2尾の魚の行動を表わす数学モデル[†]

三、宮 信 夫*・長 野 耕 治*

A Mathematical Model for Describing the Behavior of Two Fish

Nobuo SANNOMIYA* and Koji NAGANO*

Fish school is an example of the familiar form of animal social behavior. However, the mechanism of the schooling behavior has not been clear yet. In our earlier papers, a mathematical model has been proposed for describing the behavior of fish school by using observation data from water tank experiments. Each fish regulates his movement, speed and direction, by the information which he receives from other fish around him. The mechanism of this information exchange has been demonstrated by carrying out computer simulation.

In this paper, a special attention is paid to analyzing the model for the schooling behavior of two fish. This model is represented by a system of nonlinear differential equations with five state variables. We investigate the relationship between a stable steady state of the system and a schooling behavior of fish swimming in the two-dimensional unbounded space. A result of analysis shows that the steady states of fish are given as a rectilinear motion and a circular motion. From an investigation of the local stability of the steady states it is found that the fish behavior model constructed by water tank experiment data is classified into four groups. Each group has different stable steady states. The most dominant group of the model has such a stable steady state as two fish swim along a linear trajectory and the leader corresponds to the fish with larger characteristic velocity.

Key Words: modeling, fish behavior, water tank experiment, stability analysis of nonlinear system, simulation

1. はじめに

魚の群れを構成する各個体は、体力的に異なった各個体固有の遊泳速度をもつが、眼と側線を同時に使って周囲の個体の位置および速度の情報を獲得し、自分の行動を調整しているといわれている^{1),2)}。そのような個体間の自律的な協調の結果、同一の方向に一定速度、一定間隔で泳ぐ群れが形成される。このような現象は、極性化³⁾と呼ばれている。著者らはこれまで、システム工学の立場からこのような魚群行動を取り上げ、その数学モデルを提案した^{4)~6)}。また、そのモデルを用いたシミュレーションにより、個体数が5尾から20尾までの魚群の多様な行

動パターンを検討してきた^{7)~9)}。

著者らのモデルは、ニュートンの運動法則を基にして、運動要因をいくつかの仮想的な力で表現した物理モデルであり、数学的には多変数非線形微分方程式系で記述されている。線形システムでは魚群行動の一部分の現象を断片的にしか表現することはできず、魚群の多様な行動パターンを一つのモデルで表現するにはモデルは非線形システムでなければならない。また、 N_f 尾の群れの運動を表わすには $4N_f$ 個の状態変数が必要である。その結果、このモデルから導かれるいくつかの現象は、システム解析が困難なためにこれまでシミュレーションによって確認されてきた。

本研究では、2尾の魚の行動を魚群行動モデルのシステム解析をもとに詳細に検討する。水槽実験によれば^{1),6),9)}、2尾の魚は、どちらか一方がリーダーとなり、他方がこれに従うという形で泳ぐという結果が得られている。したがって、3尾以上の魚群行動に比較してその行動は単純であるが、非線形モデルの解析という立場での研

[†] 第5回自律分散システムシンポジウムで発表(1994・1)

* 京都工芸繊維大学工学部 京都市左京区松ヶ崎御所海道町

* Faculty of Engineering and Design, Kyoto Institute of Technology, Kyoto

(Received June 2, 1994)

(Revised October 13, 1994)

究の出発点として、まず最も簡単な2個体間の相互作用による行動パターンを考察する。そのために、2次元平面における2尾の魚の行動を表わすモデルを、水槽実験データから推定したパラメータを用いて作成し、このシステムの定常状態の局所安定解析を行い、シミュレーションによりその確認を行う。その結果、2尾の魚は直線運動または円運動を行うことを示す。

2. モデル

魚群を構成している各個体を質点とみなし、水深方向の運動を無視して2次元無限空間における各個体の運動を考える。個体 i ($i=1, 2$) の質量を m_i (g)、位置および速度ベクトルをそれぞれ x_i (cm) および v_i (cm/sec) ($x_i, v_i \in R^2$) とすれば、2尾の個体の運動は、次式で表わされる。

