H_∞ 最適化を利用したある種の非最小位相制御対象 に対する制御装置の設計†

川 邊 武 俊*・北 森 俊 行**・松 村 利 夫*

Controller Design for a Kind of Nonminimum Phase Systems Using H_∞ Optimization

Taketoshi KAWABE*, Toshiyuki KITAMORI** and Toshio MATSUMURA*

Here the controller design method for a kind of nonminimum phase systems which sometimes appear in controller design problems for automobiles, aircrafts, or large scale systems is considered. In these cases a unstable zero which locates near the origin may limit the performance of the controlled system. Especially it is concerned that the proposed controller design method is such a one that the available closed loop performance is easy to see for a designer when he knows the location of the unstable zero. In the proposed method, the performance, disturbance attenuation, robustness and the location of the closed loop poles are taken account through loop-transfer function gain shaping with the classical stability margin concept. To do so, the framework of H_∞ mixed sensitivity problem is used and how to choose the frequency weights is proposed. This method can be applied to servo system design or plants having poles on the imaginary axis. And also undesirable pole-zero cancellation coming from the mixed sensitivity problem is prevented by proposed frequency weights choice.

Key Words: nonminimum phase system, H_∞ control, frequency shaping, pole-zero cancellation, mixed sensitivity problem

1. はじめに

ある種の非最小位相制御対象に対する制御装置の設計を考える。制御装置の設計では、設計者はまず制御対象と制御仕様とを与えられ、制御対象の性質に由来する制約条件と制御仕様に由来する制約条件とを考慮し、時として相反する制約条件相互の妥協をとりながら制御装置の設計パラメータを決定する。制御装置の設計法に求められることとして、どの設計パラメータをどのように変更すれば安定余裕、交差周波数等制御系の特性値がどう変化するかが設計者にわかりやすいこと、制御対象の性質に由来する制約条件が設計パラメータの制約条件として反映されること、がある。また、設計法を実機に対し

て応用するには、設計に必要な先験情報は入手可能なものでなくてはならない。

提案する方法では、制御系の特性が設計者に把握しやすいということで、一巡伝達関数の整形を考える。一巡伝達関数の整形手法として、感度 S と相補感度 T とを評価する H_∞ 混合感度問題 (S - T 混合感度問題と呼ぶ) を用いる。ここで使う混合感度問題の性質は、設計パラメータである周波数重みを一巡伝達関数の特性値と関連づけることができること、解が得られた場合には内部安定性が自動的に満足されることである。

混合感度問題に限らず H_∞ 最適化で制御系を設計する場合、制御系の性能は設計に用いる周波数重みで決まるが周波数重みの与え方については現状では実用的な指針がない。たとえば小ゲイン定理を基にロバスト安定性を保証する重み付けの方法がよく推奨されるが¹⁾、この方法で必要とされる制御対象の不確かさに関する情報は現状では実機に対しては得られないことが多い。このような場合には、古典的な基準や経験則を基に、安定余裕を考慮して制御系をロバストにせざるをえない。そこで安定余裕に関する設計パラメータを周波数重みに導入する

† 日本機械学会第3回「運動と振動の制御」シンポジウムで発表 (1993・7)

* 日産自動車(株) 横須賀市夏島1

** 法政大学工学部 小金井市梶野町3-7-2

* NISSAN MOTOR Co., LTD, Yokosuka

** Faculty of Engineering, Hosei University, Koganei
(Received October 12, 1994)
(Revised January 26, 1995)

ことを考える。安定余裕はつぎに述べるように非最小位相系の制御装置設計では重要な特性値であると考えられる。

制御対象の性質に由来する制約条件として、非最小位相制御対象では Waterbed 効果といわれる性質があらわれ²⁾⁻⁴⁾、感度を小さくすればするほど、または低感度化する周波数領域を広くとればするほど、感度のゲインのピーク値が大きくなる。感度のゲインのピーク値は、実は安定余裕を表わし、感度のゲインのピーク値が大きいとピーク周波数付近で外乱の影響が大きくなるほか、安定余裕(ゲイン余裕および位相余裕)が減少して好ましくない。そこで、Waterbed 効果による低感度化と安定余裕のトレードオフ関係を周波数重みのパラメータ決定に反映することを考える。

H_∞ 混合感度問題を使うとき、周波数重みが不適切だと制御装置と制御対象の間の極ゼロ相殺が起こる^{5),6)}。安定でも減衰の低いモードで極ゼロ相殺がある制御系は、ロバスト性が低く、しかも耐外乱性が悪い。極ゼロ相殺が起こらない方法として S と KS の H_∞ 混合感度問題において文献 1), 7) の方法が提案されている。ここではこれらの結果を用いて、感度と相補感度の混合感度問題において部分的な極配置が可能であり、選択的な極ゼロ相殺を考慮した周波数重みを用いる。

