非線形系の almost モデル追従制御†

上 田 忠 一*・横 道 政 裕**・石 動 善 久***・島 公 脩***

Almost Model Following Control for Nonlinear Systems

Tadakazu UEDA*, Masahiro YOKOMICHI**, Yoshihisa ISURUGI*** and Masasuke SHIMA***

In this paper, a model following control problem (NMFCP, for short) for nonlinear MIMO systems is studied. Isurugi and Shima has already given the solution of this problem under some regularity assumptions. The result can be stated as follows: NMFCP is solvable iff the relative order of the plant is not greater than that of the model. We consider the case where this condition is not satisfied. In this case, although any feedback law cannot cancel the influence of the inputs of the model on the error, the high-gain feedback based on the singular perturbation theory is available. It is shown that, by using the high-gain feedback with some small positive parameter ε , the error will remain $o(\varepsilon)$. Finally, the efficiency of the proposed control law is illustrated by a numerical simulation.

Key Words: almost model following control, nonlinear system, high-gain feedback, singular perturbation theory

1. はじめに

モデル追従制御とは漸近的モデルマッチング制御とも呼ばれ、制御対象に望む性能あるいは動特性を規範モデルにもたせ、そのモデルの応答に一致するように制御対象の動特性を補償する制御である。モデルをどのように設定するかによって多様な問題へと変換可能であるため(例: 外乱無干渉化, 出力トラッキング), 応用性のある制御問題である。

非線形モデルマッチング制御問題に関する研究は入力に関して線形な非線形制御系に限られているが、多くの研究者によって研究されており、用いる補償器のクラスなどに応じてその可解性に関する諸条件が得られている^{4)~7)}。また、非線形モデル追従制御問題に関しても、石動と島が Invariance の理論を用いてすでに制御則が存在するための必要十分条件を与えている⁸⁾が、その条件は(いくつかの正則性の仮定の下ではあるが)モデルと制

御対象の相対次数⁹⁾の関係として表現されうる。つまり、与えられた制御対象に対して、その条件を満足するように規範モデルを設計すれば制御対象の出力はモデルの出力軌道に追従する、つまり出力誤差は零に収束することが保証される。

しかしながら制御対象と規範モデルがすでに与えられており、それらがモデル追従制御則の存在条件を満足していない場合も考えられる。本論文ではそのような制御対象とモデルを取り扱う。

このような制御対象と規範モデルに対するモデル追従制御問題としてわれわれは almost モデル追従制御問題を提案する。almost モデル追従制御問題とは、モデルの出力に制御対象の出力が(漸近的ではなく)近似的に追従するような制御則を与えることとして定式化される。ここで用いられる 近似的とは、出力誤差が零には収束しないが設計可能なある範囲内に抑えられるということを意味する。本論文ではこの問題に対して、特異摂動系理論^{9),10)}を用いて可解条件を導出することを試みる。本論文で扱う制御対象は入出力数が等しく、そして入出力無干渉化と安定化に関するある条件を満足するようなアフィン非線形系である。そしていくつかの付加的な仮定の下で almost モデル追従制御則が存在することを示す。

2. 系の記述と非線形モデル追従制御

本論文では次式のような入出力数が等しい非線形制御

† 第 25 回計測自動制御学会北海道支部講演会で発表 (1993・1)

* オムロン(株) 長岡京市下海印寺

** 宮崎大学工学部 宮崎市学園木花台西 1-1

*** 北海道大学工学部 札幌市北区北 13 条西 8

* OMRON Corporation, Nagaoka-kyou

** Faculty of Engineering, Miyazaki University, Miyazaki

*** Faculty of Engineering, Hokkaido University, Sapporo

(Received April 20, 1994)

(Revised February 17, 1995)

対象 P を考える.

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= f_P(x_P) + G_P(x_P)u \\ &:= f_P(x_P) + \sum_{i=1}^m g_{Pi}(x_P)u_i\end{aligned}\quad (1)$$

$$y_P = h_P(x_P)$$

ここで, $x_P \in X_P \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y_P \in \mathbb{R}^m$ は制御対象の状態, 入力, そして出力であり各写像は解析的であると仮定する. ただし, $0 \in X_P$ であり, $f_P(0)=0$, $h_P(0)=0$ を仮定する.

そして, モデル M としてつぎのような解析的な非線形制御系が与えられているものとする.

$$\begin{aligned}\dot{x}_M &= f_M(x_M) + G_M(x_M)u_M \\ &:= f_M(x_M) + \sum_{i=1}^{m_M} g_{Mi}(x_M)u_{Mi} \\ y_M &= h_M(x_M)\end{aligned}\quad (2)$$

ここで, $x_M \in X_M \subset \mathbb{R}^{n_M}$, $u_M \in \mathbb{R}^{m_M}$, $y_M \in \mathbb{R}^{m_M}$ はモデルの状態, 入力, そして出力である.

