イグザクトモデルマッチング制御とその倒立振り子系への応用†

中野和司*・内田主幹*

江口三代一*・中原一夫*

Exact Model Matching Control and Its Application to Inverted Pendulum System

Kazushi NAKANO*, Motomiki UCHIDA*, Miyoichi EGUCHI*
and Kazuo NAKAHARA*

Extensions of the results of the model reference adaptive control to nonlinear systems have rarely been achieved. For this purpose, an alternative method of exact model matching (EMM), based on a kind of simulator called "dynamic network" which assigns any damping characteristics, is presented for a class of nonlinear mechanical systems. This approach is extended to the case of inverted pendulum system with no matching conditions.

Key Words: exact model matching, matching condition, nonlinear mechanical systems, inverted pendulum, dynamic network

1. はじめに

最近、非線形システム、特にメカニカルシステムに対する適応制御の重要性が認識され研究が進められているが、ある種のマッチング条件の成立が前提となっており適用が限定されているのが現状である¹⁾。

著者らは、非線形メカニカルシステムに対する適応制御設計の前段階として、物理パラメータが既知という条件下で、所望のダンピング特性をもたせることができるある種のシミュレータ(これを、ダイナミックネットワークと呼ぶ)に基づくイグザクトモデルマッチング(EMM)制御の一方法を提案し、その応用として具体的に倒立振り子系を取り上げた²⁾。これは EMM のための非線形制御信号を、ダイナミックネットワークにより合成する方法であり、これをさらに台車の位置制御を考慮するために制限付きの EMM 制御に拡張した^{3),4)}。本論文では、台車の位置指定をも可能にする新たな設計法⁵⁾を提案し、本手法の有効性をシミュレーション実験により確認する。

2. メカニカルシステムの EMM 制御

未知の定数パラメータベクトル γ を含む非線形メカ

ニカルシステム(たとえば、倒立振り子やマニピュレータ)のダイナミックモデルは、一般に次式によって記述される。

$$M(z, \gamma)\ddot{z} + h(z, \dot{z}, \gamma) - \Gamma(\gamma)\dot{z} + g(z, \gamma) = G_0 u \quad (1)$$

z = “被制御変数ベクトル” ($n \times 1$)

u = “駆動一般化力” ($n \times 1$)

G_0 = “駆動伝達行列” ($n \times 1$)

$M(z, \gamma)$ = “慣性行列” ($n \times n$)

$h(z, \dot{z}, \gamma)$ = “遠心力およびコリオリ力” ($n \times 1$)

$\Gamma(\gamma)$: “粘性摩擦行列” ($n \times n$)

$g(z, \gamma)$ = “重力ベクトル” ($n \times 1$)

ここで考える EMM 制御問題、あるいはモデルフォロ잉制御(MFC)問題とは、(1)式のようなメカニカルシステムに対して、その物理パラメータがすべて既知という仮定の下で観測出力 $y(t)$ を規範モデル出力 $y_r(t)$ に漸近的に合致させる制御則を設計することである。

(1)式が

$$\ddot{z} = A(\dot{z}, z, \gamma) + B(z, \gamma)u \quad (1)'$$

とかける場合を考える。このとき出力 $y(t)$ は観測可能な $z(t)$ と等しいから、相対次数を考慮して

$$(s + \lambda)^2 y(t) = A(\dot{y}, y, \gamma) + B(y, \gamma)u(t) + 2\lambda \dot{y}(t) + \lambda^2 y(t) \quad (s \equiv d/dt)$$

より

$$u(t) = -B^{-1}(t)\{A(\dot{y}, y, \gamma) + 2\lambda \dot{y}(t) + \lambda^2 y(t) - (s + \lambda)^2 y(t)\} \quad (2)$$

を得る。ただし、 $B(t) \equiv B(y, \gamma)$ であり、 $\det B(t) \neq 0(t)$

† 第13回計測自動制御学会九州支部学術講演会で発表(1994・11)

* 福岡工業大学 福岡市東区和白東 3-30-1

* Fukuoka Institute of Technology, Fukuoka
(Received January 26, 1995)
(Revised April 10, 1995)

Fig. 1 Conceptual diagram of dynamic-network-based EMM control

$\in [0, \infty)$ とする (これをマッチング条件ということにする)。

いま, EMM の目的を達成させるために, 規範モデル出力 $y_r(t)$ を導入し

$$u(t) = -B^{-1}(t) \{ A(\dot{y}, y, \gamma) + 2\lambda \dot{y}(t) + \lambda^2 y(t) - (s + \lambda)^2 y_r(t) \} \quad (3)$$

なる制御則を用いるとする。これを (2) 式と連立させれば

$$(s + \lambda)^2 \epsilon(t) = 0, \epsilon(t) \equiv y(t) - y_r(t) \quad (4)$$

が成り立ち, $(s + \lambda)^2$ が安定多項式であるとすれば

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0 \quad (5)$$

となることがわかる。

この制御方法は, 線形システムに対する MFC⁹⁾ の非線形システムへの一つの拡張であり, 出力の微分情報は要るが, つぎの 2 点で優れている。(i) Fig. 1 の破線で示すダイナミックネットワークによって (3) 式の右辺における全信号が容易に合成できる。(ii) 要求されるダンピング特性は安定多項式 $(s + \lambda)^2$ によって任意に指定できる。

