非線形状態フィードバックによる線形化を考慮した 線形ロバスト補償器の設計および安定解析†

杉 江 俊 治*・川 西 通 裕**

Design and Stability Analysis of Linear Robust Compensators Considering Nonlinear State Feedback

Toshiharu SUGIE* and Michihiro KAWANISHI**

This paper is concerned with design and stability analysis for a class of nonlinear systems which are exactly linearizable via nonlinear state-feedback only. First, a modeling method for linearized systems is given, which reflects the uncertainties of both the physical parameters of the original nonlinear systems and the state-dependent nonlinear terms in a non-conservative way by using linear fractional representation. Second, a sufficient condition for the stability is given for the closed-loop system, which consists of linearized system and linear compensator, in the presence of parameter variations. Third, the effectiveness of the proposed method is evaluated by experiments on tracking control using a three-link DD manipulator.

Key Words: exact linearization, stability analysis, structured uncertainty, linear fractional representation, robust control

1. はじめに

非線形システムのうちあるクラスに属するものは、座標変換と非線形状態フィードバックを用いて厳密に線形化することが可能であり^{1), 2)}, 線形化後は通常の線形制御手法を用いて制御することができる。非線形システムに対するこのような制御方法は、実際の対象にも数多く応用されており、その有効性が多数報告されている。しかし、この厳密な線形化法により線形化された対象に対して H_∞ 制御などのロバスト制御手法を用いる場合、制御対象の不確かさをどのように評価するかが問題となる。特に線形化後のシステムの不確かさを周波数重み関数によって評価する場合など、この不確かさが元の非線形システムに対してどのような意味を持つのか甚だ曖昧なものとなってしまう。

本稿では、座標変換を用いることなしに、状態フィードバックのみによって厳密に線形化可能な非線形システムを考察対象として、物理パラメータが変動した場合に線形化後のシステムが有する不確かさを構造的に保守性なく評価する方法について考え、非線形線形状態フィードバックを含む制御系全体の安定解析を行なう方法について考察する。具体的には、近年構造的な不確かさに対する解析・設計手法^{3)~7)}が発展してきたことや、LFR に基づく非線形系の安定領域解析法^{8), 9)}などが提案されたことなどに注目し、まず、厳密に線形化した後のシステムが有する不確かさを構造的に保守性なく評価するためのモデリング法について示す。ここで構築するモデルは、物理パラメータ変動やパラメータ変動が生じた際システムに影響を及ぼす非線形な状態変数などの不確かさを、LFT 形式で陽に表現したものである。ついでこのモデルに基づいて、もとの非線形な対象と線形化補償器及び線形補償器からなる閉ループ系が、元の対象の物理パラメータ変動に対して安定となるための十分条件を示す。そして、この手法を 3 リンク DD ロボットマニピュレータに適用し、実験によりその有効性を検証する。

† 第 24 回制御理論シンポジウムで発表 (1995・6)

* 京都大学工学部 宇治市五ヶ庄

** 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* Faculty of Engineering, University of Kyoto, Uji

** Faculty of Engineering, University of Kobe, Kobe

(Received September 18, 1995)

(Revised February 16, 1996)

なお本稿では次の記号を用いる． Δ に対して行列 X が適当な次元に

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \quad (1)$$

のように分割されている時， $\mathcal{F}_u$ ， $\mathcal{F}_l$ はそれぞれ上および下線形分数変換を表し

$$\mathcal{F}_u(\Delta, X) := X_{22} + X_{21}\Delta(I - X_{11}\Delta)^{-1}X_{12} \quad (2)$$

$$\mathcal{F}_l(X, \Delta) := X_{11} + X_{12}\Delta(I - X_{22}\Delta)^{-1}X_{21} \quad (3)$$

で定義される．ここで I は単位行列を表し，次元数を明示する必要のある時，例えば n 次元単位行列は I_n などと表記する．また， ss はシステムの状態空間表現， $\text{col}(\cdot)$ は列方向への配置， $\overline{\sigma}(M)$ は行列 M の最大特異値 ($\sqrt{\max \lambda(M^T M)}$) をそれぞれ示す．

2. 非線形補償を考慮した不確かさの評価

2.1 問題設定

本稿では次式で表される非線形システムを考察の対象とする．

$$M_p(p, \theta, \dots, \theta^{(r-1)})\theta^{(r)} + K_p(p, \theta, \dots, \theta^{(r-1)})\dot{\theta} = N_p(p, \theta, \dots, \theta^{(r-1)})u \quad (4)$$