提案する方法では目標値応答特性を考慮しないが、目標値応答特性が仕様を満たさないときは、前置補償器を追加して 2 自由度制御系を構成する方法が可能である。制御対象の不安定ゼロ点を補償器の極で打ち消すことはできないので前置補償器の設計では工夫が必要となるが、このようなとき文献 8) の方法を応用することができる。

ここでは以下制御対象がある種の非最小位相系である場合に絞って制御装置の設計を考える。2 章では扱う非最小位相系のクラスについて説明する。3 章で具体的な設計法を展開し、4 章で四輪操舵車を使って設計例を示す。5 章はまとめとする。

つぎの記号を用いる。

P : 制御対象

K : 制御装置

S : 感度 $(= (1 + PK)^{-1})$

T : 相補感度 $(= (1 + PK)^{-1}PK)$

W_s : S の周波数重み

W_T : T の周波数重み

z_1 : 制御対象の不安定ゼロ点

RH_∞ : プロパーかつ安定な伝達関数の集合

ω : 角周波数

j : 虚数単位

2. あつかう非最小位相制御対象のクラス

ここでは 1 入力 1 出力で実軸上に 1 個の不安定ゼロ点をもつ非最小位相制御対象をあつかう。符号を異にする二つのモードの和として伝達関数が表わされるとき、実軸上に 1 個の不安定ゼロ点が現れることがある。このような制御対象はステップ入力に対し逆応答を生じる。ここで扱う非最小位相制御対象の例としては

- ・四輪操舵車：後輪舵角から重心点横加速度への伝達関数⁹⁾。
- ・飛行機：昇降舵から前進速度への伝達関数、方向舵からローリング角への伝達関数⁹⁾。
- ・双翼操舵式飛翔体：舵角から垂直加速度への伝達関数¹⁰⁾。
- ・Hubble 望遠鏡(宇宙柔軟構造物)：制御力から変位への伝達関数¹¹⁾。

がある。ここで扱う非最小位相系は数学的に限られたクラスであるが、以上例をあげるように工学的には数多く、応用例があると考えられる。

3. 制御装置の設計

3.1 考慮する制約条件

制御仕様からの制約としてつぎの項目を考える。

- ・ロバスト性

制御対象にある範囲の変動が起こっても安定性が崩れない。制御対象にある範囲の変動が起こっても閉ループ系の応答特性がある範囲内でしか変化しない。

- ・耐外乱性

制御量が外乱の影響を受けにくい。外乱の影響が速くおさまる。

対応する制御系の性質として以下を考える。

1. 制御バンド外、モデル化誤差が問題になる周波数帯域で、一巡伝達関数ゲインが小さい、あるいは安定余裕が大きい。
2. 制御バンド内で一巡伝達関数ゲインが十分大きい。
3. 制御対象がある範囲で変動しても一巡伝達関数の変化が少ない。
4. 閉ループ系の減衰特性がよい。

制御対象と制御装置の間で減衰の低いモードの極ゼロ相殺があると、共振周波数の変化で一巡伝達関数の変化が起こりやすい。また、このような極ゼロ相殺があるとき閉ループの減衰特性は悪くなる。そこで、ここでは 3. 項と 4. 項をまとめて

減衰が低いモードで制御対象と制御装置とが極ゼロ

相殺しないこと。

と考える。

制御対象の性質に由来する制約として

1. 制御対象の不安定ゼロ点 (Waterbed 効果)
2. 振動的な極
3. 非モデル化ダイナミクス

を考える。

これらの制約条件に対し以下の方法で制御装置を設計する。

3.2 一巡伝達関数の整形

3.2.1 混合感度問題の重みの選択

Fig. 1 の一般化プラントで表わされる H_∞ 混合感度問題

$$J = \left\| \begin{bmatrix} W_T T \\ W_S S \end{bmatrix} \right\|_\infty < 1 \quad (1)$$

を考える。ここで u は操作量, y は制御対象の出力, w は仮想的な外乱, v は仮想的な入力, z は評価出力である。 W は周波数整形のための補償要素であり, W_T, W_S はそれぞれ相補感度 T , 感度 S に対する周波数重みである。通常の混合感度問題では周波数重み W_T, W_S だけで周波数整形を考えるが, 提案する方法では問題を考えやすくなるため W を導入する。後で述べるように W_T および W_S は PW に密接に関係して設定する。 W を導入した結果, Fig. 1 の一般化プラントに対して得られた H_∞ (準) 最適補償器を K_0 とすると制御装置 K は

$$K = WK_0 \quad (2)$$

となる。ただし PW は可安定かつ可検出とする。

(1) 式のもとでつぎの関係がなりたつ。

$$|S(j\omega)| < |W_S(j\omega)|^{-1} \text{ かつ } |T(j\omega)| < |W_T(j\omega)|^{-1} \quad (3)$$