制御対象 $P(1)$ とモデル $M(2)$ との合成系は次式のように表現される.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u + P(x)u_M \\ &:= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i + \sum_{i=1}^{m_M} p_i(x)u_{Mi}\end{aligned}\quad (3)$$

$$e = h(x) = [h_1(x), \dots, h_m(x)]^T$$

ここで, $x = [x_P^T, x_M^T]^T$ であり

$$f(x) := [f_P(x_P)^T, f_M(x_M)^T]^T$$

$$G(x) := [G_P(x_P)^T, 0_{m \times n_M}]^T$$

$$P(x) := [0_{m \times n_P}, G_M(x_M)^T]^T$$

である. また誤差関数 $h(x)$ は各出力の差

$$h(x) := h_P(x_P) - h_M(x_M) \quad (4)$$

を用いる. この合成系は x を状態, u を入力, e を出力, そして u_M を外乱とみなせば外乱を含んだ非線形制御系の構造をもつ. 本論文では非線形モデル追従制御問題を以下のように定式化する.

【定義 2.1】 制御対象 P , モデル M , 誤差 e , そして動作点近傍 $\mathcal{U} := X_P \times X_M \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_M}$ を考える. このとき以下の条件を満足する制御則が存在するとき局所モデル追従制御問題は可解であるという.

(A 1): 合成系の誤差関数の軌道はモデルの入力に対して invariant である.

(A 2): $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$

ただし各条件は $\mathcal{U}$ 内の各初期状態に対して成立するものとする. $\triangle$

本論文では合成系を標準形⁹⁾に変換して議論を行う. さらに内部状態の安定性の解析を容易にするために合成系に対して以下の条件を仮定する.

(B 1) 点 $\forall x = (x_P, x_M) \in \mathcal{U}$ において制御対象の相対

次数 $\rho_1, \dots, \rho_m$ と規範モデルの相対次数 $\nu_1, \dots, \nu_m$ のもとで無干渉化行列 $A(x)$ が定義され, さらにそれは正則である.

(B 2) 合成系の入力ベクトル場が張る接分布

$$\mathcal{G} := \text{span}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\} \quad (5)$$

は $\mathcal{U}$ 上の各点において対合的 (involutive) である.

仮定 (B 1) の下での非線形局所モデル追従制御問題の可解性に関してはすでに石動, 島によって以下の条件が得られている.

《定理 2.1》¹⁾ 仮定 (B 1) のもとで制御対象 $P(1)$ とモデル $M(2)$, さらに追従誤差 (4) が与えられたとき, モデル追従制御系を構成する制御則

$$u = \alpha(x) + \beta(x)u_M$$

が存在するための必要十分条件は,

$$\rho_k \leq \nu_k; \quad k=1, \dots, m \quad (6)$$

が成立することである. $\square$

そこで本論文では制御対象 $P(1)$ とモデル $M(2)$ として上記の必要十分条件 (6) を満足していないものを考察の対象とする. すなわち制御対象 P とモデル M の相対次数の間に次式の関係が存在する場合である.

$$\exists i \in \{1, \dots, m\} \quad \text{s.t. } \rho_i > \nu_i \quad (7)$$

このとき合成系 (3) は新たな局所座標系 (z, ξ, x_M) によって

$$e_j = z_{j1}$$

$$\dot{z}_{j1} = z_{j2}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{j(\rho_j-1)} = z_{j\rho_j}$$

$$\begin{aligned}\dot{z}_{j\rho_j} &= L_{f_P}^{\rho_j} h_{Pj}(x_P) - L_{f_M+G_M u_M}^{\rho_j} h_{Mj}(x_M) \\ &\quad + L_{G_P} L_{f_P}^{\rho_j-1} h_{Pj}(x_P) u\end{aligned}$$

$$(j \in \{1, \dots, m\} \quad \text{s.t. } \rho_j \leq \nu_j)$$

$$e_i = z_{i1}$$

$$\dot{z}_{i1} = z_{i2}$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{i(\nu_i-1)} = z_{i\nu_i}$$

$$\dot{z}_{i\nu_i} = z_{i(\nu_i+1)} - (L_{G_M} L_{f_M}^{\nu_i-1} h_{Mi}(x_M)) u_M$$

$$\vdots$$

$$\dot{z}_{i(\rho_i-1)} = z_{i\rho_i} - L_{G_M} L_{f_M}^{\rho_i-2} h_{Mi}(x_M) u_M$$