ここで $\theta \in R^n$ はプラントの状態変数ベクトルで $\theta^{(i)} = \frac{d^i \theta}{dt^i}$ ， $\dot{\theta} = \text{col}(\theta, \dots, \theta^{(r-1)})$ とし， $M_p(\cdot)$ ， $N_p(\cdot)$ は物理パラメータ p が公称値のとき常に正則であるものとする．また， p の i 番目の要素 p_i は M_p ， K_p ， N_p に多項式形式で含まれているものとする．この物理パラメータ p_i は公称値 p_{oi} に対して大きさ s_{p_i} の不確かさ δ_{p_i} ($\delta_{p_i} \leq 1$) を有し

$$p = p_o + s_p \delta_p \quad (5)$$

と表わされるものとする．ここで， p_o ， δ_p は p_{oi} ， δ_{p_i} を i 番目要素にもつ列ベクトル， s_p は s_{p_i} を i 行 i 列要素にもつ対角行列をそれぞれ表す．この (4) 式の制御対象は非線形状態フィードバック

$$u = N_p^{-1}\{M_p(p_o, \hat{\theta})v + K_p(p_o, \hat{\theta})\} \quad (6)$$

によって厳密に線形化可能である (Fig. 1 参照)．

制御対象の物理パラメータが公称値のとき線形化後の制御対象は $\theta^{(r)} = v$ となるが，考察する制御対象は物理パラメータ p に不確かさが存在するので，この線形可後のプラントは不確かさを有する．

そこで本論文では以下の問題を考える．

問題 元の非線形システムの物理パラメータ p が変動したとき，厳密に線形化した後のシステムが有する不確

Fig. 1 Closed loop system

かさを保守性なく評価せよ．また，Fig. 1 で示される閉ループ系が安定となるための条件を求めよ．

2.2 物理パラメータ変動の厳密な評価法

本項では，LFT の性質を有効に用いて前項の問題に対する評価法を示す．新たな変数 $f(\theta, \dots, \theta^{(r-1)})$ を用いて (4) 式を

$$M_p(p, f(\hat{\theta}))\theta^{(r)} + K_p(p, f(\hat{\theta}))\dot{\theta} = N_p(p, f(\hat{\theta}))u \quad (7)$$

と表記する．ここで， $f(\hat{\theta})$ の第 i 要素 $f_i(\hat{\theta})$ は M_p ， K_p ， N_p に多項式形式で含まれるように選ばれているものとする． $f_i(\hat{\theta})$ は状態の関数として記述される時変な要素であり，以後 $f_i(t)$ と表記する．この $f_i(t)$ は定数公称値 f_{oi} に対して大きさ s_{f_i} の範囲で変動し

$$f(t) = f_o + s_f \delta_f(t) \quad (8)$$

と表わされるものとする．ただし $\delta_{f_i}(t)$ は時変要素で $|\delta_{f_i}(t)| \leq 1$ ， f_o ， δ_f はそれぞれ f_{oi} ， $\delta_{f_i}(t)$ を第 i 番要素にもつ列ベクトル， s_f は s_{f_i} を第 i 行 i 列にもつ定数対角行列であるとする (注1)．

ここで $M_\Delta \stackrel{\text{def}}{=} [M_p \ K_p \ N_p]$ とすると，不確かな物理パラメータ p 及び時変項 f はこの M_Δ に多項式形式で含まれているので

$$M_\Delta = \mathcal{F}_u(\Delta, M) \quad (9)$$

ただし

$$\Delta = \text{diag}\{\Delta_p, \Delta_f(t)\} \quad (10)$$

$$\Delta_p = \text{diag}\{\delta_{p_1} I_{r_1}, \dots, \delta_{p_N} I_{r_N}\} \quad (11)$$

$$\Delta_f(t) = \text{diag}\{\delta_{f_1}(t) I_{R_1}, \dots, \delta_{f_N}(t) I_{R_N}\} \quad (12)$$

(注1) ここで，状態の関数 $f_j(t)$ の変動幅を評価する理由は，例えば，状態 f_j のフィードバックにより $p_i f_j^2$ なる非線形項を打ち消しているときに，物理パラメータ p_i が $\hat{p}_i$ に Δp_i だけ変化した場合，制御対象は打ち消しきれない量 $p_i f_j^2 - \hat{p}_i f_j^2 = \Delta p_i f_j^2$ をその不確かさとして有することになり，状態の関数 f_j の変動幅が不確かさの大きさに影響するからである．

$$M = \left[\begin{array}{c|c} M_{11} & [M_{12a} \ M_{12b} \ M_{12c}] \\ \hline M_{21} & [M_{po} \ K_{po} \ N_{po}] \end{array} \right] \quad (13)$$