ここで, $PK(j\omega) \gg 1$ のとき $PK(j\omega) \approx S^{-1}(j\omega)$, $PK(j\omega) \ll 1$ のとき $PK(j\omega) \approx T(j\omega)$ が成り立つことから周波数重み W_T, W_S を介して一巡伝達関数 PK の周波数整形が可能である。設計仕様を W, W_T, W_S で表現することがすなわち設計問題になる。そこでつぎのような周波数重み付けを提案する。

$$PW(s) = \frac{p \prod_{k=1}^m (s - z_k)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} \quad (4)$$

Fig. 1 The generalized plant for the proposed design method

$$W_T(s) = N^{-1}(s) = \frac{\prod_{k=1}^n (s - q_i)}{p \prod_{k=1}^m (s - z_k)} \quad (5)$$

$$W_S(s) = (d_0 D)^{-1}(s) = \frac{\prod_{i=1}^n (s - q_i)}{d_0 \prod_{i=1}^m (s - p_i)}, \quad (1 < d_0) \quad (6)$$

$m, n (n \geq m)$ はそれぞれ PW の分子, 分母次数を表わす整数である。 D, N は PW の RH_∞ 上の既約分解 $PW = \frac{N}{D}$,

$NX + DY = 1, D, N, X, Y \in RH_\infty$ である。 $\frac{1}{d_0}$ は W_S の高周波ゲインであり, 制御対象が非最小位相系のとき $\|S\|_\infty > 1$ なので $1 < d_0$ としなければならない。

この問題設定では以下述べるように PW が可検出かつ可安定であれば一般化プラントは

C1: $[A, B_2]$ は可安定かつ $[A, C_2]$ は可検出。

C2: G_{12} および G_{21} は虚軸上に不変ゼロ点をもたない。

C3: D_{12} は列フルランクかつ D_{21} は行フルランク。

となり文献 13) の H_∞ 標準問題として扱うことができる。このことから虚軸上にゼロ点をもつ問題 (サーボ系の設計, 帯域通過型の制御装置の設計, 虚軸上に極またはゼロ点をもつ制御対象の制御系設計) を特別な考慮なしであつたことができる。このことはつぎのように説明できる。

PW の状態空間表現を

$$PW(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & E \end{bmatrix}$$

とすると, F を $A - FC$ の固有値を q_i に等しくするオブザーバゲインとして N, D は

$$\begin{bmatrix} N & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - FC & B - FC & -F \\ C & E & I \end{bmatrix}$$

と表わされる。このことから Fig. 1 の一般化プラント $G(s)$ の最小実現は

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F & B \\ \begin{bmatrix} O \\ d_0^{-1}C \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} O \\ d_0^{-1}I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} I \\ d_0^{-1}E \end{bmatrix} \\ C & I & E \end{bmatrix} \quad (7)$$

と表わすことができる。(7) 式で PW が可安定かつ可検出ならば C1~C3 は明らかに成り立つ。この問題設定での設計パラメータは d_0 , 周波数重みの極 q_i , W すなわち z_k, p_i のうち W に由来するもの, および拡大系の高周波ゲイン p である。この設計法での制御系設計の制約条件

と仕様に対する制御系の性質，設計パラメータの関係は Table 1 のようになる。また，推奨する設計手順(設計パラメータの決定手順)を Fig. 2 に示す。以下 Table 1 の

Fig. 2 The proposed design procedure

Table 1 The relation between design specifications and the design parameters in the proposed method

Design constraints	Desirable properties of the control system	Respondent design parameters of the proposed method	
		Characteristic values of the weights	The design parameters
(derived from the plant)	○ being nominal stable	—	existence of H_{∞} (sub) optimal solutions
	○ having large stability margin	$\ W_S\ _{\infty}$	d_0
	○ $ PK(j\omega) > 1$ inside of the controlling band	$ W_S(z_1) < 1$ $ W_S(j\omega) $	d_0, q_i and poles of W
	○ $ PK(j\omega) < 1$ outside of the controlling band	$ W_T(j\omega) $	W
(derived from the specifications)	○ response to the disturbance	zeros possessed by W_S and W_T commonly	q_i
	• nominal performances * being stable * being well damped * having low sensitivity	poles of W_S and W_T	achieved automatically
	• robustness * having enough stability margin * being unsensitive to change of the plant properties		
(derived from the specifications)	○ responses to the command (adjustable by feedforward compensator)		