$$\dot{x}_i = v_i \quad (1)$$

$$m_i \dot{v}_i = F_{i1} + F_{i2} \quad (2)$$

ここに、(2)の右辺の各項は個体 i に加わる力を表わす。ここではつぎのような力を考える⁶⁾。

まず F_{i1} は、個体 i が固有の速度で泳ぐための力で、前方推進力と呼ばれ、次式で表わされる。

$$F_{i1} = -a_i^1(\|v_i\| - a_i^2)(\|v_i\| - a_i^3)v_i \quad (3)$$

ここで、 $a_i^2 < a_i^3$ とし、 $\|\cdot\|$ はベクトルのユークリッドノルムを表わす。

いま、(2)の右辺が F_{i1} のみのとき、 v_i をスカラーとして(2)はつぎようになる。

$$m_i \dot{v}_i = -a_i^1(\|v_i\| - a_i^2)(\|v_i\| - a_i^3)v_i \quad (4)$$

Fig. 1 は、(4)の $v_i \dot{v}_i$ 平面の $v_i \geq 0$ の領域における解軌跡を表わす。同図より、(4)の安定平衡点は、 $a_i^1 > 0$ のとき $v_i = 0$ および a_i^3 であり、個体の運動は初期値に依存して時間とともに静止するか一定速度 a_i^3 に収束するかのどちらかになる。一方、 $a_i^1 < 0$ のときは $v_i = a_i^2$ が安定平衡点となり、個体の運動は一定速度 a_i^2 に収束する。すなわち、個体はほかの個体から影響を受けないかぎり、 $a_i^1 > 0$ のときには a_i^3 、 $a_i^1 < 0$ のときには a_i^2 の速度で遊泳する。この速度を固有速度と呼ぶ。

つぎに F_{i2} は、個体 i がほかの個体 j から受ける力で、次式で表わされる。

$$F_{i2} = b_i(r)(x_j - x_i)/r + c_i(r)(v_j - v_i) \quad (5)$$

ただし、 $r = \|x_j - x_i\|$ は2個体間の距離である。(5)の第1項は相互誘引力と呼ばれ、個体間の距離を一定に保つ作用を表わす。相互誘引力の距離 r に対する依存性を表わす関数 $b_i(r)$ には、個体が近づきすぎると $b_i(r) < 0$ となり反発力が生じること、および個体が離れると $b_i(r) > 0$ となり誘引力が働くが、離れすぎると誘引力は働かなくなることが要求される。また、(5)の第2項は成群

(a) $a_i^1 > 0$

(b) $a_i^1 < 0$

Fig. 1 Solution trajectory of (4) in the $v_i \dot{v}_i$ plane ($v_i \geq 0$)

(a) $b_i(r)$

(b) $c_i(r)$

Fig. 2 Graphs of $b_i(r)$ and $c_i(r)$

力と呼ばれ、各個体の速度を揃える作用を表わす。成群力の距離 r に対する依存性を表わす関数 $c_i(r)$ には、個体が十分離れると成群力が働かないことが要求される。よって、 $b_i(r)$ および $c_i(r)$ をつぎのように仮定する。

$$b_i(r) = \begin{cases} (k_{bi}^2 - k_{bi}^1)r/\alpha_{i1} + k_{bi}^1 & \text{for } r \leq \alpha_{i1} \\ k_{bi}^2 & \text{for } \alpha_{i1} < r \leq \alpha_2 \\ 0 & \text{for } r > \alpha_2 \end{cases} \quad (6)$$

$$c_i(r) = \begin{cases} k_{ci} & \text{for } r \leq \delta \\ 0 & \text{for } r > \delta \end{cases} \quad (7)$$

ここに、 $k_{bi}^1 < 0$, $k_{bi}^2 > 0$ および $k_{ci} > 0$ である。 $b_i(r)$ および $c_i(r)$ のグラフを Fig. 2 に示す。

3. モデルパラメータの設定

モデルには通常いくつかの未知パラメータが含まれており、その値を実験データに基づいて設定しなければならない。生態システムの場合には、利用可能なデータの量が限られているので、この作業は困難である。実際、従来提案されている多くのモデルでは、関数形は明瞭に記述されているものの、そこに含まれているパラメータ値は適当に決められており、実験データに基づいて定められているとはいえない。そのようなモデルは、現象を定量的に説明するには有用でない。

そこで著者らは、観察データを水槽実験により求めることにして、画像データを処理して得られた時系列データに基づいて最小2乗法によりパラメータ推定値を得た^{5),6),8)}。実験魚として、小型淡水魚のタイリクバラタナゴ (*Rhodeus ocellatus ocellatus*) を用いた。そのサイズは、文献5)および6)では体長3~5 cm, 平均体重2.58 gで、文献8)では体長3~8 cm, 体重2~8 gである。また、群れの個体数 N_f を2から20まで変化させて実験を行った。

本論文では、これらの水槽実験データのうち、 $N_f=2$, $N_f=3$ および $N_f=5$ の場合のそれぞれ2事例ずつのデータを用いる。これらのデータのうち、 $N_f=5$ の場合の1事例について、文献6)に前章のモデルに含まれるパラメータ値が示されている。本研究では、残りのデータについても同様の計算を行って、モデルのパラメータを決定した。