と LFT 形式で取り出すことができる¹⁰⁾。ここで M_{po} K_{po} N_{po} はそれぞれ $M_p(p_o, f_o)$, $K_p(p_o, f_o)$, $N_p(p_o, f_o)$ を示すものとし、問題設定における仮定より $\det M_{po} \neq 0$, $\det N_{po} \neq 0$ である。また、これらも含めて M の各要素は時不変の定数行列であることに注意する。この LFT を構成する際は必ず

$$M_{11} = \left[\begin{array}{cc} M_{11}^{(11)} & 0 \\ M_{21}^{(11)} & M_{22}^{(11)} \end{array} \right] \quad (14)$$

$$M_{11}^{(11)} \in R^{q \times q}, M_{21}^{(11)} \in R^{\hat{q} \times q}, M_{22}^{(11)} \in R^{\hat{q} \times \hat{q}} \quad (15)$$

と構成することが可能¹⁰⁾なので現在この形式になっていると仮定する。ここで

$$q = \sum_{i=1}^N r_i, \quad \hat{q} = \sum_{i=1}^{\hat{N}} R_i \quad (16)$$

である。なお、この $\Delta_f(t)$ の次元 $\hat{q}$ は (7) 式中の多項式 f が高次であるほど、また、これらが係数行列中に多数存在するほど大きな値となるので、(4) 式のシステムの一種の非線形度を表わしていると考えることができる。

つぎに、非線形状態フィードバックにより対象を線形化する。(7) 式を線形化する非線形補償は

$$u = N_p^{-1}(p_o, f) \{ M_p(p_o, f)v + K_p(p_o, f)\hat{\theta} \} \quad (17)$$

となるが、 $T = [0_{\hat{q} \times q} \ I_{\hat{q}}]$ として

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{12a} &= TM_{12a} & \tilde{M}_{12b} &= TM_{12b} \\ \tilde{M}_{12c} &= TM_{12c} \end{aligned} \quad (18)$$

とし、物理パラメータが公称値 p_o のときの係数行列が

$$\begin{aligned} & N_p^{-1}(p_o, f) \\ &= \mathcal{F}_u \left(\Delta_f, \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} M_{22}^{(11)} - \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} M_{21} \\ -N_{po}^{-1} M_{21} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} \\ N_{po}^{-1} \end{array} \end{array} \right] \right) \end{aligned} \quad (19)$$

$$M_p(p_o, f) = \mathcal{F}_u \left(\Delta_f, \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} M_{22}^{(11)} \\ M_{21} \end{array} & \begin{array}{c} \tilde{M}_{12a} \\ M_{po} \end{array} \end{array} \right] \right) \quad (20)$$

などと表されることに注意すると、この非線形補償を (4) 式に施した際に現れる M_p , K_p , $N_p N_{po}^{-1} M_{po}$, $N_p N_{po}^{-1} K_{po}$ などの項は LFT の性質を用いた計算により

$$[M_p \ K_p \ N_p N_{po}^{-1} M_{po} \ N_p N_{po}^{-1} K_{po}] = \mathcal{F}_u(\hat{\Delta}, \hat{M}) \quad (21)$$

ただし

$$\hat{\Delta} = \text{diag}\{\Delta_p \ \Delta_f(t) \ \Delta_f(t) \ \Delta_f(t)\} \quad (22)$$

Fig. 2 LFT system

$$\hat{M} = \left[\begin{array}{c|c} \hat{M}_{11} & [\hat{M}_{12a} \ \hat{M}_{12b} \ \hat{M}_{12c} \ \hat{M}_{12d}] \\ \hline \hat{M}_{21} & [M_{po} \ K_{po} \ M_{po} \ K_{po}] \end{array} \right] \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}_{11} &= \\ \left[\begin{array}{cccc} M_{11} & -M_{12c} N_{po}^{-1} M_{21} & M_{12c} N_{po}^{-1} M_{21} & \\ 0 & M_{22}^{(11)} - \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} M_{21} & \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} M_{21} & \\ 0 & 0 & M_{22}^{(11)} & \end{array} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

$$[\hat{M}_{12a} \ \hat{M}_{12b} \ \hat{M}_{12c} \ \hat{M}_{12d}] = \quad (25)$$

$$\left[\begin{array}{cccc} M_{12a} & M_{12b} & M_{12c} N_{po}^{-1} M_{po} & M_{12c} N_{po}^{-1} K_{po} \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} M_{po} & \tilde{M}_{12c} N_{po}^{-1} K_{po} \\ 0 & 0 & \tilde{M}_{12a} & \tilde{M}_{12b} \end{array} \right]$$

$$\hat{M}_{21} = [M_{21} \ -M_{21} \ M_{21}] \quad (26)$$

と表すことができる。以上より非線形状態フィードバックを施した (4) 式は

$$\begin{aligned} & (M_{po} + \Phi \hat{M}_{12a}) \theta^{(r)} + (K_{po} + \Phi \hat{M}_{12b}) \hat{\theta} = \\ & (M_{po} + \Phi \hat{M}_{12c}) v + (K_{po} + \Phi \hat{M}_{12d}) \hat{\theta} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。ただし $\Phi = \hat{M}_{21} \hat{\Delta} (I - \hat{M}_{11} \hat{\Delta})^{-1}$ である。よって不確かさ $\hat{\Delta}$ を評価する制御対象は、スター積¹¹⁾などを計算することによって