3. 倒立振り子系への EMM 制御の適用

3.1 マッチング条件と制御目標式

提案した EMM 制御が実際のシステムに有効か否かを調べるため, Fig. 2 のような倒立振り子系へ適用することを考える。

この系の運動方程式は次式のようにかけられる。

$$(M + m)\ddot{x} + ml \cos \theta \cdot \ddot{\theta} - ml \sin \theta \cdot \dot{\theta}^2 + D_x \dot{x} = G_0 u \quad (6)$$

$$ml \cos \theta \cdot \ddot{x} + (ml^2 + J)\ddot{\theta} - ml \sin \theta \cdot g + D_\theta \dot{\theta} = 0 \quad (7)$$

Fig. 2 Inverted pendulum system

振子のみの制御問題 (たとえば, 振り上げ制御問題) の場合には

$$(s + \lambda)^2 \epsilon(t) = 0, \epsilon(t) \equiv \theta(t) - \theta_r(t) \quad (8)$$

により容易に非線形状態フィードバック制御が実現できる。しかし, 倒立振り子のような一入力系ではマッチング条件が成り立たず, 台車の位置制御ができないので位置に関するフィードバックループを形成するなどの必要がある³⁾。そこで, 入出力数が一致しない (つまり $B(t)$ が非正則) の場合にも適用できるように, (8) 式の制御目標式——これを満足するように制御則を決める——を変更することを考える。すなわち (4) 式を一般化して

$$\begin{bmatrix} \beta_1(s + \lambda_1)^2 & 0 \\ & \ddots \\ 0 & \beta_n(s + \lambda_n)^2 \end{bmatrix} \epsilon(t) = 0 \quad (9)$$

($\beta_1, \dots, \beta_n > 0$)

とし, $t \rightarrow \infty$ で $\epsilon(t) \rightarrow 0$ となる等価な条件として, (9) 式のノルム評価を導入する。

実際の倒立振り子の場合の制御目標式として, 追従誤差の絶対値^(注1)をとった次式を考える。

$$\beta_1(s + \lambda_1)^2 |\theta(t) - \theta_r(t)| + \beta_2(s + \lambda_2)^2 |x(t) - x_r(t)| = 0 \quad (10)$$

上式において, $s \rightarrow 0$ では

$$\beta_1 \lambda_1^2 |\theta(t) - \theta_r(t)| + \beta_2 \lambda_2^2 |x(t) - x_r(t)| = 0 \quad (11)$$

となり

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta(t) - \theta_r(t)\} = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} \{x(t) - x_r(t)\} = 0 \quad (12)$$

となる。よって, 振り子, 台車とも最終的には目標値に収束する。過渡状態では (11) 式は下式に等しい。

(注1) ノルムとして絶対値をとるのは制御則の導出が容易になるためである。

Fig. 3 Simulation result of EMM control for inverted pendulum

$$\begin{aligned} & \text{sgn}\{\theta(t) - \theta_r(t)\} \cdot \beta_1(s + \lambda_1)^2 \{\theta(t) - \theta_r(t)\} \\ & + \text{sgn}\{x(t) - x_r(t)\} \cdot \beta_2(s + \lambda_2)^2 \{x(t) - x_r(t)\} = 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} & \text{sgn}\{\theta(t) - \theta_r(t)\} \cdot \beta_1[(s + \lambda_1)^2 \{\theta(t) - \theta_r(t)\} \\ & - b_\theta(t)u(t)] + \text{sgn}\{x(t) - x_r(t)\} \cdot \beta_2[(s + \lambda_2)^2 \\ & \times \{x(t) - x_r(t)\} - b_x(t)u(t)] \\ & = -\text{sgn}\{\theta(t) - \theta_r(t)\} \beta_1 b_\theta(t)u(t) \\ & - \text{sgn}\{x(t) - x_r(t)\} \beta_2 b_x(t)u(t) \end{aligned}$$

となる。ただし

$$b_\theta(t) \equiv \frac{\partial \ddot{\theta}(t)}{\partial u(t)} = -\frac{a_1(t)G_0}{a_3a_4 - a_1(t)^2}$$

$$b_x(t) \equiv \frac{\partial \ddot{x}(t)}{\partial u(t)} = \frac{a_4G_0}{a_3a_4 - a_1(t)^2}$$

$$a_1(t) = ml \cos \theta(t), a_2(t) = ml \sin \theta(t)$$

$$a_3 = M + m, a_4 = J + ml^2$$

である。上式より、制御則はつぎようになる。

$$\begin{aligned} u(t) = & -[\text{sgn}\{\theta(t) - \theta_r(t)\} \beta_1 b_\theta(t) + \text{sgn}\{x(t) \\ & - x_r(t)\} \beta_2 b_x(t)]^{-1} [\text{sgn}\{\theta(t) - \theta_r(t)\} \beta_1 \{(s \\ & + \lambda_1)^2 \{\theta(t) - \theta_r(t)\} - b_\theta(t)u(t)\} \\ & + \text{sgn}\{x(t) - x_r(t)\} \beta_2 \{(s + \lambda_2)^2 \\ & \times \{x(t) - x_r(t)\} - b_x(t)u(t)\}]^{(2)} \quad (13) \end{aligned}$$