$$\dot{z}_{i\rho_i} = L_{f_P}^{\rho_i} h_{Pi}(x_P) - L_{f_M}^{\rho_i} h_{Mi}(x_M)$$

$$- L_{G_M} L_{f_M}^{\rho_i-1} h_{Mi}(x_M) u_M$$

$$+ L_{G_P} L_{f_P}^{\rho_i-1} h_{Pi}(x_P) u$$

$$(i \in \{1, \dots, m\} \quad \text{s.t. } \rho_i > \nu_i)$$

$$\dot{\xi} = \eta(z + z_M(x_M), \xi)$$

$$\dot{x}_M = f_M(x_M) + G_M(x_M)u_M$$

と記述できる. ただし

$$\begin{aligned}z &:= z_{ij}, (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, \rho_i\}) \\ &= L_{f_P}^{j-1} h_i(x)\end{aligned}$$

であり

$$z_M := L_{f_M}^j h_{M_i}, (i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, \rho_i\})$$

である。また、 $\xi \in \mathbb{R}^{n-(\rho_1+\dots+\rho_m)}$ は制御対象の内部状態である。

(注意 2.1) 仮定(B1)は、点 $x_{P0} \in X_P$ が制御対象に対する無干渉化行列 $A_P(x_P)$ の正則点であることと等価である。制御対象の入力ベクトル場が張る接分布

$$\mathcal{G}_P := \text{span}\{g_{P1}, \dots, g_{Pm}\} \quad (9)$$

が対合的であるとき、 $\mathcal{G}$ も対合的である。すなわち仮定(B2)が成り立つ。また、逆も成り立つ。

仮定(B2)は $\dim \mathcal{G} = m$ のもとで

$$L_{g_i} \phi(x) = 0, i = 1, \dots, m \quad (10)$$

を満足する $\xi = \phi(x)$ が存在するための必要十分条件である。ただし、1 入力系においては(10)式を満足するような写像 $\phi(x)$ は常に存在する。また、 $\dim \mathcal{G} = m$ は仮定(B1)から与えられる。□

3. 非線形 Almost モデル追従制御

3.1 問題設定と主結果

合成系(8)に対して almost 外乱無干渉化問題を考慮することによって、モデルの出力に制御対象の出力が近似的に追従するような制御則を与えることができる。ただし前章での仮定に加えて本節では制御対象と規範モデルは以下の仮定を満足しているものとする。

(B3) : 制御対象の内部状態

$$\dot{\xi} = \eta(z + z_M(x_M), \xi)$$

は、入力 $z + z_M$ に対して U 上で局所一様 BIBS 安定である。

(B4) : 規範モデルの入力 $u_M(\cdot)$ は C^1 -級関数で、その微分と共に有界である。さらに規範モデルは局所一様 BIBS である。

ただし制御系

$$\dot{x} = f(x, u), x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$$

が動点 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ の近傍で局所一様 BIBS であるとは、以下の性質を満足する x_0 を含む有界開集合 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ と、正数 $k > 0$ が存在することを意味する。

$$\forall x(0) \in \mathcal{O}_1, \forall u(t); \|u(t)\| < k;$$

$$\forall t \geq 0, x(t; x(0)) \in \mathcal{O}_2$$

ただし $x(\cdot; x(0))$ は、初期条件 $x(0)$ に対する上記の制御系の解軌道である。さらに零に収束する有界な入力に対して $x \rightarrow 0$ となるときその系は BIBS 安定であると呼ばれる。これらの仮定の下で以下の定理が成立する。

《定理 3.1》 仮定(B1)～(B4)を満足するような制御対象 $P(1)$ と規範モデル $M(2)$ を考える。さらに制御対象 P とモデル M の相対次数にはつぎのような関係があるとする。

$$\exists i \in \{1, \dots, m\}, \text{ s. t. } \rho_i > \nu_i \quad (11)$$

このとき制御則として

$$\begin{aligned} u &= -A_P^{-1}(x_P)(b_P(x_P) - b_M(x_M) \\ &\quad - A_M(x_M)u_M + v) \\ v_j &= q_{j(\rho_j-1)}z_{j\rho_j} + \dots + q_{j0}z_{j1} \\ (j &\in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_j \leq \nu_j) \\ v_i &= \frac{1}{\varepsilon^{\rho_i-\nu_i+1}}[(r_{i(\rho_i-\nu_i)}\varepsilon^{\rho_i-\nu_i}z_{i\rho_i} + \dots + r_{i0}z_{i\nu_i}) \\ &\quad + r_{i0}(q_{i(\nu_i-2)}z_{i(\nu_i-1)} + \dots + q_{i0}z_{i1})] \\ (i &\in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_i > \nu_i) \end{aligned} \quad (12)$$

を用いると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = o(\varepsilon) \quad (13)$$