$$G(s) \stackrel{ss}{=} \quad (28)$$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \begin{array}{cc} 0 & I_{n(r-2)} \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ M_{po}^{-1} \hat{M}_{21} \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ I_n \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \Psi_a \\ I_{n(r-1)} \end{array} & \begin{array}{c} \hat{M}_{11} - \hat{M}_{12a} M_{po}^{-1} \hat{M}_{21} \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} \Psi_b \\ 0 \end{array} \end{array}$$

と構成することができる。ここで $\Psi_a = \hat{M}_{12d} - \hat{M}_{12b}$, $\Psi_b = \hat{M}_{12c} - \hat{M}_{12a}$ である。この $G(s)$ を Fig. 2 に示す。

この $G(s)$ と $\hat{\Delta}$ を適当な基本行列によって変換することにより、最終的には線形化後のシステムが有する不確かさは

$$\hat{\Delta}^* = \text{diag}\{\Delta_p, \delta_{f_1} I_{3R_1}, \dots, \delta_{f_N} I_{3R_N}\} \quad (29)$$

とまとめることができる。なお変換後の $G(s)$ は $G(s)^*$ と表記する。

[注意] 変数変換 f の程度によって保守性が導入されることになるので、真に厳密に評価できるのは $f_i = \hat{\theta}_i$ あるいは f_i が $\hat{\theta}_i$ のみの関数の場合、つまり $\hat{\theta}_i$ のみの関数が係数行列 M_p, K_p, N_p に多項式形式に含まれる場合のみとなる。これまで係数行列に対してアフィンな不確かさを評価することが多く行われてきたが、これはここでは係数行列の各要素を f_i として評価することに対応し、この場合物理パラメータ変動の構造的な情報を用いていないので、不確かさの評価は本論文で提案した手法よりも保守的なものとなる。

3. 安定解析

本章では、前章で導出した Fig. 2 に示される制御系のモデル、つまり物理パラメータ変動による時不変な不確かさ及び状態に依存する時変な不確かさの重複スカラー形式 LFR に基づいて、元の Fig. 1 に示される制御系が安定となるための条件について考える。なお、本章では Fig. 2 に示されるシステム $\mathcal{F}_l(\hat{\Delta}, G)$ の状態を $x(t)$ と表記する。

実際の制御対象の状態が動く空間は有界であることが期待され、制御系の安定性を保証したい領域は事前に制御要求から類推・決定できる。このような領域を

$$S_\sigma = \{x \mid |x_i| \leq \sigma_i, i = 1, \dots, n\} \quad (30)$$

で表すものとする。ここで σ_i は領域の境界を与える正の実定数である。この S_σ から、状態の関数で表される時変な不確かさ δ_{f_i} の大きさ s_{f_i} は決定され、Fig. 2 で表されるシステムの中にパラメータとして含まれる。 $\hat{\Delta}^*$ を単なる時変要素を含む構造的な不確かさとみなすと、Fig. 2 の対象が安定となるための十分条件は、スケーリングつきスモールゲイン定理によって

$$\sup_{\omega} \inf_D \|D^{-1}(j\omega) \mathcal{F}_l(G^*, K)(j\omega) D(j\omega)\| < 1 \quad (31)$$

ただし、

$$D(s) = \{\text{diag}\{d_{p_1}(s), \dots, d_{p_N}(s), d_{f_1}, \dots, d_{f_{\hat{N}}}\} \\ : d_{p_i}(s) \in RH_{\infty}^{r_i \times r_i}, d_{f_i} \in R^{3R_i \times 3R_i}\} \quad (32)$$

と表されるが、Fig. 2 に示されるシステムの時変な不確かさは領域 S_σ に依存する状態の関数であるので、これに加えて S_σ が不変領域であることが条件として必要となる。なお、不変領域とは、 $x(0) \in \mathcal{R}$ ならば $\forall t \geq 0, x(t) \in \mathcal{R}$ であるような領域 $\mathcal{R}$ を示す^{12) 13)}。ここでは、領域 S_σ が楕円領域ではなく(30)式のようなポリトピックな領域としてより自然に表現されることを鑑み、 S_σ とその指定許容誤差 ε_o が与えられているとして

$$S_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_o) = \{x \mid |x_i| \leq (1 - \varepsilon_o)\sigma_i, i = 1, \dots, n\} \quad (33)$$

で定義される領域 $S_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_o)$ に初期値 $x(0)$ が入っているならば $(x(0) \in S_{\sigma\varepsilon})$ 、以後 $\forall t \geq 0, x(t) \in S_\sigma$ となるための条件について考える。