$N_f=3$ のデータは3尾の個体が群れをなしている場

合であるが、その中から任意の2尾の個体を取り出してモデルを作成することにした。 $N_f=5$ のデータについても同様の取扱いをした。その結果、 $N_f=2$ の場合の2事例、 $N_f=3$ の場合から得られる $2 \times 3 C_2 = 6$ 事例および $N_f=5$ の場合の $2 \times 5 C_2 = 20$ 事例の合計28の2個体行動モデルが得られ、それらのおおのについて4章以下に述べる解析を行った。

Table 1 は、28のうち典型的な4種類のモデルI~IVのパラメータ値を示す。典型的というのは、2個体のすべての行動パターンはこの4種類のモデルで表わされるという意味であり、以下では4種類のモデルに対する結果のみ説明し、残りの24種類のモデルの結果は紙面の都合上省略する。なお同表では、個体 $i=1$ が固有速度 ($a_1^1 < 0$ ならば a_1^2 , $a_1^3 > 0$ ならば a_1^3 で示される) のより大きい個体を表わす。

4. 1次元運動

2尾の個体の初期速度を一つの直線上に与えると、各個体に働く力 F_{11} および F_{12} もその直線上に作用し、その結果各個体の運動は1次元に制限される ($x_i, v_i \in R^1$)。いま、初期位置を、直線上で $x_1(0) - x_2(0) > 0$ となるように与え、以後2尾の個体は、一方が他方の個体を追い越すことはなくこの相対的位置関係を変えないとする。このとき、個体間距離は $r = x_1 - x_2$ となり、(1)~(3)および(5)~(7)は、つぎのように3変数 v_1, v_2 および r のシステムになる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{v}_1 &= -a_1^1(|v_1| - a_1^2)(|v_1| - a_1^3)v_1 \\ &\quad - b_1(r) + c_1(r)(v_2 - v_1) \\ m_2 \dot{v}_2 &= -a_2^1(|v_2| - a_2^2)(|v_2| - a_2^3)v_2 \\ &\quad + b_2(r) + c_2(r)(v_1 - v_2) \\ \dot{r} &= v_1 - v_2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

定常状態で、2尾の個体が同一速度 $v_1 = v_2 = \bar{v}$ となり、一定間隔 $r = \bar{r}$ で運動する場合を考える。このとき、(8)の右辺をゼロとおいた、

Table 1 Model parameters

Model	i	a_i^1 (g·sec/cm ²)	a_i^2 (cm/sec)	a_i^3 (cm/sec)	k_{bi}^1 (g·cm/sec ²)	k_{bi}^2 (g·cm/sec ²)	k_{ci} (g/sec)	α_{i1} (cm)
I	1	-0.00366	11.9	35.0	-6.20	4.20	1.57	8.47
	2	-0.00122	10.4	52.9	-6.90	4.02	1.46	8.88
II	1	-0.00275	11.0	38.4	-6.40	4.38	1.31	8.44
	2	-0.00180	10.6	46.4	-5.60	2.57	1.30	9.64
III	1	-0.00330	10.9	37.9	-4.40	3.11	1.49	8.35
	2	-0.00180	10.6	46.4	-5.60	2.57	1.30	9.64
IV	1	0.00384	7.2	16.2	-16.10	16.97	1.37	7.42
	2	-0.00181	14.8	56.2	-8.80	5.07	0.93	8.92

The other parameters are given as follows: $m_i=2.58$ (g), $\alpha_2=\delta=50$ (cm)

$$\begin{cases} -a_1(|\bar{v}| - a_1^2)(|\bar{v}| - a_1^2)\bar{v} - b_1(\bar{r}) = 0 \\ -a_2(|\bar{v}| - a_2^2)(|\bar{v}| - a_2^2)\bar{v} + b_2(\bar{r}) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

なる連立方程式の解 ($\bar{v}$, $\bar{r}$) がシステム (8) の平衡点となる。モデル I ~ IV のそれぞれについて (9) を解き、すべての平衡点を求め、その平衡点近傍で (8) を線形化して局所安定性を調べた。その結果、各モデルに対し、2 尾の個体が直線上を正および負の向きに進む状態を表わす二つの安定平衡点があることがわかった。すなわち、どちらの個体がリーダー(先頭の個体)になるかによって二つの直線運動の形態が存在した。1 次元運動の安定平衡点 P を Table 2 に示す。P の右上の添字はモデルの種類を、右下の添字はリーダーとなる個体の番号を表わす。

Table 2 より、個体の速度 $\bar{v}$ は、固有速度 (Table 1 の a_i^2 または a_i^3 の値) の値から大きく外れていないことがわかる。また、 $\bar{v}$ および個体間距離 $\bar{r}$ の値は水槽実験で得られた結果と矛盾しないこともわかる^{6),8)}。これより、モデルの設定および観測データの取得に関する一連のモデリング作業に矛盾のないことがわかる。さらに、魚の遊泳速度は毎秒当たり体長の約 2~3 倍である²⁾と見積られ²⁾、また、Partridge¹⁾によって、隣の魚との間を保つのに適した距離はほぼその魚の体長に等しいという観察結果が得られているが、Table 2 の $\bar{v}$ および $\bar{r}$ はこの知見をも反映している。これらの結果より、Table 2 で与えられるこのシステムの安定平衡点の値は、定量的にも妥当なものであると考えられる。

