オブザーバフィードバックによる厳密線形化[†]

宋 日 耀*・石 島 辰太郎*・児 島 晃*

Observer Based Linearization of I/O Linearizable MIMO Nonlinear Systems

Ri-yao SONG*, Shintaro ISHIJIMA* and Akira KOJIMA*

In this paper, instead of trying to establish the design method of general purpose observers, we propose a design method of the special purpose observers which will be used in the feedback linearization of MIMO linearizable nonlinear systems. The basic idea of this method is as follows. We assume there exists an observer and construct a so-called pseudo-linearized model by imposing the observer-based linearizing control law on the original system first and then design the observer. It is striking to note that the nonlinear observer thus obtained possesses a standard linear structure, which makes a practical nonlinear closed-loop control system considerably easy to implement. manipulator case is presented to illustrate the design method. A sufficient condition for Separation Principle in the weak sense that the control design does not influence the observer design, and the observer design does not depend on the new input is also derived.

Key Words: nonlinear systems, observers, linearization, stabilization, closed-loop.

1. はじめに

非線形系の制御において、厳密線形化と線形制御理論を併用するアプローチは制御系設計の代表的な手法の一つである。問題は厳密線形化のプロセスでは状態フィードバックが必要とされるが、現実には状態量すべてが直接観測可能とは限らないことである。そこで非線形系に対するオブザーバが必要となるが、これまでの所十分な汎用性をもつオブザーバの設計法は知られていない。これは非線形系の場合、線形の場合と異り、誤差方程式の収束性は入力に依存するという新たな問題が生じるためである。すなわち、非線形系においてはいわゆる観測と制御の「分離定理」(separation principle)は成立せず、オブザーバの設計には入力に関係する。

こうした観点から、本論文では非線形系に対する汎用オブザーバの設計というアプローチを放棄し、一定のクラスの制御則を前提とした専用オブザーバの設計を提案する。こうしたオブザーバは制御則の汎用性を犠牲には

するが、許容される制御則のクラスが一定の要求を満足する程度に大きいとすれば期待されるオブザーバの構造の簡略化、設計の容易さなどから十分に実用性をもつものと考えられる。そこで、ここでは許容制御のクラスを厳密線形化制御則と変換される線形系に対する有界な入力によって構成されるものとし、こうした許容制御に対する専用オブザーバを考える。オブザーバ設計の基本的なアイデアはつぎのように示される。

いま、次式で示される厳密線形化可能な非線形システム、

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + B\beta(z)^{-1}(u - \alpha(z)) \\ y &= Cz\end{aligned}\quad (1)$$

に対して状態推定オブザーバが存在したと仮定し、その推定値を $\hat{z}$ とする。この仮想オブザーバからの出力 $\hat{z}$ を線形化フィードバックに代入すれば、

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + B\beta(\hat{z})^{-1}(\alpha(\hat{z}) - \alpha(z) + \beta(\hat{z})v) \quad (2)$$

を得る。このシステムは状態推定値が十分精度の高いものであれば線形システムと考えられるので、以下では擬似線形化モデルと呼ぶことにする。また、擬似線形化モデルのふるまいはつぎの線形システムに漸近することがわかる。

[†] 第19回 DST シンポジウムで発表(1995.11)

* 東京都立科学技術大学 日野市旭が丘 6-6

* Tokyo Metropolitan Institute of Technology, Hino
(Received August 31, 1995)

(Revised July 31, 1996)

$$\begin{aligned}\dot{z} &= Az + Bv \\ y &= Cz\end{aligned}\quad (3)$$

仮想オブザーバはこの線形システムに対してもオブザーバとして機能するということから、その候補として線形オブザーバ、

$$\dot{\hat{z}} = A\hat{z} + Bv + KC(z - \hat{z}) \quad (4)$$

を考えるのは自然である。以上の観察に基づき、本論文では(4)式のオブザーバが実際に線形化フィードバックを前提とした制御則に対して有効であることを示す。以下、構成は2節ではここで考察する非線形制御系のクラスについての定義と厳密線形化に関する従来の結果について関連あるものについて述べる。3節ではオブザーバの設計アルゴリズムを提案し、推定誤差に関する評価から、有界入力有界状態 (BIBS) 安定の仮定の下で推定誤差が収束することを示す。なお、ここでの議論から弱い意味での分離定理の成立条件がリー微分に対する条件として与えられる。4節では、システムの BIBS の安定性が線形化後のオブザーバフィードバックにより達成されることを示す。5節では本手法の有効性を示す例として、2リンクのロボットアーム制御への応用とその数値シミュレーションを示す。