まず、このシステムのある楕円領域 $\mathcal{P} = \{\xi \mid \xi^T P^{-1} \xi \leq 1, P = P^T > 0\}$ が不変領域となるための条件について考える。(31)式を満たすスケーリング $D(s)$ を含む閉ループの状態空間表現を

$$D^{-1} \mathcal{F}_l(G^*, K) D \stackrel{ss}{=} \begin{cases} \dot{\xi} = A_{cl} \xi + B_{cl} w \\ z = C_{cl} \xi + D_{cl} w \end{cases} \quad (34)$$

とする。ただし、 $\xi = \text{col}(x, \hat{x})$ であり、 $\hat{x} \in R^{\hat{n}}$ は補償器および動的スケーリングの状態を表わすものとする。 $\hat{\Delta}^* \leq 1$ より、 $w^T w \leq z^T z$ が成立しているので(34)式を用いると

$$w^T (I - D_{cl}^T D_{cl}) w - \xi^T C_{cl}^T C_{cl} \xi \\ - \xi^T C_{cl}^T D_{cl} w - w^T D_{cl}^T C_{cl} \xi \leq 0 \quad (35)$$

が成立する。また、不変領域であるためにはリアプノフ関数 $V = \xi^T P^{-1} \xi$ は単調減少 $\dot{V} \leq 0$ でなければならず、(34)式より

$$\xi^T (A_{cl}^T P^{-1} + P^{-1} A_{cl}) \xi + w^T B_{cl}^T P^{-1} \xi \\ + \xi^T P^{-1} B_{cl} w \leq 0 \quad (36)$$

が成立する。これら(35)、(36)式が任意の $\xi, w \neq 0$ に対して成立すれば良いので、S-Procedure¹³⁾を用いて2式をまとめ、双対な形式で書き表すと、領域 $\mathcal{P}$ が不変領域となるための必要十分条件は

$$\Phi(P, \tau) := \quad (37)$$

$$\begin{bmatrix} P A_{cl}^T + A_{cl} P + \tau B_{cl} B_{cl}^T & P C_{cl}^T + \tau B_{cl} D_{cl}^T \\ C_{cl} P + \tau D_{cl} B_{cl}^T & \tau (D_{cl} D_{cl}^T - I) \end{bmatrix} \leq 0$$

を満たす変数 P および $\tau \geq 0$ が存在すること、と表される。なお、(31)式が成立している時は、このような不変領域 $\mathcal{P}$ の存在性は自明であり、必ず存在する。以上のような不変領域 $\mathcal{P}$ が存在し、

$$\tilde{S}_\sigma := \{\text{col}(x, \hat{x}) \mid x \in S_\sigma, |\hat{x}_i| \leq \sigma_i\} \quad (38)$$

$$\tilde{S}_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_o) := \{\text{col}(x, o) \mid x \in S_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_o), o \in R^{\hat{n}}\} \quad (39)$$

$$= \text{Co}\{v_1(\varepsilon_o), \dots, v_{2n}(\varepsilon_o)\} \quad (40)$$

ただし、 σ_i は十分大きな実定数、 $v_i(\varepsilon_o)$ は ε_o を線形に含む列ベクトル、 $\text{Co}\{\cdot\}$ は引数の端点ベクトルからなる凸包、と定義される領域 $\tilde{S}_\sigma$ 、 $\tilde{S}_{\sigma\varepsilon}$ に対して $\tilde{S}_{\sigma\varepsilon} \subseteq \mathcal{P} \subseteq \tilde{S}_\sigma$ を満たしているならば、所望の条件 $(x(0) \in S_{\sigma\varepsilon} \Rightarrow \forall t, x(t) \in S_\sigma)$ は達成される。ここで $\tilde{S}_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_o) \subseteq \mathcal{P}$ の条件は

$$\Psi_i(P, \varepsilon_o) := \begin{bmatrix} 1 & v_i^T(\varepsilon_o) \\ v_i(\varepsilon_o) & P \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, \dots, 2^n \quad (41)$$

Fig. 3 3-link-DD-manipulator

であり, σ_l が十分大きな実定数であることを考慮すると, $\mathcal{P} \subseteq \tilde{\mathcal{S}}_\sigma$ は

$$\Theta_j(\mathcal{P}) := e_j^T \mathcal{P} e_j \leq \sigma_j^2, \quad j = 1, \dots, n \quad (42)$$

ただし e_j は自然基底, となるので以上まとめると次の定理を得る.

