frac{\rho}{s + \eta} \quad (21)$$

$$W_t(s) = \frac{(s + \alpha)^2}{\alpha^2 \beta} \quad (22)$$

すなわち上式において、パラメータ ρ を大きくとるほど、低感度化することを意味し、パラメータ α と β を適当に選択すれば、システムのロバスト性を保つと共に、動作周波数域を調整し、希望する閉ループ系の応答特性を実現できることになる。

H_∞ 制御器を求めるために用いた拡大制御系を Fig. 3 に示す。ただし、外生入力 w_d は観測ノイズを表わしているが、このノイズは観測時のみ系の制御に影響を与えるので、離散時間信号と考えてよい。また、制御出力 z 、制御入力 u と観測出力 y は連続時間信号である。プラント $p(s)$ の入力側と外生入力 w_d にそれぞれ零次ホールド H を挿入し、観測出力側へ理想サンプラ S_m を挿入している。ホールド H とサンプラ S_m がともに周期 δ で同期しているとする。

(20) 式、(21) 式と (22) 式により、連続時間一般化制御対象 $G(s)$ の状態空間実現は、

Fig. 3 Extended control system

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{A}{C_1} & \frac{B_1}{D_{11}} & \frac{B_2}{D_{12}} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

となる。ここで、

$$[A, B_1, B_2] = \begin{bmatrix} -\eta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[C_1, D_{11}, D_{12}] = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & -1/\beta & -2/\alpha\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\alpha^2\beta \end{bmatrix}$$

$$[C_2, D_{21}, 0] = [0 \ 1 \ 0 \mid 1 \ 0]$$

である。 (A, B_2, C_2) は可安定かつ可検出であることがわかる。 w_d から z までの写像を $T_{w_d z}(G, K_d)$ とすれば、その写像の誘導ノルムは

$$\|T_{w_d z}(G, K_d)\|_{l_2/l_2} := \sup_{w_d \in l_2} \frac{\|z\|_{l_2}}{\|w_d\|_{l_2}} \quad (24)$$

と定義される。この誘導ノルムは、あるディジタル制御器 $K_d(z)$ を用いたときの、 w_d の z への最悪な影響を定量化したものと考えられる。サンプル値系における H_∞ タイプ制御問題は $G(s)$ を内部安定化し、しかも、

$$\|T_{w_d z}(G, K_d)\|_{l_2/l_2} < 1 \quad (25)$$

を達成する離散時間制御器 $K_d(z)$ を求める問題である。このサンプル値系における H_∞ タイプ制御問題は、ある離散時間系の H_∞ 制御問題に帰着させて解くことができる。すなわち、(23) 式の連続時間一般化制御対象 $G(s)$ から

$$\|T_{w_d z}(G, K_d)\|_{l_2/l_2} = \|T_{w_d z_d}(G_d, K_d)\|_{l_2/l_2} \quad (26)$$

を満足する離散時間一般化制御対象 $G_d(z)$ を求め、この離散時間系の H_∞ 制御問題として解くわけである⁴⁾。

【補題】 M を n 次半正定行列とすると、ある適当な直交行列 U を用いて、

$$M = (\text{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \dots, 0] U^{-1})^T (\text{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_r}, 0, \dots, 0] U^{-1}) \quad (27)$$

にできる。ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0$ は M の固有値である。

(証明) M は n 次半正定行列であるので、適当に直交行列 U をとって、 $U^T M U = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0]$ にすることができる。また、 M の固有値 $\lambda_i (i=1, \dots, r) > 0$ より証明は明らか。

(26) 式を満たす等価的な離散時間一般化制御対象

$$G_d(z) = \begin{bmatrix} A_d & B_{d1} & B_{d2} \\ C_{d1} & D_{d11} & D_{d12} \\ C_{d2} & D_{d21} & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

は以下のように求める。 $[A_d, B_{d1}, B_{d2}] = [e^{A\delta}, \int_0^\delta e^{A\tau} d\tau B_1, \int_0^\delta e^{A\tau} d\tau B_2]$ より、

$$A_d = \begin{bmatrix} e^{-\gamma\delta} \frac{1}{\eta}(1-e^{-\gamma\delta}) & \frac{1}{\eta^2}(-1+\gamma\delta+e^{-\gamma\delta}) \\ 0 & 1 & \delta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{d1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta}(1-e^{-\gamma\delta}) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$B_{d2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta^3}(-1+\gamma\delta-\frac{\eta^2\delta^2}{2}+e^{-\gamma\delta}) \\ -\frac{1}{2}\delta^2 \\ -\delta \end{bmatrix}$$