2. 制御対象

本論文では次式に示す m 入力 m 出力非線形系を考える。

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= h(x)\end{aligned}\quad (5)$$

ここで $x \in R^n$ は状態ベクトル、 $u \in R^m$ は入力、 $y \in R^m$ は出力である。また x_0 を平衡点と仮定し、 $f(x_0) = 0, h(x_0) = 0$ とする。 x_0 の近傍において $f, g_1, \dots, g_m: R^n \rightarrow R^n$ は十分滑らかなベクトル場、 $h = [h_1, \dots, h_m]^T: R^n \rightarrow R^m$ は十分滑らかなスカラ関数とする。

以下の議論で必要となる入出力線形化に関する結果について述べておく。

定義 2.1 スカラ関数 $h(x)$ のベクトル場 $f(x)$ によるリー微分は

$$L_f h = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) \quad (6)$$

で定義されるスカラ関数である。

リー微分を繰り返し行うことにより定義されるスカラ関数を

$$\begin{aligned}L_f^0 h &= h \\ L_f^i h &= L_f(L_f^{i-1} h) = (\partial L_f^{i-1} h / \partial x) f(x)\end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots \quad (7)$$

と記述する。

定義 2.2 システム (5) はつぎのような性質を有するとき、 x^0 においてベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ をもつと言う。

1) x^0 の近傍において

$$\begin{aligned}L_{g_j} h_i(x) &= \dots = L_{g_j} L_f^{r_i-2} h_i(x) = 0 \\ 1 \leq \forall i, j \leq m\end{aligned}\quad (8)$$

2) x^0 において、行列

$$\begin{aligned}R(x) &= \{a_{ij}(x)\} = \{L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x)\} \\ 1 \leq \forall i, j \leq m\end{aligned}\quad (9)$$

は正則である。

システム (5) が領域 Ω に属するすべての点においてベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ をもつとき、それは Ω においてベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ をもつと呼ぶことにする。

命題 2.1 システム (5) が x^0 においてベクトル相対次数 $\{r_1, \dots, r_m\}$ をもつと仮定する。全相対次数 r は

$$r = r_1 + \dots + r_m \quad (10)$$

を満たす正の数とし、 z_i は

$$\begin{aligned}z_j^i &= L_f^{j-1} h_i(x) \\ 1 \leq j \leq r_i, 1 \leq i \leq m.\end{aligned}\quad (11)$$

に与えられる新たな座標変数であるとする。ベクトル場集合、

$$G = \text{span}\{g_1, g_2, \dots, g_m\} \quad (12)$$

はインボリューティブならば x^0 の近傍において次式を満たす $n-r$ 個関数 $\xi_1(x), \dots, \xi_{n-r}(x)$

$$\begin{aligned}L_{g_j} \xi_i(x) &= 0 \\ 1 \leq i \leq n-r, 1 \leq j \leq m\end{aligned}\quad (13)$$

が存在し、それは変数 $z_1, \dots, z_r$ と一緒に normal 座標を構成できる。この normal 座標系にて、システム (5) は

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= f_0(\xi, z^1, \dots, z^m) \\ \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\dots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i &= a^i(\xi, z^1, \dots, z^m) + b^i(\xi, z^1, \dots, z^m)u \\ y_i &= z_1^i, \quad 1 \leq i \leq m\end{aligned}\quad (14)$$

と記述される。ただし

$$\begin{aligned}\xi &= \text{col}(\xi_1(x), \dots, \xi_{n-r}(x)) \\ z^i &= \text{col}(z_1^i, \dots, z_{r_i}^i)\end{aligned}\quad (15)$$