が成り立つ。

ここで、 $[A_P(x_P)]_{ij} = L_{g_{Pi}} L_{f_P}^{j-1} h_{Pi}(x_P)$, $(i=1, \dots, m, j=1, \dots, m)$, $[b_P(x_P)]_i = L_{f_P}^{\rho_i} h_{Pi}(x_P)$, $(i=1, \dots, m)$, $[b_M(x_M)]_i = L_{f_M}^{\rho_i} h_{Mi}(x_M)$, $(i=1, \dots, m)$, $[A_M(x_M)]_{ij} = L_{g_{Mi}} L_{f_M}^{j-1} h_{Mi}(x_M)$, $(i=1, \dots, m, j=1, \dots, m)$ である。また $\varepsilon > 0$ は十分小さな値であり、

$$q(s) = s^{\nu_i-1} + q_{i(\nu_i-2)}s^{\nu_i-2} + \dots + q_{i0} = 0, \quad (14)$$

$$r(s) = s^{\rho_i-\nu_i+1} + r_{i(\rho_i-\nu_i)}s^{\rho_i-\nu_i} + \dots + r_{i0} = 0 \quad (15)$$

は安定多項式である。□

3.2 定理の証明

定理の証明の前に、証明で用いる重要な補題を紹介しておく。

つぎのような特異摂動系を考える。特異摂動系とは遅い dynamics と速い dynamics が混在した系である。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y, \varepsilon), x(0) = \xi(\varepsilon), x \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y, \varepsilon), y(0) = \eta(\varepsilon), y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 $\varepsilon > 0$ は十分小さく、 $g(t, 0, 0, 0) = 0 (\forall t \geq 0)$ である。

上記の特異摂動系に対して $\varepsilon = 0$ とした系は slow reduced 系と呼ばれ、

$$\begin{aligned} \frac{dx^s}{dt} &= f(t, x^s, y^s, 0), x^s(0) = \xi(0) \\ 0 &= g(t, x^s, y^s, 0) \end{aligned} \quad (17)$$

と記述される。この slow reduced 系は特異摂動系の遅い dynamics を近似的に表現している。

特異摂動系(16)に対して $y^f = y - y^s$ と変数変換をする。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(t, x, y^f + y^s, \varepsilon) \\ \varepsilon \frac{dy^f}{dt} &= g(t, x, y^f + y^s, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dy^s}{dt} \end{aligned} \quad (18)$$

時間スケールを $\tau = t/\varepsilon$ と変換することによって元の時

間スケール t では無視された特異摂動系の速い dynamics を表現することができる。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= \varepsilon f(t, x, y^f + y^s, \varepsilon) \\ \frac{dy^f}{d\tau} &= g(t, x, y^f + y^s, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dy^s}{dt}\end{aligned}\quad (19)$$

上記の系において $\varepsilon=0$ とした系は fast reduced 系と呼ばれ、

$$\begin{aligned}BL: \frac{dy^f}{d\tau} &= g(0, x^s, y^f + y^s, 0), \\ y^f(0) &= \eta(0) - y^s(0)\end{aligned}\quad (20)$$

と記述される。この fast reduced 系は特異摂動系の速い dynamics を近似的に表現している。

特異摂動系 (16) はつぎの条件を満足しているとする。

(C1) $\sum_0$ は $0 \leq t < \infty$ において連続解 $x^s(t), y^s(t)$ をもつ。

(C2) 状態空間と時間領域上の点 $(t, x^s(t), y^s(t))$ ($0 \leq t < \infty, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$) の近傍において f, g は (t, x, y) に関して連続微分をもつ。また、 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ において初期条件 $\xi(\varepsilon), \eta(\varepsilon)$ は ε の滑らかな関数である。

(C3) $\partial g / \partial y(t, x^s(t), y^s(t), 0)$ の固有値 $\lambda(t)$ は $\operatorname{Re} \lambda(t) \leq -\mu < 0$ ($0 \leq t < \infty$) を満足する。

(C4) $\frac{dx}{dt} = (f_x(t) - f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t))x$ は $x^s(t), y^s(t)$ に沿って漸近安定である。

(C5) ある実数 $\Delta, \varepsilon_0 > 0$ に対して f, g とその (t, x, y, ε) に関する微分は $0 \leq t < \infty, |x - x^s(t)| + |y - y^s(t)| \leq \Delta, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ において有界である。

特異摂動系 (16) が上記の条件を満足しているときつぎの補題が得られる。

[補題 3.1] (Hoppensteadt⁸⁾) 特異摂動系 Σ_ε が (C1)~(C5) の条件を満足しているとき、十分小さな $x(0), y(0), \varepsilon \geq 0$ に対して Σ_ε は一意解 $x=x(t, \varepsilon), y=y(t, \varepsilon)$ ($0 \leq t < \infty$) をもち、fast reduced 系 BL も一意解 $y^f(t)$ をもつ。