となる. また, $C_1(\theta) = C_1 e^{A\theta}$, $D_{11}(\theta) = C_1 f_0^0 e^{A(\theta-r)} d\tau B_1 + D_{11}$, $D_{12}(\theta) = C_1 f_0^0 e^{A(\theta-r)} d\tau B_2 + D_{12}$ とおき, 条件 $[C_{d1}, D_{d11}, D_{d12}] = [f_0^0 [C_1(\theta), D_{11}(\theta), D_{12}(\theta)]^T [C_1(\theta), D_{11}(\theta), D_{12}(\theta)] d\theta]^{1/2}$ と上述の補題により,

$$C_{d1} = \begin{bmatrix} \rho\sqrt{a_{11}} & \rho a_{21}/\sqrt{a_{11}} & \rho a_{31}/\sqrt{a_{11}} \\ 0 & \sqrt{\delta}/\beta & \sqrt{\delta}(\delta/2+2/\alpha)/\beta \\ 0 & 0 & \sqrt{d_{33}} \\ 0 & \rho\sqrt{b_{22}} & \rho b_{32}/\sqrt{b_{22}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{d11} = [\rho a_{21}/\sqrt{a_{11}} \quad 0 \quad 0 \quad \rho/\sqrt{b_{22}} \quad 0]^T$$

$$D_{d12} = \begin{bmatrix} -\rho a_{51}/\sqrt{a_{11}} \\ -\sqrt{\delta}(\delta^2/2+\delta/\alpha+1/\alpha^2)/\beta \\ -d_{53}/\sqrt{d_{33}} \\ -\rho b_{52}/\sqrt{b_{22}} \\ \sqrt{e_{55}} \end{bmatrix}$$

となる. ここで,

$$a_{11} = \frac{1}{2\eta}(1-e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{21} = \frac{1}{2\eta^2}(1-e^{-2\gamma\delta})^2$$

$$a_{22} = \frac{1}{2\eta^3}(-3+2\gamma\delta+4e^{-\gamma\delta}-e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{31} = \frac{1}{2\eta^3}(1-2\gamma\delta e^{-\gamma\delta}-e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{32} = \frac{1}{2\eta^4}(1-2\gamma\delta+\eta^2\delta^2-(2-2\gamma\delta)e^{-\gamma\delta}+e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{33} = \frac{1}{6\eta^5}(3+6\gamma\delta-6\eta^2\delta^2+2\eta^3\delta^3-12\gamma\delta e^{-\gamma\delta}-3e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{51} = \frac{1}{2\eta^4}(1-(2+\eta^2\delta^2)e^{-\gamma\delta}+e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{52} = \frac{1}{6\eta^5}(-9+6\gamma\delta-3\eta^2\delta^2+3\eta^3\delta^3+(12+3\eta^2\delta^2)e^{-\gamma\delta}-3e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{53} = \frac{1}{8\eta^6}(4-8\gamma\delta+8\eta^2\delta^2-4\eta^3\delta^3+4\eta^4\delta^4-(8-8\gamma\delta+4\eta^2\delta^2)e^{-\gamma\delta}+4e^{-2\gamma\delta})$$

$$a_{55} = \frac{1}{60\eta^7}(-90+60\gamma\delta-60\eta^2\delta^2+40\eta^3\delta^3-15\eta^4\delta^4+3\eta^5\delta^5+(120+60\eta^2\delta^2)e^{-\gamma\delta}-30e^{-2\gamma\delta})$$

$$b_{22} = a_{22} - a_{21}^2/a_{11}$$

$$b_{32} = a_{32} - a_{21}a_{31}/a_{11}$$

$$b_{33} = a_{33} - a_{31}^2/a_{11}$$

$$b_{52} = a_{52} - a_{21}a_{51}/a_{11}$$

$$b_{53} = a_{53} - a_{31}a_{51}/a_{11}$$

$$b_{55} = a_{55} - a_{51}^2/a_{11}$$

$$d_{33} = \rho^2(b_{33} - b_{32}^2/b_{22}) + \frac{1}{12}\delta^3/\beta^2$$

$$d_{53} = \rho^2(b_{53} - b_{32}b_{52}/b_{22}) + \frac{1}{6}\delta^3(\delta/4+1/\alpha)/\beta^2$$

$$e_{55} = \rho^2(b_{55} - b_{52}^2/b_{22}) + \frac{1}{3}\delta^3(\delta^2/15+\delta/2\alpha+1/\alpha^2)/\beta^2 - d_{53}^2/d_{33}$$

である. さらに,

$$[C_{d2}, D_{d21}] = [C_2, D_{21}]$$

とする. この等価的な離散時間制御対象 $G_d(z)$ に対して, 文献5)の方法によって離散時間系 H_∞ 制御器を求める. 文献5)の可解条件を照合したところ, つぎの条件は満たされていないことがわかる.