$\xi = f_0(\xi, z^1, \dots, z^m)$ は内部ダイナミクスと呼ばれている。命題の証明は文献³⁾に参照されたい。

本論文では平衡点 x_0 の近傍 Ω において全相対次数がシステム次数 (状態空間の次元数) と一致する MIMO 非線形系 (5) を考える。つまり normal 座標において内部ダイナミクスが存在しない対象に対するオブザーバフィードバックによる線形化問題を考える。システム (5) がこれらの仮定を満たせば、命題 2.1 により Ω において normal 座標 $z = \phi(x)$,

$$\begin{aligned} \phi_j^i &= L_f^{j-1} h_i(x) \\ 1 \leq j \leq r_i, \quad 1 \leq i \leq m. \end{aligned} \quad (16)$$

が存在し、この normal 座標を用いて、原点を含むある領域 Ω' において、

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A^i z^i + B^i (L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(z)) + b_i(\phi^{-1}(z))u) \\ y_i &= C^i z^i, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (17)$$

と記述される。ここで A^i, B^i, C^i, b_i はつぎのような適当な大きさの行列である。

$$\begin{aligned} A^i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ B^i &= [0, \dots, 0, 1]^T; \quad C^i = [1, 0, \dots, 0] \\ b^i(\phi^{-1}(z)) &= \text{row}(L_{g_1} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(z)), \\ &\quad \dots, L_{g_m} L_f^{r_i-1} h_i(\phi^{-1}(z))) \end{aligned} \quad (18)$$

領域 Ω において $R(x)$ は正則であるということから明らかに領域 Ω' において $b^i(\phi^{-1}(z)) \neq 0$ が成立する。

3. オブザーバ設計

厳密線形化制御則を前提とした専用オブザーバの設計法を考える。設計手順はつぎのようにまとめられる。

Step 1: 厳密線形化制御則,

$$\begin{aligned} u &= R^{-1}(\phi^{-1}(z)) \\ &\quad \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ v_m - L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(z)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

に対し、ある仮想オブザーバからの状態 z の推定値 $\hat{z}$ を代入し、

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^i &= A^i \hat{z}^i + B^i (L_f^{r_i} h_i(\phi^{-1}(\hat{z})) \\ &\quad + b_i(\phi^{-1}(\hat{z}))R^{-1}(\phi^{-1}(\hat{z}))) \\ &\quad \begin{bmatrix} v_1 - L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(\hat{z})) \\ \vdots \\ v_m - L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(\hat{z})) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$y_i = C^i \hat{z}^i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (20)$$

を得る。以下このシステムを擬似線形化モデルと呼ぶことにする。

Step 2: 仮想オブザーバの構造を決める。

オブザーバの推定値 $\hat{z}$ が真の値 z に一致するとき、擬似線形化モデル (20) はつぎの線形システム (21) により与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{z}^i &= A^i z^i + B^i v_i \\ y_i &= C^i z^i, \quad 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (21)$$

そこで、本設計では z の推定値 $\hat{z}$ を得るためにつぎの線形オブザーバ、

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^i &= A^i \hat{z}^i + B^i v_i + K^i C^i (z^i - \hat{z}^i) \\ 1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (22)$$

を導入する。ここで $K^i = [k_1, \dots, k_{r_i}]^T$ はオブザーバゲインである。

Step 3: オブザーバのゲイン $K^i, 1 \leq i \leq m$ を決定する。 S_r を Ω' に含まれる球領域とする。

$$S_r = \{z \in \Omega' : \|z\| \leq r\} \quad (23)$$

ここで r は正の数である。

Step 2,3 で決定するオブザーバのゲイン K^i が実際構成できることを補題 1, 定理 1 により示す。

補題 1: $z_1, z_2 \in \Omega'$ に対して、次式を満たす Lipschitz constant L_1 と L_2 が存在する。

$$\begin{aligned} &\|b_i(\phi^{-1}(z_1))(R^{-1}(\phi^{-1}(z_1))) \\ &\quad \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(z_1)) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(z_1)) \end{bmatrix} - R^{-1}(\phi^{-1}(z_2)) \\ &\quad \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(z_2)) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(z_2)) \end{bmatrix} \|\leq L_1 \|z_1 - z_2\| \\ &\|b_i(\phi^{-1}(z_1))(R^{-1}(\phi^{-1}(z_1))) - \\ &\quad R^{-1}(\phi^{-1}(z_2))\| \leq L_2 \|z_1 - z_2\| \\ &1 \leq i \leq m \end{aligned} \quad (24)$$