太枠の内容に添って設計パラメータの決め方の詳細を述べる。

極とゼロ点は表記を簡単にするため $|z_k| < |z_{k+1}|, |z_k| = |z_{k+1}|$ なら $\zeta(z_k) \leq \zeta(z_{k+1}), (k=2, 3, \dots, m)$. $|p_i| < |p_{i+1}|, |p_i| = |p_{i+1}|$ なら $\zeta(p_i) \leq \zeta(p_{i+1}), (i=1, 2, \dots, n)$. $|q_i| < |q_{i+1}|, |q_i| = |q_{i+1}|$ なら $\zeta(q_i) \leq \zeta(q_{i+1}), (i=1, 2, \dots, n)$ の順序に並べるものとする。ただし $\zeta(p_i) = |p_i + \bar{p}_i|/(2|p_i|)$ は p_i の減衰率とする。

3.3 W の選択

周波数重みの(5), (6)式のゲイン特性から周波数整形にはつぎのような p_i と q_i または z_i と q_i のペアが必要であることがわかる。

[周波数整形と拡大系の極およびゼロ点との関係]

1. 周波数帯域 $[0, \omega_s]$ をほかの周波数帯域より低感度化するには，

$$\omega_s \approx |p_i| < |q_i| \quad (8)$$

であるような p_i と q_i のペアが必要である。

2. 周波数帯域 $[\omega_r, \infty]$ をほかの周波数帯域より低相補感度化するには，

$$\omega_r \approx |q_i| < |z_i| \quad (9)$$

であるような q_i と z_i のペアが必要である。ただしここで z_i には無限遠点のゼロ点も含めるものとする。

3. ω_{s0} を中心とする周波数帯域をほかの周波数帯域より低感度化するには

$$|p_i| = \omega_{s0}, \zeta(p_i) < \zeta(q_i) \quad (10)$$

となるような実数でない p_i と q_i のペアが必要である。

4. ω_{r0} を中心とする周波数帯域をほかの周波数帯域より低相補感度化するには

$$|z_i| = \omega_{r0}, \zeta(z_i) < \zeta(q_i) \quad (11)$$

となるような実数でない z_i と q_i のペアが必要である。

よって周波数整形に必要な位置に P のゼロ点または極が存在しないとき W のゼロ点または極で補う目的で W の極とゼロ点を選ぶ。

p は W_T のゲイン特性を Bode 線図上で上下に平行移動させる設計パラメータである。 p の値はつぎの関係から決め

る。

[制御バンド外の周波数整形と $|PW(j\omega)|$ の関係]

3.4 節で述べる q_i の選択に従うと、制御バンドの上限とみなせる角周波数 $|q_n|$ より十分大きい周波数(すなわち制御バンド外) ω_T では

$$|W_T(j\omega_T)| < |PW(j\omega_T)| < |W_T(j\omega_T)| + \varepsilon, 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (12)$$

がなりたつ。

このことから

$$|T(j\omega_T)| < |\Delta(j\omega_T)|$$

なる仕様に対し

$$|PW(j\omega_T)| < |\Delta(j\omega_T)| \quad (13)$$

となるように p を選ぶ。

そのほかの注意として、相殺されると好ましくない P のモードが PW の隠れモードにならないように W を選ぶものとする。

3.6 節に述べるように、 PW と K_0 の極ゼロ相殺は起らない。

3.4 指定極 q_i の配置

3.6 節で述べるように q_i は閉ループの極になる。 q_i は(6)式からつぎのことを考慮して選ぶ。

[q_i と周波数整形の関係]

1. 指定する極 $|q_i|$ を同じ添字 i の $|p_i|$ に比べ大きくするほど周波数帯域 $[0, |p_i|]$ で $|W_S(j\omega)|$ が大きくなる。
2. $\zeta(q_i)$ が同じ添字 i の $\zeta(p_i)$ に比べて大きいほど $|p_i|$ を中心とする周波数帯域で $|W_S(j\omega)|$ が大きくなる。
3. 指定する極 $|q_i|$ を同じ添字 i の $|z_i|$ に比べ大きくするほど周波数帯域 $[|q_i|, \infty]$ で $|W_T(j\omega)|$ が大きくなる(ただし $i \leq m$)。
4. $\zeta(q_i)$ が同じ添字 i の $\zeta(z_i)$ に比べて大きいほど $|z_i|$ を中心とする周波数帯域で $|W_T(j\omega)|$ が大きくなる(ただし $i \leq m$)。