Table 3 は、各安定平衡点 P に対する (8) の線形化システムの固有値を示す。同表で、固有値の実部はすべて

Table 2 Stable equilibrium states in one dimensional motion

	Leader	Follower	$\bar{v}$ (cm/sec)	$\bar{r}$ (cm)
P_1^I	1	2	10.8954	5.8359
P_2^I	2	1	-11.7772	4.9493
P_1^{II}	1	2	9.5893	5.8499
P_2^{II}	2	1	-11.8096	5.5581
P_1^{III}	1	2	9.8033	6.0005
P_2^{III}	2	1	-11.6360	5.7175
P_1^{IV}	1	2	11.7757	3.8178
P_2^{IV}	2	1	-17.2245	3.7648

Table 3 Eigenvalues for each equilibrium state in one dimensional motion

P_1^I	$-0.292, -0.730 \pm 0.639 i$
P_2^I	$-0.321, -0.744 \pm 0.622 i$
P_1^{II}	$-0.241, -0.632 \pm 0.655 i$
P_2^{II}	$-0.319, -0.672 \pm 0.615 i$
P_1^{III}	$-0.283, -0.680 \pm 0.455 i$
P_2^{III}	$-0.356, -0.714 \pm 0.394 i$
P_1^{IV}	$-0.220, -0.471 \pm 1.429 i$
P_2^{IV}	$-0.462, -0.618 \pm 1.381 i$

負となっている。

5. 2次元運動

2 尾の個体の初期速度を任意に与えると、各個体の行動空間は 2 次元になる ($x_i, v_i \in R^2$)。その場合の群れの安定な定常状態を考察する。

5.1 直線運動

まず、2 尾の個体の運動を 2 次元に拡張したとき、1 次元運動で安定であった二つの平衡状態、すなわち二つの直線運動の局所安定性はどのように変わるかについて調べる。そのために、(6) および (7) はそれぞれ $r \leq a_{i1}$ および $r \leq \delta$ の場合の式を用い、(3), (5), (6), (7) を (2) に代入する。いま $x_{21} = x_1 - x_2$ とおいて個体 1 の位置ベクトルを x_{21} で表わせば、モデルの方程式は 2 次元ベクトル v_1, v_2, x_{21} および x_2 に関してつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{v}_1 &= A_1 v_1 - B_1 x_{21}/r + k_{c1}(v_2 - v_1) \\ m_2 \dot{v}_2 &= A_2 v_2 + B_2 x_{21}/r + k_{c2}(v_1 - v_2) \\ \dot{x}_{21} &= v_1 - v_2 \\ \dot{x}_2 &= v_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} A_i(V_i) &\triangleq -a_i^2(V_i - a_i^2)(V_i - a_i^2) \\ B_i(r) &\triangleq (k_{bi}^2 - k_{bi}^1)r/a_{i1} + k_{bi}^1 \\ V_i &= \|v_i\|, r = \|x_{21}\|, i=1, 2 \end{aligned}$$

Fig. 3 に示すような変数変換

$$\left. \begin{aligned} v_i &= (V_i \cos \theta_i, V_i \sin \theta_i)^T \\ x_{21} &= (r \cos \theta_r, r \sin \theta_r)^T \\ x_2 &= (R \cos \phi, R \sin \phi)^T \\ \theta_{ir} &= \theta_i - \theta_r \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

を行って (10) を書き換えると、次式を得る。

Fig. 3 Geometry of new variables

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{V}_1 &= (A_1 - k_{c1}) V_1 + k_{c1} V_2 \cos(\theta_{2r} - \theta_{1r}) \\ &\quad - B_1 \cos \theta_{1r} \\ m_2 \dot{V}_2 &= (A_2 - k_{c2}) V_2 + k_{c2} V_1 \cos(\theta_{2r} - \theta_{1r}) \\ &\quad + B_2 \cos \theta_{2r} \\ \dot{r} &= V_1 \cos \theta_{1r} - V_2 \cos \theta_{2r} \\ m_1 V_1 r \dot{\theta}_{1r} &= [B_1 r - m_1 (V_1)^2] \sin \theta_{1r} \\ &\quad + m_1 V_1 V_2 \sin \theta_{2r} + k_{c1} V_2 r \sin(\theta_{2r} - \theta_{1r}) \\ m_2 V_2 r \dot{\theta}_{2r} &= [-B_2 r - m_2 (V_2)^2] \sin \theta_{2r} \\ &\quad - m_2 V_1 V_2 \sin \theta_{1r} \\ &\quad - k_{c2} V_1 r \sin(\theta_{2r} - \theta_{1r}) \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

$$\left. \begin{aligned} r \dot{\theta}_r &= V_1 \sin \theta_{1r} - V_2 \sin \theta_{2r} \\ \dot{R} &= V_2 \cos(\theta_{2r} + \theta_r - \phi) \\ R \dot{\phi} &= V_2 \sin(\theta_{2r} + \theta_r - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