証明: 写像 $\phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ (16) は local diffeomorphism であるから $R(\phi^{-1}(z))$ 及び b^i の要素はすべて十分滑らかなスカラー関数となる。一方 Ω において $R(x)$ は正則であるということより $R^{-1}(\phi^{-1}(z))$ の要素もすべて十分滑らかなスカラー関数となる。したがって Ω' において上式を満たす Lipschitz constant L_1 と L_2 が存在する。□

補題1を用いると、オブザーバのゲイン K^i の存在条件とパラメータの決定法はつぎの定理により与えられる。

定理1: 初期値領域 $\{(z(0), \hat{z}(0)) \in S_{r_1} \times S_{r_1}; r_1 < r\}$ に対して、閉ループ系 (20)-(22) を有界領域

$$\{(z(t), \hat{z}(t)) \in S_r \times S_r; \forall t \geq 0\}$$

に閉じ込める有界入力 $\{\|v(t)\| \leq L, \forall t \geq 0\}$ が存在すると仮定する。ただし上界 L はオブザーバゲイン $K^i, 1 \leq i \leq m$ に依存しない。この有界入力 $v(t)$ の下で、次式を満たす有限のオブザーバゲイン $K \in R^n$ が存在する。

$$\begin{aligned} \|z(t) - \hat{z}(t)\| &\leq \gamma e^{-\delta t} \\ \forall \|z(0)\| &\leq r_1; \|\hat{z}(0)\| \leq r_1 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで $\gamma > 0, \delta > 0$ 。

証明: 以下 $1 \leq i \leq m$ に対して誤差 $e^i(t) = z^i(t) - \hat{z}^i(t)$ とおく。誤差方程式は

$$\begin{aligned} \dot{e}^i &= (A^i - K^i C^i) e^i + B^i \\ b_i(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \psi^i(e, \hat{z}, v) \end{aligned} \quad (26)$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \psi^i(e, \hat{z}, v) &= (R^{-1}(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \\ &\quad \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} L_f^{r_1} h_1(\phi^{-1}(\hat{z})) \\ \vdots \\ L_f^{r_m} h_m(\phi^{-1}(\hat{z})) \end{bmatrix} \\ &\quad - R^{-1}(\phi^{-1}(\hat{z})) v \\ &\quad e = \text{col}(e^1, \dots, e^m) \\ &\quad \hat{z} = \text{col}(\hat{z}^1, \dots, \hat{z}^m) \end{aligned} \quad (27)$$

(26) 式において (A^i, C^i) は可観測であるから $A^i - K^i C^i$ の固有値は任意に配置できる。ここでは、Vandermonde 行列による座標変換によって $A^i - K^i C^i$ が $\alpha_i \lambda_{i1}, \dots, \alpha_i \lambda_{ir_i}$ と互いに異なる固有値をもつようゲイン K^i を定めることにする。次式で与えられる座標変換を考える。

$$\begin{aligned} \hat{e}^i &= V^i(\lambda) T(\alpha_i) e^i \\ T(\alpha_i) &= \text{diag}[\alpha_i^{r_i-1}, \dots, \alpha_i, 1] \\ V^i(\lambda) &= \begin{bmatrix} \lambda_{i1}^{r_i-1} & \dots & \lambda_{i1} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{ir_i}^{r_i-1} & \dots & \lambda_{ir_i} & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで α_i は正の数で、 $\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{ir_i}$ は互いに異なる負の数である。このとき $\hat{e}^i$ 座標での誤差方程式は

$$\begin{aligned} \dot{\hat{e}}^i &= \Lambda \hat{e}^i + V^i(\lambda) T(\alpha_i) B^i \\ b_i(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \psi^i(e, \hat{z}, v) \end{aligned} \quad (29)$$

となるので

$$\begin{aligned} \Lambda &= V^i(\lambda) T(\alpha_i) (A^i - K^i C^i) [V^i(\lambda) T(\alpha_i)]^{-1} \\ &= \text{diag}[\alpha_i \lambda_{i1}, \dots, \alpha_i \lambda_{ir_i}] \end{aligned}$$