ここでは安定余裕の設計を見通しよく行うため、 q_i は同じ添字 i の PW の極 p_i に対して特に

$$|q_i| \geq |p_i| \text{ かつ } \zeta(q_i) \geq \zeta(p_i) \quad (14)$$

のように選ぶ。このとき $|q_n|$ は制御バンドの上限に対応する。また

$$|D^{-1}(j\omega)| \geq D^{-1}(\infty) = I \quad (15)$$

となることが容易に確かめられる。そのため

$$\|W_S\|_\infty = d_0^{-1}$$

となり後述するように d_0 が安定余裕の設計パラメータとして意味をもつ。

また角周波数 $|q_n|$ より十分大きい周波数 ω_T では

$$|D^{-1}(j\omega_T)| \approx 1 \quad (16)$$

となることから(12)式が導かれる。

q_i を(14)式のように選び PW のモードを収束が早いモードへ移動することは低感度化と等価であり、Waterbed 効果に制約されることになる。このことは次節のように q_i の選択に反映される。

3.5 感度と安定余裕のトレードオフ(Waterbed 効果の扱い)

感度と安定余裕のトレードオフの問題を重みつき感度最適化問題を介して考える。重みつき感度最適化問題

$$\|W_S S\|_\infty < \gamma_s \leq 1, (S \in RH_\infty) \quad (17)$$

がなりたつことは明らかに(1)式の S-T 混合感度問題が解をもつ必要条件である。また、このとき $\lim_{p \rightarrow \infty} J = \|W_S S\|_\infty$ であることから十分大きい p に対して(1)式の混合感度問題は解をもつ。

そこで、(17)式を満たす W_S の条件を考え、その条件を満たす W_S を(1)式の混合感度問題で用いる W_S の候補とする。

RH_∞ 上での既約分解表現を使うと、内部安定性を考慮したうえで(17)式は

$$\|W_S D Y - W_S D N Q_f\|_\infty < \gamma_s \quad (18)$$

と書き直すことができる¹⁴⁾。ただし $Q_f \in RH_\infty$ は自由パラメータである。 $Q_f \in RH_\infty$ が存在する条件は P を実軸上に1個の不安定ゼロ点 z_1 をもつ安定な1入力1出力非最小位相系とすると、

$$\gamma_s^2 - \{W_{S0}(z_1) D_i^{-1}(z_1)\}^2 > 0 \quad (19)$$

と表わされる。ただし W_{S0} は W_S のアウタ、 D_i は D のインナーである。(19)式は(18)式に Nevanlinna-Pick の補間定理¹⁴⁾を適用して、Pick 行列の準正定性から導かれる。ここで特別な場合として、 P が開複素右半平面に極をもたないとき $D_i = 1$ である。

$\gamma_s = 1$ とすると(17)式から

$$|S(j\omega)| < |W_S(j\omega)|^{-1} \quad \forall \omega \quad (20)$$

となる。複素平面上で点 $PK(j\omega)$ と点 $s = -1$ との距離は $|S(j\omega)|^{-1}$ であるので、(20)式のもとでは PK の Nyquist 軌跡は $s = -1$ を中心とする半径 $\|W_S^{-1}\|_\infty$ の円の内側に入り込まない。このことから W_S と安定余裕を関係づけることができる。(1)式の混合感度問題が解をもてば、複素平面上での幾何学的関係から $\|W_S^{-1}\|_\infty$ とゲイン余裕 m_g 、位相余裕 m_p との関係はつぎのようになる。

$$m_g \geq \frac{1}{1 - \|W_S^{-1}\|_\infty}$$

$$m_p \geq 2 \sin^{-1} \frac{1}{2} \|W_S^{-1}\|_\infty$$

たとえば $\|W_S^{-1}\|_\infty = 0.75$ で(1)式の混合感度問題が解をもつことは、閉ループ系のゲイン余裕が 12 dB 以上、位相余裕が 44 deg 以上となることの十分条件であり、

$\|W_s^{-1}\|_{\infty}=0.5$ にはゲイン余裕 6 dB 以上, 位相余裕 29 deg 以上が対応する。

q_i を (14) 式の関係を満たすように選ぶと, $\|W_s^{-1}\|_{\infty}=1/d_0$ であることから, d_0 を安定余裕の設計パラメータとすることができる。安定余裕と低感度化のトレードオフは (19) 式に (6) 式を代入して, つぎのように表わされる。

$$\prod_{i=1}^n |z_i - q_i| < \left| d_0 D_i(z_i) \prod_{i=1}^n (z_i - p_i) \right| \quad (21)$$