さらに、次式が満足される。

$$\begin{aligned}x(t, \varepsilon) &= x^s(t) + o(\varepsilon) \\ y(t, \varepsilon) &= y^s(t) + y^f(t) + o(\varepsilon)\end{aligned}\quad (21)$$

ただし、 $o(\varepsilon)$ は $0 \leq t < \infty$ に対して一様に成立する。

□

上記の補題は Tikhonov の定理の拡張である。この補題を用いることによって上記の定理が証明される。

(定理 3.1 の証明)

系 (8) に対して制御則 (12) を用いると、合成フィードバック系は次式のように記述される。

$$\begin{aligned}e_j &= z_{j1} \\ \dot{z}_{j1} &= z_{j2} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{j(\rho_j-1)} &= z_{j\rho_j} \\ \dot{z}_{j\rho_j} &= -q_{j(\rho_j-1)}z_{j\rho_j} - \cdots - q_{j0}z_{j1} \\ &\quad (j \in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_j \leq \nu_j) \\ e_i &= z_{i1} \\ \dot{z}_{i1} &= z_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i(\nu_i-1)} &= z_{i\nu_i} \\ \dot{z}_{i\nu_i} &= z_{i(\nu_i+1)} - L_{GM}L_{fM}^{\nu_i-1}h_{Mi}(x_M)u_M \\ &\vdots \\ \dot{z}_{i(\rho_i-1)} &= z_{i\rho_i} - L_{GM}L_{fM}^{\rho_i-2}h_{Mi}(x_M)u_M \\ \dot{z}_{i\rho_i} &= \frac{-1}{\varepsilon^{\rho_i-\nu_i+1}}[(r_{i(\rho_i-\nu_i)}\varepsilon^{\rho_i-\nu_i}z_{i\rho_i} + \cdots + r_{i0}z_{i\nu_i}) \\ &\quad + r_{i0}(q_{i(\nu_i-2)}z_{i(\nu_i-1)} + \cdots + q_{i0}z_{i1})] \\ &\quad (i \in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_i > \nu_i) \\ \dot{\xi} &= \eta(z + z_M(x_M), \xi) \\ \dot{x}_M &= f_M(x_M) + G_M(x_M)u_M\end{aligned}\quad (22)$$

上記のフィードバック系において

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \eta(z + z_M(x_M), \xi) \\ \dot{x}_M &= f_M(x_M) + G_M(x_M)u_M\end{aligned}\quad (23)$$

は内部の dynamics である。本定理においては内部の安定性(有界性)は議論の対象とはしていないので以降は可観測なモードである z の項のみを考えていく。

z の項に対して座標変換

$$\begin{aligned}\bar{z}_{jk} &= z_{jk}, \quad k=1, \dots, \rho_j, \\ j &\in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_j \leq \nu_j \\ \bar{z}_{ik} &= \begin{cases} z_{ik}, & k=1, \dots, \nu_i \\ \varepsilon^{k-\nu_i}z_{ik}, & k=\nu_i+1, \dots, \rho_i, \end{cases} \\ i &\in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_i > \nu_i\end{aligned}\quad (24)$$

を用いるとつぎのように変形できる。

$$\begin{aligned}e_j &= \bar{z}_{j1} \\ \dot{\bar{z}}_{j1} &= \bar{z}_{j2} \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{j(\rho_j-1)} &= \bar{z}_{j\rho_j} \\ \dot{\bar{z}}_{j\rho_j} &= -q_{j(\rho_j-1)}\bar{z}_{j\rho_j} - \cdots - q_{j0}\bar{z}_{j1} \\ &\quad (j \in \{1, \dots, m\} \text{ s. t. } \rho_j \leq \nu_j) \\ e_i &= \bar{z}_{i1} \\ \dot{\bar{z}}_{i1} &= \bar{z}_{i2} \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-1)} &= \bar{z}_{i\nu_i} \\ \dot{\bar{z}}_{i\nu_i} &= \bar{z}_{i(\nu_i+1)} - \varepsilon L_{GM}L_{fM}^{\nu_i-1}h_{Mi}(x_M)u_M \\ &\vdots \\ \varepsilon \dot{\bar{z}}_{i(\rho_i-1)} &= \bar{z}_{i\rho_i} - \varepsilon^{\rho_i-\nu_i}L_{GM}L_{fM}^{\rho_i-2}h_{Mi}(x_M)u_M \\ \varepsilon \dot{\bar{z}}_{i\rho_i} &= -(r_{i(\rho_i-\nu_i)}\bar{z}_{i\rho_i} + \cdots + r_{i0}\bar{z}_{i\nu_i})\end{aligned}\quad (25)$$