(12a)は、 $V_1, V_2, r, \theta_{1r}, \theta_{2r}$ の5変数のみを含み、残りの3変数 θ_r, R, ϕ の影響を受けないから、(12b)と分離して扱うことができる。

(12)の定常解が直線運動を表わす場合を考える。この場合は、変数 $V_1, V_2, r, \theta_{1r}, \theta_{2r}, \theta_r$ および ϕ は定数となり、 R のみが時間関数となる。そこで、変数の定常値を $V_1 = V_2 = \bar{V}, r = \bar{r}, \theta_{1r} = \theta_{2r} = \bar{\theta}$ および $\theta_r = \phi = \bar{\phi}$ と置いて、これらを(12)に代入する。(12b)の第2式を除く7個の式の右辺をゼロとおくと次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_1 \bar{V} - \bar{B}_1 \cos \bar{\theta} &= 0 \\ \bar{A}_2 \bar{V} + \bar{B}_2 \cos \bar{\theta} &= 0 \\ \bar{B}_1 \bar{r} \sin \bar{\theta} &= 0 \\ \bar{B}_2 \bar{r} \sin \bar{\theta} &= 0 \\ \bar{V} \sin \bar{\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ここに、 $\bar{A}_i \triangleq A_i(\bar{V})$ および $\bar{B}_i \triangleq B_i(\bar{r})$ である。

(13)の第3～第5式より、 $\bar{\theta} = 0$ or π (rad)が得られる。また、このときの(13)の第1および第2式は(9)にほかならず、したがって $\bar{V}$ および $\bar{r}$ としてTable 2で与えられる値(ただし、 $\bar{V} = |\bar{v}|$ とする)が得られる。また、 $\bar{\phi}$ は任意定数として定まる。さらに、(12b)の第2式の右辺が $t \rightarrow \infty$ のとき $\bar{V}$ に収束するならば、 $R = \bar{V}t + \text{const}$ になる。

これらの結果より、1次元運動で安定であった二つの直線運動は、それぞれのモデルに対して(12)の定常解となることがわかる。そこで、2尾の個体が直線運動をしているとき、各個体の速度や位置関係に注目してその運動状態の局所安定性を調べる。(12a)の安定平衡点に対して(12b)の定常解を定めることができるから、直線運動をしているときの個体の運動状態の安定性は、(12a)の平衡点の安定性に帰着される。

この平衡点の安定性を調べるために、(12a)を平衡点の近傍で線形化すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \dot{V}_1 &= [\bar{A}_1 - k_{c1} - a_1^2(2\bar{V} - a_1^2 - a_1^3)\bar{V}] V_1 \\ &\quad + k_{c1} V_2 \mp \frac{k_{b1}^2 - k_{b1}^1}{a_{11}} \bar{r} \\ m_2 \dot{V}_2 &= [\bar{A}_2 - k_{c2} - a_2^2(2\bar{V} - a_2^2 - a_2^3)\bar{V}] V_2 \\ &\quad + k_{c2} V_1 \pm \frac{k_{b2}^2 - k_{b2}^1}{a_{21}} \bar{r} \\ \dot{r} &= \pm V_1 \mp V_2 \\ m_1 \bar{V} \bar{r} \dot{\theta}_{1r} &= [\pm \bar{B}_1 \bar{r} \mp m_1(\bar{V})^2 - k_{c1} \bar{V} \bar{r}] \theta_{1r} \\ &\quad + [\pm m_1(\bar{V})^2 + k_{c1} \bar{V} \bar{r}] \theta_{2r} \\ m_2 \bar{V} \bar{r} \dot{\theta}_{2r} &= [\mp m_2(\bar{V})^2 + k_{c2} \bar{V} \bar{r}] \theta_{1r} \\ &\quad + [\mp \bar{B}_2 \bar{r} \pm m_2(\bar{V})^2 - k_{c2} \bar{V} \bar{r}] \theta_{2r} \end{aligned} \right\} \quad (14a)$$