具体的にはつぎのように設計パラメータを動かせばよい。

[Waterbed 効果を反映した重み付け]

- ・不等式 (21) は (1) 式の混合感度問題が解をもつ必要条件である。不等式 (21) が満たされないうち、い

れかの i について $\left| \frac{q_i}{p_i} \right|$ または $\frac{\zeta(p_i)}{\zeta(q_i)}$ を大きくする。または d_0 を大きくする。□

また, 制御対象の特性値である $|z_i|$ の値が $|q_i|$ にくらべ小さく, $|p_i|$ に比べ大きいほど Waterbed 効果の影響は小さいことがわかる。

3.6 極ゼロ相殺の回避, 部分的極配置

混合感度問題で制御装置を設計したとき, 最適化における中心解を使用すると, 制御装置と制御対象の間で安定な極ゼロ相殺がおこることがある^{5), 6)}。制御装置は H_{∞} 中心解に対応する補償器で, 最小実現されているとすると, 文献 5) の結果から S-T 混合感度問題では一般につぎの関係が見い出される。

Fig. 1 の混合感度問題では,

1. PW の安定ゼロ点上に K_0 の極が現れる。
2. W_{T0} と W_{S0} の共通なゼロ点の位置に閉ループの極が現れる。
3. PW の安定極の位置に K_0 のゼロ点が現れる。
4. W_{S0} の極の位置に K_0 の極が現れる。
5. W_{T0} の極の位置に K_0 のゼロ点が現れる。

文献 5) の結果は S と KS に対する混合感度問題に対するものであるが, S-T 混合感度問題に結果を利用するには, KS に対する周波数重みが要素として制御対象 (拡大系) を含むと考えればよい。ただし W_{T0} は W_T のアウターである。1. と 3. により制御装置と制御対象の極ゼロ相殺が起きるが, 4. と 5. を利用すれば極ゼロ相殺を回避できる。また, 2. を使って部分的に極を配置^{7), 12)} することができる。すなわち, つぎのように周波数重みを選べばよい。

[極ゼロ相殺を避ける周波数重みの選択要領]

M1: PW に相殺してはならない安定極 p_k がある場合 W_s が p_k に極をもつようにする。

M2: PW に相殺してはならない安定ゼロ点 z_i があ

る場合 W_T が z_i に極をもつようにする。

M3: W_T と W_s に共通なゼロ点をもたせて, その位置に閉ループ系の極を指定する。□

制御装置と制御対象の間で極ゼロ相殺がないとき, 制御対象の共振点は S の反共振点, 制御対象の反共振点は T の反共振点になる。このとき要領 M1, M2 はそれぞれ S, T のゲイン曲線が凹になるべき周波数で W_s^{-1} , W_T^{-1} のゲイン曲線を凸にすることを意味している。

(5), (6) 式の重みの選択は M1~M3 の要領に対応していることがわかる。

3.7 フィードバック補償器の設計手順

以上のことから, つぎの手続きで設計パラメータを決めることを提案する。

Step 1: W, d_0, q_i の初期値を与える。

Step 2: $|W_s(z_i)| < 1$ をチェックする。 $|W_s(z_i)| > 1$ ならい

ずれかの i について $\left| \frac{q_i}{p_i} \right|$ または $\frac{\zeta(p_i)}{\zeta(q_i)}$ を大きくする。または d_0 を大きくする。

Step 3: (1) 式の混合感度問題を解く。

Step 4: 解がない場合 $W_s(z_i)$ を小さくするか p_i を大きくして Step 3 をやりなおす。

Step 5: 結果が満足でなければ, 満足でない特性値に対応する設計パラメータを修正, 固定して Step 2 に戻る。

以上のアルゴリズムはフローチャートとして Fig. 2 にまとめられている。次章に設計例を示す。

4. 制御装置の設計例

本設計法を適用した安定余裕と低感度化のトレードオフ設計の例を示す。自動車の進路は横風や路面の凹凸などに起因する外乱により乱されることがある。ここではフィードバック制御により自動車の耐外乱性を高めることを目的に制御系を設計する。制御系として自動車の横加速度を制御量, 後輪舵角を操作量とする。