なる関係から、 $\alpha_i \lambda_{i1}, \dots, \alpha_i \lambda_{ir_i}$ を極にもつことがわかる。また $T(\alpha_i) B^i = B^i$ を代入して上式を解くと

$$\begin{aligned} \hat{e}^i(t) &= e^{\Lambda t} \hat{e}^i(0) + \int_0^t e^{\Lambda(t-\tau)} V^i(\lambda) B^i \\ b_i(\phi^{-1}(e + \hat{z})) \psi^i(e(\tau), \hat{z}(\tau), v(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

となる。 $\|V^i(\lambda) B^i\| = \sqrt{r_i}$ と補題1より

$$\begin{aligned} \|\hat{e}^i(t)\| &\leq e^{\alpha_i \lambda_{i1} t} \|\hat{e}^i(0)\| + \sqrt{r_i} (L_1 + LL_2) \\ &\quad \int_0^t e^{\alpha_i \lambda_{i1}(t-\tau)} \|e(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ここで $\lambda_{i1} = \max\{\lambda_{ij}, j \in r_i\} < 0$ とおく。 $\|\bar{e}\| = \|\hat{e}^1\| + \dots + \|\hat{e}^m\|$ と記述し、 $\alpha_1 \lambda_{11} = \max\{\alpha_i \lambda_{i1}, i \in m\}$ とすれば、上式は

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(t)\| &\leq e^{\alpha_1 \lambda_{11} t} \|\bar{e}(0)\| + (\sqrt{r_1} \\ &\quad + \dots + \sqrt{r_m}) (L_1 + LL_2) \\ &\quad \int_0^t e^{\alpha_1 \lambda_{11}(t-\tau)} \|e(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (32)$$

となる。明らかに

$$\begin{aligned} \|e\| &\leq \| [V^1(\lambda) T(\alpha_1)]^{-1} \hat{e}^1 \| + \dots + \\ &\quad \| [V^m(\lambda) T(\alpha_m)]^{-1} \hat{e}^m \| \end{aligned} \quad (33)$$

と書ける。 $\alpha_i > 1$ とおくと $\|T(\alpha_i)^{-1}\| \leq 1$ になるから

$$\|e\| \leq (\|V^1(\lambda)^{-1}\| + \dots + \|V^m(\lambda)^{-1}\|) \|\bar{e}\| \quad (34)$$

と書ける。これを (32) に代入すると

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(t)\| &\leq e^{\alpha_1 \lambda_{11} t} \|\bar{e}(0)\| + (\sqrt{r_1} + \dots + \sqrt{r_m}) \\ &\quad (L_1 + LL_2) (\|V^1(\lambda)^{-1}\| + \dots + \|V^m(\lambda)^{-1}\|) \\ &\quad \int_0^t e^{\alpha_1 \lambda_{11}(t-\tau)} \|\bar{e}(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (35)$$

となり、Gronwall 不等式より

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(t)\| &\leq \|\bar{e}(0)\| e^{-\delta t} \\ &\quad -\delta = \alpha_1 \lambda_{11} + (\sqrt{r_1} + \dots + \sqrt{r_m}) (L_1 + LL_2) \\ &\quad (\|V^1(\lambda)^{-1}\| + \dots + \|V^m(\lambda)^{-1}\|) \end{aligned} \quad (36)$$

を得る。ここで $(\|V^1(\lambda)^{-1}\| + \dots + \|V^m(\lambda)^{-1}\|)$ は有限値を取れるから $\delta > 0$ を満たすような α_1 が存在する。したがって誤差は

$$\|e(t)\| \leq \mathcal{M} \|e(0)\| e^{-\delta t} \quad (37)$$

と評価できる。ここで

$$\mathcal{M} = (\|V^1(\lambda)^{-1}\| + \cdots + \|V^m(\lambda)^{-1}\|) \\ (\|V^1(\lambda)T(\alpha_1)\| + \cdots + \|V^m(\lambda)T(\alpha_m)\|)$$

つまり (25) 式を満たす $\gamma > 0, \delta > 0$ が存在する. $\square$

擬似線形モデル (20) は線形モデルに収束することを つぎに証明する.