上の2式で、複号は同順にとるものとする。ここに、上側の符号は個体1がリーダー、下側の符号は個体2がリーダーの場合である。(14)より、(12a)を線形化すると、変数 V_1, V_2, r と θ_{1r}, θ_{2r} は分離できることがわかる。(14a)は1次元運動における直線運動に対する線形化式なので(ただし、 $\bar{V} = |\bar{v}|$ とする)、この部分から得られる結果は前章の結果がそのまま成り立つ。よって、2次元運動における直線運動の安定性は(14b)の安定性を考えればよい。

Table 4は、システム(14b)の固有値を示す。同表より、固有値の実部がすべて負である平衡点 P_1^I, P_2^I, P_1^{II} および P_2^{II} が安定となる。すなわち、モデルIおよびIIでは一つの、IIIでは二つの直線運動が安定となり、IVではどちらの直線運動も不安定となる。ただし、モデルIでは固有速度の大きい個体がリーダーであり、モデルIIでは固有速度の小さい個体がリーダーである運動が安定である。また、 P_1^{III} の実固有値の一つは非常に小さな値であり、この平衡点に対応する直線運動は安定限界に近い状態である。

5.2 円運動

実際の魚はいけすや水槽内において円運動を行う場合があり、円の中心に近い個体ほどゆっくりと、遠い個体ほど速く泳ぎ、全体としては等角速度で泳ぐのが観察される²⁾。そこで、このような円運動が(12)のシステムの安定な定常状態として存在し得るかどうかを考察する。

円運動の場合には、直線運動の場合とは異なり V_1 と

Table 4 Eigenvalues for the system (14b)

P_1^I	-1.087, -6.323×10^{-2}
P_2^I	-1.245, 4.776×10^{-2}
P_1^{II}	-0.948, 5.715×10^{-3}
P_2^{II}	-1.051, -1.312×10^{-2}
P_1^{III}	-1.021, -3.442×10^{-4}
P_2^{III}	-1.107, -2.419×10^{-2}
P_1^{IV}	-1.018, 0.251
P_2^{IV}	-1.141, 0.168

V_2 および θ_r と θ_{2r} は等しくなく θ_r と ϕ も一致しない。(12)に含まれる各変数の定常値を、変数に $-$ を付して表わす。定常値 $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$, $\bar{\theta}_{1r}$, $\bar{\theta}_{2r}$ および $\bar{r}$ は、(12 a)の右辺をゼロとおくことにより定められる。ただし、その数値は数値計算によって求められる。

一方、定常状態では R は定数 $\bar{R}$ となるが、 θ_r および ϕ は時間関数になる。これらの定常解は、(12 b)より定められる。まず、(12 b)の第2式の右辺をゼロとおくことにより、次式が得られる。

$$\bar{\theta}_{2r} + \theta_r - \phi = \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

このとき、(12 b)の第3式はつぎようになる。

$$\phi = \frac{\bar{V}_2}{\bar{R}} \quad (16)$$

また、(12 b)の第1式はつぎようになる。

$$\dot{\theta}_r = \frac{\bar{V}_1 \sin \bar{\theta}_{1r} - \bar{V}_2 \sin \bar{\theta}_{2r}}{\bar{r}} \quad (17)$$

(15)の両辺を時間で微分することにより

$$\dot{\theta}_r = \dot{\phi} \quad (18)$$

となるから、(16)～(18)より円運動の半径として、次式を得る。

$$\bar{R} = \frac{\bar{r} \bar{V}_2}{\bar{V}_1 \sin \bar{\theta}_{1r} - \bar{V}_2 \sin \bar{\theta}_{2r}} \quad (19)$$

したがって、(12 a)が安定平衡点をもつならば、 $t \rightarrow \infty$ のとき(16)および(17)の右辺は定数となり、 ϕ および θ_r は時間 t の一次関数となる。また、 $\bar{R}$ は(19)で与えられる定数となる。よって、この場合も(12 a)の平衡点の安定性により円運動の安定性を論じることができる。

Table 5 は、各モデルに対して得られた円運動の場合の定常値を示す。モデル I および II に対して、円運動を表わす平衡点は(12 a)には存在しなかった。一方、直線運動が二つとも安定なモデル III および二つとも不安定なモデル IV に対して、一つずつ平衡点 Q が同表のように求められた。これらの平衡点近傍での線形化システムの固有値は **Table 6** のようになり、円運動はモデル III では不安定、モデル IV では安定となった。

Table 4 および Table 6 より、不安定な平衡点の近傍

Table 5 Equilibrium states in circular motion

	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	$\bar{r}$	$\bar{\theta}_{1r}$	$\bar{\theta}_{2r}$	$\bar{R}$
Q^{III}	9.8175	9.8132	5.9938	0.1581	0.1553	2148.16
Q^{IV}	15.1406	14.8868	4.1542	1.5122	1.5112	243.27

Table 6 Eigenvalues for each equilibrium state in circular motion

Q^{III}	$-0.283, -0.673 \pm 0.461 i, -1.038, 6.750 \times 10^{-4}$
Q^{IV}	$-0.442 \pm 1.464 i, -1.226, -0.119 \pm 0.204 i$

Table 7 Number of equilibrium states for each model

Model	Rectilinear motion		Circular motion	
	Stable	Unstable	Stable	Unstable
I	1 *	1	0	0
II	1 **	1	0	0
III	2	0	0	1
IV	0	2	1	0

Notes * : The leader is the individual with faster characteristic velocity.