$$e_i = \bar{z}_{i1} \quad (26)$$

$$\dot{\bar{z}}_{i1} = \bar{z}_{i2} \quad (27)$$

$$\vdots \quad (28)$$

$$\dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-1)} = \bar{z}_{i\nu_i}$$

$$\dot{\bar{z}}_{i\nu_i} = \bar{z}_{i(\nu_i+1)} - \varepsilon L_{GM}L_{fM}^{\nu_i-1}h_{Mi}(x_M)u_M$$

$$\vdots$$

$$\varepsilon \dot{\bar{z}}_{i(\rho_i-1)} = \bar{z}_{i\rho_i} - \varepsilon^{\rho_i-\nu_i}L_{GM}L_{fM}^{\rho_i-2}h_{Mi}(x_M)u_M$$

$$\varepsilon \dot{\bar{z}}_{i\rho_i} = -(r_{i(\rho_i-\nu_i)}\bar{z}_{i\rho_i} + \cdots + r_{i0}\bar{z}_{i\nu_i})$$

$$-r_{i0}(q_{i(\nu_i-2)}\bar{z}_{i(\nu_i-1)}+\cdots+q_{i0}\bar{z}_{i1})$$

$$(i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i) \quad (29)$$

そこで上記の系は特異摂動系とみなすことができる。

特異摂動系(27)に対する slow reduced 系を計算すると次式の Σ_0' が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{j1}^s &= \bar{z}_{j2}^s \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{j(\rho_j-1)}^s &= \bar{z}_{j\rho_j}^s \\ \dot{\bar{z}}_{j\rho_j}^s &= -q_{j(\rho_j-1)}\bar{z}_{j\rho_j}^s - \cdots - q_{j0}\bar{z}_{j1}^s \\ &\quad (j \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_j \leq \nu_j) \\ \dot{\bar{z}}_{i1}^s &= \bar{z}_{i2}^s \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-2)}^s &= \bar{z}_{i(\nu_i-1)}^s \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-1)}^s &= \bar{z}_{i\nu_i}^s \\ 0 &= \bar{z}_{i(\nu_i+1)}^s \\ &\vdots \\ 0 &= \bar{z}_{i\rho_i}^s \\ 0 &= (r_{i(\rho_i-\nu_i)}\bar{z}_{i\rho_i}^s + \cdots + r_{i0}\bar{z}_{i\nu_i}^s) \\ &\quad + r_{i0}(q_{i(\nu_i-2)}\bar{z}_{i(\nu_i-1)}^s + \cdots + q_{i0}\bar{z}_{i1}^s) \\ &\quad (i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i) \end{aligned} \quad (31)$$

さらにまとめると以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_{j1}^s &= \bar{z}_{j2}^s \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{j(\rho_j-1)}^s &= \bar{z}_{j\rho_j}^s \\ \dot{\bar{z}}_{j\rho_j}^s &= -q_{j(\rho_j-1)}\bar{z}_{j\rho_j}^s - \cdots - q_{j0}\bar{z}_{j1}^s \\ &\quad (j \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_j \leq \nu_j) \\ \dot{\bar{z}}_{i1}^s &= \bar{z}_{i2}^s \\ &\vdots \\ \dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-2)}^s &= \bar{z}_{i(\nu_i-1)}^s \\ \dot{\bar{z}}_{i(\nu_i-1)}^s &= -q_{i(\nu_i-2)}\bar{z}_{i(\nu_i-1)}^s - \cdots - q_{i0}\bar{z}_{i1}^s \\ &\quad (i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i) \end{aligned} \quad (32)$$

fast reduced 系は次式のように記述される。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_{i\nu_i}^f}{d\tau} &= \bar{z}_{i(\nu_i+1)}^f \\ &\vdots \\ \frac{d\bar{z}_{i(\rho_i-1)}^f}{d\tau} &= \bar{z}_{i\rho_i}^f \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_{i\rho_i}^f}{d\tau} &= -r_{i(\rho_i-\nu_i)}\bar{z}_{i\rho_i}^f - \cdots - r_{i0}\bar{z}_{i\nu_i}^f \\ &\quad - r_{i0}(q_{i(\nu_i-2)}\bar{z}_{i(\nu_i-1)}^f + \cdots + q_{i0}\bar{z}_{i1}^f) \\ &\quad (i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i) \end{aligned} \quad (34)$$