Corollary 1: 定理 1 の仮定の下で, 擬似線形モデル (20) はつぎのような線形モデルに収束する.

$$\dot{w}^i = A^i w^i + B^i v_i \\ y_i = C^i w^i, \quad 1 \leq i \leq m \quad (38)$$

証明: 誤差は $e_i^j(t) = z^i(t) - w^i(t)$ とする. このとき

$$\dot{e}_i^j(t) = z^i(t) - \dot{z}^i(t) + \dot{z}^i(t) - w^i(t) \quad (39)$$

に書ける. 定理 1 より $\lim_{t \rightarrow \infty} (z^i(t) - \dot{z}^i(t)) = 0$ となり, $\dot{z}^i(t) - w^i(t)$ の方程式は

$$\dot{z}^i(t) - w^i(t) = (A^i - K^i C^i)(\dot{z}^i(t) - w^i(t)) \quad (40)$$

と表せる. $(A^i - K^i C^i)$ の極 $\alpha_i \lambda_{i1}, \dots, \alpha_i \lambda_{ir_i}$ は全部負の数であるから $\lim_{t \rightarrow \infty} (\dot{z}^i(t) - w^i(t)) = 0$ となる. $\square$

Remark 1: 線形化可能な非線形系に対するオブザーバフィードバック問題は Hunt et al. (文献⁵) によっても行われている. 文献⁵ の考察は線形系において知られる分離定理に基づくもので, 制御則と独立してオブザーバ設計を進めるものである.

本論文は u をオブザーバの状態の関数として扱い, 制御則の構造に依存してオブザーバ設計を行うものであり, 制御則のクラスを先に限定することによってオブザーバ設計に課せられる負担が軽減できたと考えられる.

Remark 2: 誤差方程式 (26) の原点への指数漸近安定性の証明は Ciccarella ら (1993) の証明の別解法になり, 上界の評価を得るためのパラメータの自由度を縮約している. またより一般的な考察が Gauthier ら (1992) により行われているが本証明は彼等の誤差方程式に対しても適用可能である.

Remark 3: $R(x)$ が定数行列となる場合, 誤差方程式 (26) は参照入力 $v(t)$ に依存しなくなるから, 弱い意味で “Separation Principle” が成り立つ. すなわち

$$R(x) = \{L_{g_j} L_f^{i-1} h_i(x)\} = \text{constant} \\ 1 \leq i, j \leq m \quad (41)$$

を満足するとき, コントローラ設計とオブザーバ設計は互いに直接的には依存しなくなり, 独立に実施できる.

4. 閉ループ系の有界性

この節では閉ループ系の有界性は閉ループ系の線形部の極配置によって保証されることを示す.

次式で与えられる非線形系を考える.

$$\dot{X} = (A + BF)X + \delta(X, t) \quad (42)$$

ここに $X \in R^n$ は状態ベクトル, $\delta: R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ はベクトル場, A と B は 18 式に示される定数行列, $F = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ はフィードバックゲインである.

定理 2: ある球領域 $S_r = \{X \in R^n \mid \|X\| \leq r\}$ において, ベクトル場 $\delta(X, t)$ は一様有界

$$\|\delta(X, t)\| \leq M \quad \forall X \in S_r, \forall t \geq 0 \quad (43)$$

であるとする. ただし上界 M は F に依存しない. このとき, $(A + BF)$ の極配置によって系の状態ベクトル X を球領域 S_r に閉じ込めることが可能である.

証明: (42) 式において, (A, B) は可制御であるから $A + BF$ の固有値は任意に配置できる. オブザーバの場合と同様にここでは, Vandermonde 行列による座標変換によって $A + BF$ が $\bar{\alpha}\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\alpha}\bar{\lambda}_n$ と互いに異なる固有値をもつようゲイン F を定めることにする. 次式で与えられる座標変換を考える.

$$X = \bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})\bar{X} \\ \bar{T}(\bar{\alpha}) = \text{diag}[1, \bar{\alpha}, \dots, \bar{\alpha}^{n-1}] \\ \bar{V}(\bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \cdots & \bar{\lambda}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{\lambda}_1^{n-1} & \bar{\lambda}_2^{n-1} & \cdots & \bar{\lambda}_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (44)$$

ここで $\bar{\alpha}$ は正の数で, $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ は互いに異なる負の数である. このとき座標系 $\bar{X}$ において, (42) 式は

$$\dot{\bar{X}} = \bar{\Lambda}\bar{X} + [\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}\delta(\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})\bar{X}, t) \quad (45)$$

となるので

$$\bar{\Lambda} = [\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}(A + BF)[\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})] \\ = \text{diag}[\bar{\alpha}\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\alpha}\bar{\lambda}_n]$$

なる関係から, $\bar{\alpha}\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\alpha}\bar{\lambda}_n$ を極にもつことがわかる.