** : The leader is the individual with slower characteristic velocity.

の状態は、一つの正の実固有値に対する固有ベクトルの方向に沿って離れていき、ほかの安定な平衡状態へ向かう。

Table 7 は、直線運動および円運動を含めて(12 a)のシステムの平衡状態を、各モデルについてまとめたものである。同表より、モデル I, II および IV の場合には、安定な平衡状態は唯一つ存在することがわかる。しかし、モデル III の場合には、二つの直線運動が安定な平衡状態として存在する。

著者らが行った水槽実験データより作成された 28 例のモデルを、同表の 4 種類のモデルに分類するとつぎのようになった。

モデル I	24 例
モデル II	1 例
モデル III	2 例
モデル IV	1 例

これより、2 尾の個体を 2 次元無限空間に泳がせた場合、固有速度の大きい個体がリーダーとなり固有速度の小さい個体がフォロワとなって、直線運動を行う現象が最も多く見られるということが推定される。

6. シミュレーション

以上の結果をふまえて、シミュレーションを行った。数値計算には刻み 0.1 sec の 4 次ルンゲ・クッタ法を(1)、(2)に使い、初期値は適当な状態空間内でランダムに与えた。**Fig. 4** に、モデル I～III の場合の安定な直線運動の定常状態での 2 尾の位置関係を示す。太い部分が魚の頭部を、尖った部分が尾を表わす。モデル I および II には、一つの安定な直線運動があり、種々の初期値に対して 2 尾の遊泳は速やかにその直線運動に収束した。

モデル III には、二つの安定な直線運動があり、状態空間においてそれぞれの引込領域をもつ。いま、初期値を P^{III} の近傍に選び、

$$x_1(0) = (6.0005, \eta)^T, \quad v_1(0) = (9.8033, 0)^T$$

$$x_2(0) = (0, 0)^T, \quad v_2(0) = (9.8033, 0)^T$$

のように与えたとき、種々の η の値に対する遊泳軌跡は

Fig. 4 Positions of two individuals at steady state for rectilinear motion

Fig. 5 のようになった。2尾の軌跡はこの図では重なっており1本の曲線で示されている。同図(a)は P_1^{III} へ、(c)は P_2^{III} へ収束する場合で、その境界を初期値とすれば、2尾の遊泳軌跡は(b)に示すような円となった。

モデルIVでは、直線運動はすべて不安定であり、2尾は、互いに相手との距離と角度を一定を保ちながら、横に並んで円運動をする。Fig. 6(a)に2尾の位置関係を、Fig. 6(b)に2尾の遊泳軌跡を示す。また、種々の初期値に対して、円運動への収束は速やかである。

7. 安定性に及ぼす固有速度の影響

個体の固有速度は、速度を揃えるという群れ全体の秩序に反するという意味で個体の利己的性格を表わすパラメータであり、群れ行動に大きな影響を与えと考えられる。そこで、ほかのパラメータは固定したままで、固有速度のみを変化させたときの2尾の運動状態の変化を考える。いま、モデルI～IVにおける個体 i ($i=1, 2$) の固有速度を v_i とすると ($v_1 > v_2$)、それを次式のように変化させる。

$$\left. \begin{aligned} v_1' &= \frac{v_1 + v_2}{2} + \mu \frac{v_1 - v_2}{2} \\ v_2' &= \frac{v_1 + v_2}{2} - \mu \frac{v_1 - v_2}{2} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 μ は可変パラメータで、 $-2 \leq \mu \leq 2$ の範囲で変化させる。

Fig. 7(a)および(b)は、それぞれモデルIの直線運動を表わす平衡点、 P_1^I (安定) および P_2^I (不安定) に対する

Fig. 5 Trajectories of two individuals for Model III

Fig. 6 Circular motion for Model IV

固有値の実部の変化を示す。同図で、 $\mu = \mu_1^c \approx 0.0161$ および $\mu = \mu_2^c \approx 0.3296$ のときそれぞれ P_1^I および P_2^I の一つの実固有値の符号が変わる、すなわち安定性が変化する。したがって、 $\mu_2^c < \mu \leq 2$ のとき P_1^I は安定で P_2^I は不安定 (モデルI型)、 $\mu_1^c < \mu < \mu_2^c$ のとき P_1^I, P_2^I はともに安定 (モデルIII型)、 $0 < \mu < \mu_1^c$ のとき P_1^I は不安定で P_2^I は安定 (モデルII型) となる。すなわち、2個体の固有速度の差が顕著なとき (換言すれば、2個体の体長の差が大きいと