《定理 1》 (4), (6) 式からなる Fig. 1 の制御系が, 初期状態 $\mathbf{x}(0) \in S_{\sigma\varepsilon}(\varepsilon_0)$ のもとで線形補償器 $K(s)$ によって内部安定となるための十分条件は

$$\sup_{\omega} \inf_D \|D^{-1}(j\omega) \mathcal{F}_l(G^*, K)(j\omega) D(j\omega)\| < 1 \quad (43)$$

$$\exists \mathcal{P} = \mathcal{P}^T > 0, \exists \tau \geq 0, \exists \varepsilon \quad \varepsilon_0 \geq \min \varepsilon \quad \text{s.t.}$$

$$\Phi(\mathcal{P}, \tau) \leq 0, \quad \Psi_i(\mathcal{P}, \varepsilon) \geq 0, \quad \Theta_j(\mathcal{P}) \leq \sigma_j^2 \quad (44)$$

$$i = 1, \dots, 2^n, \quad j = 1, \dots, n$$

[注意] 動的補償器を設計する場合など, 一般に (43) や Φ は双線形不等式 (BMI) になるが, これに Ψ, Θ の線形不等式 (LMI) を制約条件として加えることによって目的の最適化補償器を得ることができる. この双線形不等式の最適化については文献 (14)(15) に詳しい.

4. 3 リンク DD マニピュレータへの応用

本節では前節で示した評価法を用いて, 3 リンク DD マニピュレータの制御系設計・解析を行なう.

4.1 装置概要

実験に用いた 3 リンク DD マニピュレータの概略図を Fig. 3 に示す. 3 リンク DD マニピュレータの運動方程式は簡単のために関節に働く粘性摩擦, クーロン摩擦等を無視して, ラグランジュの方法によって次のように求める.

$$\begin{aligned} \tau_1 = & \ddot{\theta}_1 \{m_1 l_{g1}^2 + m_2 (l_1^2 + l_{g2}^2 + 2l_1 l_{g2} C_2) \\ & + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{g3}^2 + 2l_1 l_2 C_2 \\ & + 2l_2 l_{g3} C_3 + 2l_1 l_{g3} C_{23}) + J_1 + J_2 + J_3 \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \ddot{\theta}_2 \{m_2 (l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} C_2) \\ & + m_3 (l_2^2 + l_{g3}^2 + l_1 l_2 C_2 + 2l_2 l_{g3} C_3 \\ & + l_1 l_{g3} C_{23}) + J_2 + J_3 \} \\ & + \ddot{\theta}_3 \{m_3 (l_{g3}^2 + l_2 l_{g3} C_3 + l_1 l_{g3} C_{23}) + J_3 \} \\ & - \dot{\theta}_2^2 \{m_2 l_1 l_{g2} S_2 + m_3 (l_1 l_2 S_2 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \\ & - \dot{\theta}_3^2 \{m_3 (l_2 l_{g3} S_3 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \\ & - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \{m_2 l_1 l_{g2} S_2 + m_3 (l_1 l_2 S_2 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \\ & - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \{m_3 (l_2 l_{g3} S_3 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \\ & - 2\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \{m_3 (l_2 l_{g3} S_3 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = & \ddot{\theta}_1 \{m_2 (l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} C_2) \\ & + m_3 (l_2^2 + l_{g3}^2 + 2l_2 l_{g3} C_3 + l_1 l_2 C_2 + l_1 l_{g3} C_{23}) \\ & + J_2 + J_3 \} \\ & + \ddot{\theta}_2 \{m_2 l_{g2}^2 + m_3 (l_2^2 + l_{g3}^2 + 2l_2 l_{g3} C_3) + J_2 + J_3 \} \\ & + \ddot{\theta}_3 \{m_3 (l_{g3}^2 + l_2 l_{g3} C_3) + J_3 \} \\ & + \dot{\theta}_1^2 \{m_2 l_1 l_{g2} S_2 + m_3 (l_1 l_2 S_2 + l_1 l_{g3} S_{23})\} \\ & - \dot{\theta}_3^2 \{m_3 l_2 l_{g3} S_3\} \\ & - 2\dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \{m_3 l_2 l_{g3} S_3\} - 2\dot{\theta}_3 \dot{\theta}_1 \{m_3 l_2 l_{g3} S_3\} \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \tau_3 = & \ddot{\theta}_1 \{m_3 (l_{g3}^2 + l_2 l_{g3} C_3 + l_1 l_{g3} C_{23}) + J_3 \} \\ & + \ddot{\theta}_2 \{m_3 (l_{g3}^2 + l_2 l_{g3} C_3) + J_3 \} + \ddot{\theta}_3 \{m_3 l_{g3}^2 + J_3 \} \\ & + \dot{\theta}_1^2 \{m_3 (l_2 l_{g3} S_3 + l_1 l_{g3} S_{23})\} + \dot{\theta}_2^2 \{m_3 l_2 l_{g3} S_3\} \\ & + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \{m_3 l_2 l_{g3} S_3\} \end{aligned} \quad (47)$$

ただし記号 $S_2 = \sin(\theta_2)$, $C_{23} = \cos(\theta_2 + \theta_3)$ を表し, 各パラメータは θ_i : 関節 i の回転角度 [rad], τ_i : 関節 i の駆動トルク [Nm], m_i : リンク i の質量 [kg], J_i : リンク i の軸まわりの慣性モーメント [kgm^2], l_i : リンク i の長さ [m], l_{gi} : 重心までの長さ [m] のように定義する. なおリンクは付け根の方からリンク 1, 2, 3 とする.