これらの系が定理3.1の条件(C1)～(C5)を満足していることを確認する。

(C1), (C2)に関して

f, f_M は十分滑らかであり, (14), (15)式は安定多項式と仮定しているので, 条件(C1), (C2)は満足される。

(C3)に関して

$$\frac{\partial g}{\partial y}(t, x^s(t), y^s(t), 0) = \begin{bmatrix} A_{i1}^f & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A_{\mu\mu}^f \end{bmatrix} \quad (35)$$

であり,

$$A_{ii}^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -r_{i0} & -r_{i1} & \cdots & -r_{i(\rho_i-\nu_i)} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i$$

の固有値 $\lambda(t)$ は(15)式($r(s)=0$)の解となるので, 条件(C3)は満足される。ここで, $y = \bar{z}^f$ である。

(C4)に関して

条件(C4)における dynamics を計算すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (f_x(t) - f_y(t)g_y^{-1}(t)g_x(t))x \\ &= \begin{bmatrix} A_{i1}^s & 0 \\ & \ddots \\ 0 & A_{kk}^s \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (37)$$

ここで,

$$A_{ii}^s = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_{i0} & -q_{i1} & \cdots & -q_{i(\rho_i-1)} \end{bmatrix} \quad i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i \leq \nu_i$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -q_{i0} & -q_{i1} & \cdots & -q_{i(\nu_i-2)} \end{bmatrix} \quad i \in \{1, \dots, m\} \text{ s.t. } \rho_i > \nu_i \quad (38)$$

である。上記の系の漸近安定性は Σ_0' の漸近安定特性と等価な条件なので条件(C4)は満足される。ここで, $x = \bar{z}^s$ である。

(C5)に関して

仮定(B4)に加えて, 各写像を解析的と仮定していることと局所性より条件(C5)は満足される。

よって特異摂動系(27)は補題3.1の条件(C1)～(C5)を満足するので, 補題3.1が適用可能であり

$$\bar{z}_{i1}(t, \varepsilon) = \bar{z}_{i1}^s + o(\varepsilon) \quad (39)$$

が成り立つ。また, Σ_0' は漸近安定であるので

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{z}_{i1}^s(t) = 0 \quad (40)$$

である。よって, $\bar{z}_{i1}(t, \varepsilon) = z_{i1}(t) = e_i(t)$ より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = o(\varepsilon) \quad (41)$$

が成立する。

Q. E. D.

(注意 3.1) 本定理においては入力が発散しないことや内部有界性は陽に要求してはいないので、仮定(B 3)は本質的には不必要である。しかしながら、仮定(B 3)のもとでは与えられた ε に対して $z_M(t)$ は有界となるため、内部状態の局所一様有界性が保証される。 $\square$

4. 例 題

制御対象 P を

$$\begin{aligned}\dot{z}_{P1} &= z_{P2} \\ \dot{z}_{P2} &= z_{P3} \\ \dot{z}_{P3} &= z_{P1}^2 + z_{P2}z_{P3} + u \\ \dot{\xi} &= z_{P1} - \xi \\ y_P &= z_{P1}\end{aligned}\quad (42)$$

とし、モデル M を

$$\begin{aligned}\dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} + u_M \\ \dot{x}_{M3} &= -x_{M1} - 2x_{M2} - x_{M3} + u_M \\ y_M &= x_{M1}\end{aligned}\quad (43)$$

とする。

上記の制御対象とモデルの相対次数はそれぞれ $\rho=3$, $\nu=2$ であり、この制御対象とモデルはモデル追従制御則が存在するための必要十分条件 $\rho \leq \nu$ を満足していないことがわかる。

このとき合成系は

$$\begin{aligned}e &= z_1 \\ \dot{z}_1 &= z_2\end{aligned}$$

Fig. 1 Plant output and model output ($\varepsilon=0.1$)

Fig. 2 Tracking error ($\varepsilon=0.1$)

$$\begin{aligned}\dot{z}_2 &= z_3 - u_M \\ \dot{z}_3 &= (z_{P1}^2 + z_{P2}z_{P3}) \\ &\quad - (-x_{M1} - 2x_{M2} - x_{M3}) + u - u_M \\ \dot{\xi} &= z_1 + x_{M1} - \xi \\ \dot{x}_{M1} &= x_{M2} \\ \dot{x}_{M2} &= x_{M3} + u_M \\ \dot{x}_{M3} &= -x_{M1} - 2x_{M2} - x_{M3} + u_M\end{aligned}\quad (44)$$

と記述される。ただし、 $z_i = z_{Pi} - x_{Mi}$ ($i=1, 2, 3$) である。本論文で提案した制御則は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned}u &= -(z_{P1}^2 + z_{P2}z_{P3}) + (-x_{M1} - 2x_{M2} - x_{M3}) + v \\ v &= \frac{1}{\varepsilon^2}[(r_1 \varepsilon z_3 + r_0 z_2) + r_0(q_0 z_1)]\end{aligned}\quad (45)$$