(a) P_1^I (b) P_2^I Fig. 7 Influence of μ on the real parts of eigenvalues for Model I

—: real eigenvalue
 —: real part of conjugate complex eigenvalues

き)は、大きい固有速度の個体のみがリーダーとなって直線運動をするが、固有速度の差がしだいに小さくなるにつれて、どちらの個体もリーダーとなり得る状態が存在し、さらに小さい固有速度の個体のみがリーダーとなる運動が実現する。

また Fig. 8(a), (b), (c)に、それぞれモデルIVの不安定直線運動を表わす平衡点 P_1^{IV} , P_2^{IV} , 安定円運動を表わす平衡点 Q^{IV} に対する固有値の実部の変化を示す。同図(a)および(b)より、 $-2 \leq \mu \leq 2$ の範囲で P_1^{IV} は不安定であり、 $\mu = \mu_2^c \approx -0.5173$ のとき P_2^{IV} の一つの実固有値の符号が変わり、 $\mu_2^c < \mu \leq 2$ の範囲では P_1^{IV} , P_2^{IV} の二つの直線運動はともに不安定となる。一方同図(c)より、 $\mu_2^c < \mu \leq 2$ のときには、 Q^{IV} が安定な円運動を表わす平衡点として存在する。したがって、円運動は直線運動が不安定で実現できない場合に2個体がとり得る行動パターンであるといえる。

8. おわりに

2尾の魚の行動を表わすモデルを水槽実験データを基にして4種類作成し、各システムの定常状態の安定性と2次元無限空間における魚群行動の関係について考察した。その結果、3種類のモデルI～IIIでは、直線運動が安

(a) P_1^{IV} (b) P_2^{IV} (c) Q^{IV} Fig. 8 Influence of μ on the real parts of eigenvalues for Model IV

—: real eigenvalue
 —: real part of conjugate complex eigenvalues

定な定常状態であり、モデルIVでは直線運動は不安定となり、その代わりに円運動が安定な定常状態となった。

また、この4種類のモデルによって、2個体の運動として考え得るすべての状態を実現することができた。その中で最も自然な状態は、固有速度の大きい個体がリーダーとなる直線運動(モデルI)であると思われる。実際、水槽実験データから構成された28事例のうち、24事例がモデルIに相当した。

本論文では2個体の運動を考察したが、今後の課題としてより多くの個体からなる魚群行動モデルを解析する必要がある。著者らのこれまでのシミュレーション結果^{8),9)}によれば、個体数が増えると複雑なふるまいが見

られるので、モデルを解析することによりその現象を定性的に確認することが望まれる。

なお、本研究は文部省科学研究費補助金一般研究C 06650442の援助のもとで行われたことを付記する。

参 考 文 献

- 1) B. L. Partridge(今福訳): 魚はどのように群れを作るのか, 日経サイエンス社 (1984)
- 2) 井上 実: 魚の行動と漁法, 恒星社厚生閣, 188/204 (1978)
- 3) 三宮, 松田: 魚群の行動のモデリング, 計測と制御, **19**-7, 704/707 (1980)
- 4) N. Sannomiya and K. Matuda: A Mathematical Model of Fish Behavior in a Water Tank, IEEE Trans., **SMC-14**-1, 157/162 (1984)
- 5) 三宮, 中峯, 岩崎: 魚群行動を表す物理モデルの妥当性の検討, システム制御情報学会論文誌, **3**-1, 14/20 (1990)
- 6) 三宮, 島田, 中峯: 魚群行動における自律分散機構のモデリング, 計測自動制御学会論文集, **29**-2, 211/219 (1993)
- 7) M. A. Doustari and N. Sannomiya: A Simulation Study on Schooling Mechanism in Fish Behavior, Trans. of ISCIE, **5**-12, 521/523 (1992)
- 8) M. A. Doustari and N. Sannomiya: Autonomous

Decentralized Mechanism in Fish Behavior Model, Proc. of Int. Symp. on Autonomous Decentralized Systems, 414/420 (1993)

- 9) M. A. Doustari and N. Sannomiya: How does Fish School Change Form?—A Hypothesis from Simulation Study, Trans. of SICE, **29**-12, 1388/1390 (1993)

[著 者 紹 介]

三 宮 信 夫 (正会員)

(Vol. 31, No. 5 参照)

長 野 耕 治 (正会員)

1993年, 京都工芸繊維大学大学院博士前期課程入学(電子情報工学専攻), 現在に至る。システムのモデリングに関する研究に従事。システム制御情報学会の会員。