4.2 制御仕様および補償器設計

前項のマニピュレータに対し, 次の制御仕様を考える.

[制御仕様] 手先効果器 400[g] に対してその約 65% に相当する 259[g] の物体を把持したとき, 安定に精度良く目標軌道を追従する.

なおここでは, D-K 反復法によりまず (43) 式を満たす補償器を設計し, その後 (44) の条件が成立することを確認するという方法で補償器設計を行なう.

このロボットマニピュレータが物体を把持すると運動方程式の物理パラメータ m_3, J_3 が摂動するので, これらの変動を提案した手法により取り出して評価する. この

Fig. 4 Scaled norm plots

結果, 不確かさは (スター積をとる前の形)

$$\Delta = \text{diag}(m_3 I_6, J_3 I_3, \cos \theta_2 I_8, \sin \theta_2 I_8, \cos \theta_3 I_9, \sin \theta_3 I_9, \dot{\theta}_1 I_{13}, \dot{\theta}_2 I_6, \dot{\theta}_3 I_6) \quad (48)$$

と 68 次のブロックとなるが, 低次元化手法¹⁰⁾により

$$\Delta^* = \text{diag}(m_3 I_6, J_3 I_1, \cos \theta_2 I_8, \sin \theta_2 I_8, \cos \theta_3 I_6, \sin \theta_3 I_8, \dot{\theta}_1 I_3, \dot{\theta}_2 I_3, \dot{\theta}_3 I_2) \quad (49)$$

と 45 次まで低次元化することができる。解析にはこの厳密な不確かさ表現を用いるが, 補償器設計にはより簡単に, 位置に関する摂動項および速度に関する摂動項をそれぞれ同一の時変パラメータ $f_p(t)$, $f_v(t)$ によるものとしてとらえ, 前節の評価法により

$$\bar{\Delta} = \text{diag}\{m_3 I_6, J_3 I_3, f_p(t) I_{10}, f_v(t) I_5\} \quad (50)$$

と 24 次のブロックとして表現したものを用いる。ここで, 不確かさ表現による違いを比較するため, あらかじめループ整形により設計した補償器の Scaled Norm 解析を行なった結果を Fig. 4 に示す。ここで実線, *は本稿 2 節の評価法に基づくそれぞれ 68 次, 24 次の不確かさ表現によるものであり, 破線は文献 16) に基づくディスクリプター形式を用いた 18 次の不確かさ表現によるものである。なお, 24 次の Scaled Norm が 68 次のもよりも小さいのは本来異なる時変な変動を同一のものであると簡略化して考えているためであり, 24 次の表現は不確かさの厳密な表現を与えていないので解析に用いることはできない。また予想される通り, よりシステムの構造を考慮して評価した実線の 68 次の表現の方が破線のディスクリプター 18 次よりも保守性が少ないことをグラフのピーク値を比較することによって確認できる。

制御性能として第 1, 2, 3 軸 (根元側) の出力端の感度を考え, 各軸の感度に対して周波数重み関数 W_{S1} , W_{S2} , W_{S3} をそれぞれ

Fig. 5 Scaled norm plot

$$W_{S1} = W_{S2} = \frac{\frac{1}{1000}s + 1}{\frac{1}{0.1}s + 1} \times 5000 \quad (51)$$

$$W_{S3} = \left(\frac{\frac{1}{1000}s + 1}{\frac{1}{100}s + 1} \times 4 \right)^2 \quad (52)$$

として与える。また, S_σ , ε_o は

$$S_\sigma = \{-1 < \theta_i < 1, -1 < \dot{\theta}_i < 1, i = 1, 2, 3\} \quad (53)$$

$\varepsilon_o = 0.1$ とする。これらの設計パラメータを用いて定数スケールリングのみを用いた D-K 反復を 4 回行ない, 10 次の補償器を得る。ここで得られた補償器に対して, 68 次の不確かさ表現を用いて厳密に Scaled Norm の解析を行なった結果を Fig. 5 に示す。Scaled Norm の上限が 1 以下となっており, また (44) 式を満たす P, τ, ε が存在したことから, 制御系は物理パラメータ変動に対してロバストに安定性を保持するものと期待される。