四輪操舵車の状態方程式はつぎのように書くことができる¹⁵⁾。

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a u_a \quad (22)$$

$$x_a = [\psi \quad V_y]^T \quad u_a = [\theta \quad \delta]^T$$

$$A_a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = -2(L_f^2 K_f + L_r^2 K_r) / I_z V$$

$$a_{12} = -2(L_f K_f + L_r K_r) / I_z V$$

$$a_{21} = -2(L_f K_f + L_r K_r) / MV - V$$

$$a_{22} = -2(K_f + K_r) / MV$$

$$b_{11} = 2L_f K_f / I_z N$$

$$b_{12} = -2L_r K_r / I_z$$

$$b_{21}=2K_f/MN$$

$$b_{22}=2K_r/M$$

K_f, K_r はそれぞれ前輪と後輪のコーナリングパワー, L_f は前車軸から重心点までの距離, L_r は後軸から重心点までの距離, M は車両の質量, I_z は重心点回り地面垂直方向の慣性モーメント, N はステアリングギヤ比, θ は操舵角, δ は後輪舵角, $\dot{\phi}$ はヨーレート, V_y は重心点の車軸方向への並進速度(横滑り速度), V は車速である.

α を重心点横加速度とすると

$$\alpha = \dot{V}_y + V\dot{\phi}$$

とあらわされる. また, 重心点から前車軸方向に l_s 離れた所の横加速度 a_s は

$$a_s = l_s \ddot{\phi} + \alpha \quad (23)$$

となる. 典型的な小型乗用車のパラメータ

$$K_f = 36750 \text{ [N/rad]} \quad K_r = 49000 \text{ [N/rad]}$$

$$L_f = 1 \text{ [m]} \quad L_r = 1.5 \text{ [m]}$$

$$I_z = 1960 \text{ [Nms]} \quad M = 1225 \text{ [kg]} \quad N = 20$$

を使って, $P_1(s) = a_s(s)/\delta(s)$ を計算すると $l_s = 0.9 \text{ [m]}$, $V = 100 \text{ [km/h]}$ のとき

$$P_1(s) = \frac{12.5(s-23.4)(s+25.6)}{s^2 + 10.4s + 61.8}$$

となる. これに操作端の遅れとして,

$$P_2(s) = \frac{30}{s+30}$$

を考慮した

$$P(s) = P_1(s)P_2(s)$$

に対しコントローラを設計する. 四輪操舵車の仕様は現時点で明確でないので, 仮に

S1: フィードバック制御による 10 [rad/s] 付近の耐外乱性の向上.

S2: T の 70 [rad/s] 以上の減衰特性は

$$|T(j\omega)| < \left| \frac{70}{j\omega} \right|.$$

S3: ゲイン余裕 6 [dB] 以上かつ位相余裕 30 [deg] 以上.

を考える. また, P_1 のモードの極ゼロ相殺は許容しないが, 操作端の特性は車両本体の特性に比べ変わりにくいと考え, P_2 のモードの極ゼロ相殺は許容することにする. いま W の初期値を

$$W(s) = b \frac{s^2 + 20s + 100}{s^2 + 4s + 100}, \quad b = 0.17 \quad (24)$$

とする. 仕様 S1 のため W は $s = -2 \pm 9.80j$ の極と $s = -10$ のゼロ点のペアをもつ. (13)式を考慮して 70 [rad/s] 以上の周波数帯域で $|PW(j\omega)| \approx \left| \frac{70}{j\omega} \right|$ となるように高周波ゲイン b と相対次数が選ばれている. 仕様 S3 から

d_0 の初期値として

$$d_0 = 2$$

とする. q_i の初期値として収束性と $W_s(z_i)$ の値を考慮し

$$-k_q \times 10 \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}} - 12.5 \frac{1 \pm j}{\sqrt{2}} - 30, \quad k_q = 1$$

を選ぶ. 極 $s = -30$ の相殺を許容する意味で $q_3 = -30$ としている. このとき

$$W_s(z_1) = 0.8636 < 1$$

であり, (19)式を満たすことがわかる. (1)式の混合感度問題を解くと準最適な制御装置が得られ PK の Bode 線図は Fig. 3 の“initial”のようになる. このときゲイン余裕 8.05 [dB] , 位相余裕 63.2 [deg] であり安定余裕に若干のゆとりがある. また, 高周波で $|PK(j\omega)|$ と $\left| \frac{70}{j\omega} \right|$ との間にすきまがある. これらのことから更に低感度な制御装置でも安定余裕の仕様を満たしうることがわかる. そこで仕様 S2 を満たすように b の値を調整しながら d_0 を大きくし安定余裕をへらし, k_q の値を大きくして安定余裕と低感度化のトレードオフをとっていくと $d_0 = 2.89$, $k_q = 1.54$, $b = 0.19$ でほとんど最適に近い制御装置を得る. この Bode 線図は Fig. 3 の“final”のようになる. このときゲイン余裕 6.01 [dB] , 位相余裕 38.2 [deg] であり, ほぼ仕様 S3 に対し限界的な設計になったと思われるので最終結果とする. このときこの閉ループ系の極は