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_d - \sigma I & B_{d1} \\ C_{d2} & D_{d21} \end{bmatrix} = 3 < 4 (\sigma=1 \text{ の時})$$

ほかの条件は, 適当な変換により満たされていることが容易にわかる. したがって, 本論文で取り扱う磁気浮上システムに対して, そのまま離散系 H_∞ 制御による設計を行うことができない. この解決策として, つぎのように十分小さな正数 ε を用いた拡大系による解法が提案されている⁶⁾. すなわち

$$B_{d1\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\eta}(1-e^{-\gamma\delta}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

$$D_{d11\varepsilon} = [D_{d11} \quad 0]$$

$$D_{d21\varepsilon} = [1 \quad 0]$$

とすれば,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_d - \sigma I & B_{d1\varepsilon} \\ C_{d2} & D_{d21\varepsilon} \end{bmatrix} = 4 \quad (\text{任意の } \sigma)$$

となり, すべての可解条件が満足される. このようにして得られた拡大系に対して, 離散系の H_∞ 制御器を設計した結果, 中心解として,

$$K_d(z) = \frac{k(z-b)(z-b^*)}{(z-a_1)(z-a_2)(z-a_3)} \quad (29)$$

が得られた. サンプリング周期 δ が長くなるにつれ, パラメータの調整と対応する設計結果を **Table 1** に示して

Table 1 Parameters choice and designed results against the sampling period variation

δ (ms)	0.75	0.85	0.9
ρ	20	20	20
η	0.8	0.8	0.8
α	149.5	167.5	207.5
β	6	6	6
ε	10^{-12}	10^{-12}	10^{-8}
k	24776	21383	18664
b	0.9792 +j 0.0195	0.9775 +j 0.0211	0.9768 +j 0.0216
a_1	0.9999	0.9999	0.9998
a_2	0.7154	0.6971	0.7002
a_3	0.6400	0.6558	0.6531

おく。

これらの設計結果と比較するため、本磁気浮上装置に、連続時間系 H_∞ 制御理論により設計した制御器を(30)式に示す。

$$K(s) = \frac{k_c(s+b_{c1})(s+b_{c2})}{s(s+a_c)(s+a_c^*)} \quad (30)$$

ここで、

$$k_c = 4.6441 \cdot 10^7, b_{c1} = 65.765, b_{c2} = 29.922$$

$$a_c = 386.79 + j 326.08$$

である。この連続時間系 H_∞ 制御器 $K(s)$ をデジタル制御装置へ実装するときには、極・ゼロ点写像を用いて離散化した⁸⁾。

4. 実験

本実験に用いた磁気浮上装置では、浮上体の質量 $m = 7.0$ kg、慣性モーメント $I_r = 0.0072$ Nms²、および $I_p = 0.373$ Nms² である。移動子は、長さ $a = 80$ cm、幅 $b = 11$ cm、厚さ $c = 1$ cm 長方形板状をしている。定常浮上時における移動子と上電磁石との距離は 0.8 mm である。CPU としては 64 ビットプロセッサ T 800 を用いている。各電磁石と移動子間の距離はトランス型の距離センサにより測り、その出力は 12 ビットの A/D 変換器によりデジタル信号に変換される。また、 ℓ は、リニアレゾルバにより計測される。制御出力とする電流指令値は、12 ビット D/A 変換器を通して各電磁石の電流アンプに出力する。

Fig. 4, Fig. 5 と Fig. 6 はそれぞれ $\delta = 0.75$ ms, 0.85 ms, 0.9 ms とした場合の実機の移動子の重力方向のステップ応答である。(a) は連続時間 H_∞ 制御器(30)を極・ゼロ点写像を用いてデジタル制御器に変換する方法によるステップ応答であり、(b) は直接デジタル制御器(29)によるステップ応答である。Fig. 4 から(a)と(b)両方ともに、オーバーシュートがないと同時に、センサな