4.3 実験

目標軌道は x - y 平面上における半径 10[cm]・周期 2[s] の円軌道とし, ロボットマニピュレータの手先効果器には制御仕様の通りその 65%に相当する 259[g]のおもりを把持して, 軌道追従実験を行なう。制御実験は端末 NEC PC9821 Xa (Pentium 90MHz) に補償器を実装し, サンプルングタイム 0.75[ms] で行なった。なお, 実験に用いたリンク 1~3 のエンコーダのパルスはそれぞれ $12,000 \times 4, 12,000 \times 4, 4,500 \times 4$ であり, 速度信号として, このエンコーダから得られた位置信号の信号の差分にカットオフ周波数 100[Hz] のローパスフィルタをかけたものを用いた。前項で設計した補償器による実験結果を Fig. 6, Fig. 7 にそれぞれ示す。Fig. 6 は x 軸方向について, 破線が目標値, 実線が実験結果を示しているが両者はよく一致している。また Fig. 7 は追従誤差のノルム $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ を示している。この追従誤差は十分小さく, 制御性能として満足できるものを達成できており, 本論文の安定解析及びそれに基づく補償器の

Fig. 6 Tracking trajectory

Fig. 7 Norm of trajectory tracking

設計は十分に実用的でありかつ有効なものであると思われる。

5. おわりに

本稿では、非線形状態フィードバックによって厳密に線形化可能な非線形システムのクラスについて、物理パラメータ変動によって線形化後の制御対象が有する不確かさを保守性なく評価するモデリング法を提案した。また、非線形な制御対象の物理パラメータが変動した場合、この線形化のための非線形状態フィードバックを含む制御系が安定となるための十分条件を示した。また、この手法を3リンクDDマニピュレータに適用し、その有効性を検証した。

参考文献

- 1) Alberto Isidori : *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, 2 edition (1989)
- 2) 石島, 島, 石動, 山下, 三平, 渡辺 : 非線形システム論, 計測自動制御学会, 第1版 (1993)
- 3) A. Packard and J. Doyle : The Complex Structured Singular Value, *Automatica*, **29**-1, 71/109 (1993)
- 4) M. Fan, A. Tits and J. Doyle : Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics, *IEEE Trans. Automatic Control*, **36**-1, 25/38 (1991)

- 5) P. Young and J. Doyle : Computation of μ with Real and Complex Uncertainties, *Proc. 29th IEEE Conference on Decision and Control*, 1230/1235 (1990)
- 6) Jeff S. Shamma : Robust Stability with Time-Varying Structured Uncertainty, *IEEE Trans. Automatic Control*, **39**-4, 714/724 (1994)
- 7) Jeff S. Shamma : Robust Stability analysis of time-varying systems using time-varying quadratic forms, *Systems & Control Letters*, **25**, 13/17 (1995)
- 8) L. E. Ghaoui : State-Feedback Control of Rational Systems Using Linear-Fractional Representations and LMIs, *Proc. American Control Conference*, 3563/3567 (1994)
- 9) L. E. Ghaoui and G. Scorletti : Performance Control of Rational Systems Using Linear-Fractional Representations and LMIs, *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2792/2797 (1994)
- 10) 杉江, 川西 : 厳密な物理パラメータ変動表現に基づく μ 解析, 計測自動制御学会論文誌, **31**-12, 1936/1944 (1995)
- 11) K. Zhou, A. Packard and J. Doyle : Review of LFTs, LMIs, and μ (1991)
- 12) M. Vidyasagar : *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice Hall, 2 edition (1992)
- 13) S. Boyd and L. E. Ghaoui and E. Feron and V. Balakrishnan : *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM, 1 edition (1994)
- 14) K. C. Goh, L. Turan and M. G. Safonov : Bi-affine Matrix Inequality Properties and Computational Methods, *Proc. American Control Conference*, 850/855 (1994)
- 15) K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos : A Global Optimization Approach for the BMI Problem, *Proc. 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 2009/2014 (1994)
- 16) 石井, 申, 田村 : ロバスト H_∞ の準最適制御問題を用いたマニピュレータの軌道追従コントローラ的设计, 第37回自動制御連合講演会 前刷, 75/76 (1994)

【著者紹介】

杉江 俊治 (正会員)

1978年京都大学大学院修士課程修了, 84年同博士後期課程研究指導認定退学, 85年大阪府立大学工学部助手, 88年京都大学工学部助教授。ロバスト制御, ロボット工学の研究に従事。工学博士。システム制御情報学会, ロボット学会, IEEEの会員。

川西 通裕 (学生会員)

1992年京都大学工学部物理工学科卒業, 94年同大学大学院工学研究科応用システム科学修士課程修了, 96年同博士課程中途退学, 神戸大学工学部機械工学科助手に任用。ロバスト制御の研究に従事。システム制御情報学会, 日本機械学会の会員。