Fig. 3 Bode plots for PK ; the initial design and the final design

Fig. 4 Responses for an input disturbance

$$\begin{array}{ccc}
 -8.48 & -15.4(1 \pm j)/\sqrt{2} & -13.1 \\
 -12.5(1 \pm j)/\sqrt{2} & -22.58 & -30 \\
 -49.54 & -14078 &
 \end{array}$$

となる。PWの極またはゼロ点と共通する閉ループ極は $s = -30$ だけであり、許容した $s = -30$ 以外の P と K との極ゼロ相殺は起こっていないことがわかる。また q_i が閉ループ極として現れていることがわかる。

Fig. 4 に入力外乱

$$d_{in}(t) = \begin{cases} 1/57.3 \sin(10t) [\text{rad}] & (0 \leq t \leq 0.314 [\text{sec}]) \\ 0 & (0.314 [\text{sec}] < t) \end{cases}$$

に対する $\alpha_s(t)$ の応答を制御なし，“initial”，“final”で比較する。“initial”，“final”はそれぞれ設計パラメータの初期値に対して与えられた制御装置と最終結果の制御装置に対応する。制御系により入力外乱の影響が低減されることがわかる。さらに“initial”と“final”との比較では本設計法の適用による安定余裕の仕様に対する限界的な設計の効果として、外乱応答の振幅が大幅に低減できたことがわかる。

5. まとめ

実軸上に1個の不安定ゼロ点をもつ1入力1出力非最小位相制御対象に対して制御系設計を考えた。設計では

- ・閉ループ系の特性を直観的に把握しやすい一巡伝達関数の周波数整形を考えた。
- ・制御対象が非最小位相系であることを考慮し、感度と安定余裕のトレードオフを考えた。
- ・周波数整形に H_∞ 最適化(混合感度問題)のアルゴリ

ズムを利用した。ここでの、重みの付け方、修正のしかたを提案した。

- ・本設計法を適用して、安定余裕と低感度化のトレードオフ設計の例を示した。

参考文献

- 1) D. C. McFarlane and K. Glover: Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factor Plant Description, Springer-Verlag (1990)
- 2) J. C. Doyle, B. Francis and A. Tannenbaum: Feedback Control Theory, MacMillan (1992)
- 3) B. A. Francis: A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag (1987)
- 4) 原辰次: 制御系における零点[VI]制御系の特性と零点, 計測と制御, 29-9, 830/838 (1990)
- 5) J. Sefton and K. Glover: Pole/zero Cancellation in the General H_∞ Problem with Reference to a Two Block Design, System and Control Letters, 14, 295/306 (1990)
- 6) 章, 細江: 出力レギュレーション問題への H_∞ 制御理論からの接近, 第18回制御理論シンポジウム資料, 63/66 (1989)
- 7) M. C. Tsai, E. J. Geddes and I. Postlethwaite: Pole-Zero Cancellation and Closed-Loop Properties of H_∞ Mixed Sensitivity Design Problem, Automatica, 28-3, 519/530 (1992)
- 8) 伊藤, 藤代, 川邊, 金井, 越智: 四輪操舵車の新しい制御法, 計測自動制御学会論文集, 23-8, 828/834 (1987)
- 9) 金井喜美雄: フライトコントロール, 横書店 (1985)
- 10) 金井, 越智, 坂: 双翼操舵方式を用いた飛翔体の垂直加速度制御系の設計, 防衛大学校理工学研究報告, 29-1, 173/181 (1991)
- 11) B. Wie and F. Bauer: Classical and Robust H_∞ Robust Control Redesign for the Hubble Space Telescope, The 1992 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference (1992)
- 12) H. Kwakernaak: Robust Control and H_∞ -Optimization-Tutorial Paper, Automatica 29-2, 255/273 (1993)
- 13) K. Glover and J. Doyle: State-space Formulation for All Stabilizing Controllers that Satisfy an H_∞ norm bound and relations to Risk Sensitivity, System and Control Letters, 11, 167/172 (1988)
- 14) 前田, 杉江: システム制御理論, 朝倉書店 (1991)
- 15) 安部正人: 自動車の運動と制御, 山海堂 (1992)

[著者紹介]

川邊 武 俊 (正会員)
(Vol. 31, No. 6 参照)

北 森 俊 行 (正会員)
(Vol. 31, No. 6 参照)

松 村 利 夫 (正会員)
(Vol. 31, No. 6 参照)