シミュレーション結果から、モデル M の出力 y_M と制御対象と動的補償器の合成系 $P \circ Q$ の出力 y_P との差すなわち追従誤差 e は時間が十分たったとき ε のオーダーにおさえられることが確認できる。

提案した制御則にバグゲイン項があるため、追従誤差がある範囲におさまるまで制御対象の入力 u は非常に大きな振幅をもつ。しかし、十分時間がたった後では安定な動作をしていることがわかる。また、制御対象の内部の dynamics も有界である。

ε を小さくすることによって追従誤差 e を小さくすることができる。また、十分時間がたった後の制御対象の入力 u は ε の変化に対してほとんど影響をうけないことがわかる。

Fig. 3 Internal dynamics of plant ($\varepsilon=0.1$)

Fig. 4 Plant input ($\varepsilon=0.1$)

Fig. 5 Tracking error

Fig. 6 Plant input

参 考 文 献

- 1) 石動, 島: Invariance の理論とその応用—VIII. モデル追従制御, システムと制御, **29**-5, 259/267 (1985)
- 2) 上田, 島: 非線形 Almost モデル追従制御, 第15回 DST シンポジウム資料, 249/252 (1992)
- 3) 上田, 島: 非線形 Almost モデル追従制御, 第25回 SICE 北海道支部学術講演会論文集, 91/92 (1993)
- 4) M. D. Di Benedetto: A Condition for the Solvability of the Nonlinear Model Matching Problem, New Trends in Nonlinear Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences **122**, 102/115, Springer-Verlag (1989)
- 5) M. D. Di Benedetto: Nonlinear Strong Model Matching, IEEE Trans., **AC-35**-12, 1351/1355 (1990)
- 6) H. J. C. Huijberts and H. Nijmeijer: Local Nonlinear Model Matching: From Linearity to Nonlinearity, Automatica, **26**-6, 973/983 (1990)
- 7) H. J. C. Huijberts, H. Nijmeijer: A Nonsingular Solution of the Nonlinear Dynamic Disturbance Decoupling Problem with an Application to a Complete Solution of the Nonlinear Model Matching Problem, SIAM Journal Control and Optimization, **30**-2, 350/366 (1992)
- 8) F. Hoppensteadt: Properties of Solutions of Ordinary Differential Equations with Small Parameters, Communications on Pure and Applied Mathematics, **24**, 807/840 (1971)
- 9) A. Isidori: Nonlinear Control Systems: An Introduction, 2nd Edition, Springer-Verlag (1989)
- 10) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly: Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, Academic Press (1986)
- 11) R. Marino, W. Respondek and A. J. van der Schaft: Almost Disturbance Decoupling for Single-Input Single-Output Nonlinear System, IEEE Trans., **AC-34**-9, 1013/1017 (1989)
- 12) L. L. M. van der Wegen: Local Disturbance Decoupling with Stability for Nonlinear Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences **166**, Springer-Verlag (1991)
- 13) J. C. Willems: Almost Invariant Subspace: an Approach to High-gain Feedback Design-Part I: Almost Controlled Invariant Subspaces, IEEE Trans., **AC-26**, 235/252 (1982)

[著 者 紹 介]

上 田 忠 一 (正会員)

1993年, 北海道大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了. 同年オムロン(株)入社. 現在, 同社中央研究所にて光電センサの研究, 開発に従事.

横 道 政 裕 (学生会員)

1992年, 北海道大学大学院工学研究科精密工学専攻修士課程修了. 95年同大学院同専攻博士後期課程修了. 同年より宮崎大学工学部情報工学科助手, 現在に至る. 幾何学的, 力学的手法を用いた非線形システム理論の研究に従事(博士(工学)).

石 動 善 久 (正会員)

1974年, 北海道大学工学研究科修士課程修了. 同年富士通(株)勤務. 76年北海道大学工学部精密工学科助手. 講師を経て, 87年同助教授, 現在に至る. 非線形制御理論およびディジタル制御の研究に従事. システム制御情報学会, 日本応用数理学会などの会員(工学博士).

島 公 脩 (正会員)

1963年, 京都大学工学部数理工学科卒業. 68年同大学大学院博士課程単位取得退学(工学博士). 同年大阪大学基礎工学部制御工学科助手, 70年京都大学工学部数理工学科助教授, 82年北海道大学工学部精密工学科教授, 現在に至る. 75年10月より76年9月まで, および94年4月より同年6月までINRIA 客員研究員. 81年榎木記念賞論文賞受賞. 非線形システム理論の研究に従事. システム制御情報学会, 日本機械学会などの会員.