3.2 規範モデルと制御シミュレーション

振りおよび台車の規範出力は、それぞれつぎのような関数形で与えられるとする。

$$\begin{aligned} \theta_r(t) = & \theta_1 e^{-\sigma_1 t} \sin \omega t + \theta_2 e^{-\sigma_1 t} \cos \omega t \\ & + \theta_3 e^{-\sigma_2 t} + \theta_4 t e^{-\sigma_2 t} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_r(t) = & x_1 e^{-\sigma_1 t} \sin \omega t + x_2 e^{-\sigma_1 t} \cos \omega t \\ & + x_3 e^{-\sigma_2 t} + x_4 t e^{-\sigma_2 t} \quad (15) \end{aligned}$$

$t=0$ のときつぎようになる。

$$\theta_r(0) = \theta_2 + \theta_3$$

$$\dot{\theta}_r(0) = \omega \theta_1 - \sigma_1 \theta_2 - \sigma_2 \theta_3 + \theta_4$$

$$x_r(0) = x_2 + x_3$$

$$\dot{x}_r(0) = \omega x_1 - \sigma_1 x_2 - \sigma_1 x_3 - \sigma_2 x_3 + x_4$$

また、(14)、(15)式を解として、線形化した振子の運動方程式にこれらを代入すると、つぎの式が成り立つ。

Fig. 4 Simulation result of EMM control for cart

$$\begin{aligned} & e^{-\sigma_1 t} \sin \omega t [\{\alpha_4(\sigma_1^2 - \omega^2) - mlg - D_\theta \sigma_1\} \theta_1 \\ & + \omega(2\alpha_4 \sigma_1 - D_\theta) \theta_2 + ml(\sigma_1^2 - \omega^2)x_1 + 2ml\omega \sigma_1 x_2] \\ & + e^{-\sigma_1 t} \cos \omega t [(D_\theta \omega - 2\alpha_4 \omega \sigma_1) \theta_1 + \{-mlg - D_\theta \sigma_1 \\ & - \alpha_4(\omega^2 - \sigma_1^2)\} \theta_2 - 2ml\omega \sigma_1 x_1 + ml(\sigma_1^2 - \omega^2)x_2] \\ & + e^{-\sigma_2 t} [\{\sigma_2^2 \alpha_4 - \sigma_2 D_\theta - mlg\} \theta_3 + (D_\theta - 2\alpha_4 \sigma_2) \theta_4 \\ & + ml\sigma_2^2 x_3 - 2ml\sigma_2 x_4] \\ & + te^{-\sigma_2 t} [\{\alpha_4 \sigma_2^2 - mlg - D_\theta \sigma_2\} \theta_4 + ml\sigma_2^2 x_4] = 0 \end{aligned}$$

上式は $\theta_i, x_i (i=1, 2, 3, 4)$ に関する線形方程式であるから、これら八つのパラメータが一意に定まる。

シミュレーションによる振りと台車の制御結果を Fig. 3, 4 に示す。ただし、 $\beta_1=0.7, \beta_2=1, \lambda_1=5, \lambda_2=15$ としている。振り、台車とも(14)、(15)式で与えた規範モデル ($\sigma_1=\sigma_2=2, \omega=5$) にほぼ正確に追従しており、所期の目的が達成されている。

4. おわりに

本論文では、非線形システムに対して適用しうる EMM 制御の新しいアプローチを提案し、その有効性をシミュレーション実験により確認した。マッチング条件が成立しない倒立振子の場合でも、振りおよび台車の規範モデルへの追従性が明らかになった。

参考文献

- 1) 大須賀公一：非線形系の適応制御，コンピュータール，32, 52/58 (1990)
- 2) 内田，中野，ほか：予測値演算回路網による倒立振子の適応制御，電気学会論文誌，111-D-3, 221/229 (1991)
- 3) Y. Toyota, K. Nakano, et al.: Computing-Predictor-Network-based Exact Model Matching and Identification for a Class of Nonlinear Mechanical Systems, Proc. Int. Conf. Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation, 3, 1246/1251 (1992)
- 4) 中野，江口，ほか：ダイナミックシミュレータによる非線形メカニカルシステムの実用的 EMM 制御，第 22 回制御理論シンポジウム資料，103/108 (1993)
- 5) 中野，内田，ほか：非線形メカニカルシステムの EMM 制御とその応用，第 13 回 SICE 九州支部学術講演会，23/26 (1994)
- 6) 新 誠一：適応制御，数理学，No. 255, 41/46 (1984)

(注 2) 右辺に入力項 $u(t)$ が残っているがこれは表現上の問題で実際には消去される。