(a) H_∞ controller of continuous-time system

(b) H_∞ controller of sampled-data systems

Fig. 4 Step response with $\delta = 0.75$ ms

(a) H_∞ controller of continuous-time systems

(b) H_∞ controller of sampled-data systems

Fig. 5 Step response with $\delta = 0.85$ ms

どからの外乱に対する抑制、低感度化が実現されている良好な応答特性が得られたが、(b)のほうは応答時間が短いことも確認できる。しかし、サンプリング周期 δ が長くなるにつれて、(a)のほうは達成できる制御性能が劣化したのが Fig. 5 に示されている。特に、サンプリング周期を 20% 増加させた $\delta = 0.9$ ms の場合、Fig. 6 により(a)のほうは急激に性能が劣化し、モデル化誤差などによる振動の発生が見られる。これに対して、(b)のほうは、Fig. 5 と Fig. 6 ともに制御性能が Fig. 4 とほぼ同じ制御特性を得た。ローリング方向とピッチング方向についてもほぼ同様であったので、応答図は省略した。

(a) H_{∞} controller of continuous-time systems (b) H_{∞} controller of sampled-data systemsFig. 6 Step response with $\delta=0.9$ ms

5. おわりに

本論文では、4点支持、非線形磁気浮上搬送装置に対して近似加速度を得た後、実機モデルの加速度と加速度指令値との差を加速度指令値に対する乗法的な変動とみなし、システムの公称伝達行列を導いた。連続時間系の制御対象をデジタル制御器で制御するようなサンプル値系の H_{∞} 制御理論により、 H_{∞} ノルムが等しい条件を用いて、等価な離散時間一般化制御対象の状態空間表現を求めた。そして、従来の方法と異なり、近似を行うことなく直接的にデジタル H_{∞} 制御器を設計した。その長所は、1) サンプル点間応答が陽に評価できること、2) サンプル周期を等価な離散時間一般化制御対象の状態空間表現に含んでおくので、サンプル周期と制御性能との関係が明確になり、したがって、サンプル周期の変動に対応してシステムの達成可能な制御性能を直接目的とする制御器の設計が可能になることなどである。一方、連続時間系の設計問題として設計し、得られた制御器を離散化する方法があるが、サンプル周期が短い場合には良好な制御性能が得られ、有効であると思われる。しかしサンプル周期と達成可能な制御性能との関係は明確ではないので、サンプル周期があ

る程度長くなると安定性さえも保証されないという問題がある。両方の制御性能については、サンプリング周期を変化させた場合の実験結果により、明らかにサンプル値系における H_{∞} 制御理論により設計した制御器のほうが望ましい応答となっていることが確認できる。今回は、考慮しなかったが、離散時間 H_{∞} 制御設計(モデルをすべて離散化して設計)も興味のある理論であり、今後の課題とするとともに、 μ -シナシスの応用についても考察したい。

参考文献

- 1) Y. Hayakawa, Y. Yamamoto and S. Hara: H_{∞} Type Problem for Sampled-Data Control Systems-A Solution via Minimum Energy Characterization, Proc. of the 31th CDC, 463/468 (1992)
- 2) B. A. Francis: Lectures on H_{∞} Control and Sampled-Data Systems, CIME Lecture Notes (1990)
- 3) 杉江, 村井: 拡張パルス伝達関数の既約分解に基づくサンプル値系制御系の解析と設計, 計測自動制御学会論文集, 28-6, 810/816 (1993)
- 4) 早川義一: デジタル H_{∞} 制御, システム制御情報チュートリアル講座 '92「 H_{∞} 制御の新しい展開と応用の実際」, 95/116 (1992)
- 5) 近藤, 原, 伊藤: 連続・離散時間 H_{∞} の統一的解法, 計測自動制御学会論文集, 27-4, 415/421 (1991)
- 6) 小出, 原, 近藤: 虚軸上に零点を有する H_{∞} 制御問題の解法, 第13回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 11/14 (1991)
- 7) 辻, 小黒, 高橋: 非線形性を考慮した4点支持吸引形磁気浮上制御, 電学論 D, 111-6, 489/496 (1991)
- 8) 齊, 辻, 楊, 小黒: 非線形性を考慮した4点支持吸引形磁気浮上系の H_{∞} 制御, 電学論 D, 114-6, 680/688 (1994)

著者紹介

齊 潤 徳 (学生会員)

1984年, 北京科技大学大学院電気工学専攻修士課程修了。同年同大学電気工学科助手, 87年同講師。92年九州工業大学大学院工学研究科電気工学専攻博士後期課程入学。制御理論の応用および磁気浮上の制御に関する研究に従事。電気学会の会員。

辻 輝 生 (正会員)

(Vol. 31, No. 1 参照)