Lyapunov 関数 $W = \bar{X}^T I \bar{X}$ を考える. 系 (45) の解軌道に沿うその時間微分は

$$\dot{W} = 2\bar{X}^T \bar{\Lambda} \bar{X} + 2\bar{X}^T [\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1} \\ \delta(\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})\bar{X}, t) \quad (46)$$

と表せる. $\bar{\lambda}_1 = \max\{\bar{\lambda}_i, i \in n\} < 0$ とし, $\bar{\alpha} > 1$ とすると

$$\dot{W} \leq 2\bar{\lambda}_1 \bar{\alpha} \|\bar{X}\|^2 + 2\|\bar{X}^T [\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1} \\ \delta(\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})\bar{X}, t)\| \quad (47)$$

となる。

(44)式による球領域 S_r の写像 T_r を

$$T_r = \{\bar{X} \in R^n | \bar{X} = [\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}X, X \in S_r\}$$

と定義する。ここで行列 $[\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}$ は正則なので、 T_r は原点近傍を含む。そこで、 T_r に含まれる最大球領域 $S_{\bar{r}}$ を

$$S_{\bar{r}} = \{\bar{X} \in R^n | \|\bar{X}\| \leq \bar{r}, \bar{X} \in T_r\}$$

とする。このように定義される $S_{\bar{r}}$ において明らかに

$$\|\delta(\bar{T}(\bar{\alpha})\bar{V}(\bar{\lambda})\bar{X}, t)\| \leq M \quad (48)$$

が成立する。

$\bar{r}$ に対して領域 $H_{\bar{r}}, S_{\bar{r}_1}, S_{\bar{r}_1}^{\bar{r}}$ を

$$\begin{aligned} H_{\bar{r}} &= \{\bar{X} \in R^n | \|\bar{X}\| = \bar{r}\} \\ S_{\bar{r}_1} &= \{\bar{X} \in R^n | \|\bar{X}\| \leq \bar{r}_1\} \\ S_{\bar{r}_1}^{\bar{r}} &= \{\bar{X} \in R^n | \bar{r}_1 < \|\bar{X}\| < \bar{r}\} \end{aligned} \quad (49)$$

と記述し (ただし $0 < \bar{r}_1 < \bar{r}$)、初期値が $S_{\bar{r}_1}$ に属する系 (45) の解軌道は領域 $S_{\bar{r}_1}^{\bar{r}}$ に入ったとする。このとき

$$\dot{W} \leq 2\bar{\lambda}_1\bar{\alpha}\bar{r}_1^2 + 2\bar{r}\|[\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}\|M \quad (50)$$

となる。設計パラメータ $\bar{\alpha}$ を

$$\bar{\alpha} > -(\bar{r}\|[\bar{V}(\bar{\lambda})]^{-1}\|M)/(\bar{\lambda}_1\bar{r}_1^2) \quad (51)$$

を満たす数値を取れば領域 $S_{\bar{r}_1}^{\bar{r}}$ において $\dot{W} < 0$ となるから、解軌道は決して $H_{\bar{r}}$ に到達することができない。したがって $\bar{\alpha}$ を上式を満たす数値を取ればもとの系の状態ベクトル X を球領域 S_r に閉じ込めることが可能である。□

いま、閉ループ系 (20)-(22) に対してつぎのようなオブザーバフィードバックを考える。

$$\begin{aligned} v_i &= F^i \hat{z}^i + v_d^i(t); \quad F^i = [a_{i0}, \dots, a_{i, r_i-1}] \\ 1 &\leq i \leq m \end{aligned} \quad (52)$$

ここで $\|v_d^i(t)\| \leq M_i; \forall t \geq 0$ 。オブザーバ (22) は

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= \text{diag}[A^1 + B^1 F^1, \dots, A^m + B^m F^m] \hat{z} \\ &+ \delta(\hat{z}, t) \end{aligned}$$

$$\delta(\hat{z}, t) = \begin{bmatrix} B^1 v_d^1(t) + K^1 e_1^1(t) \\ \vdots \\ B^m v_d^m(t) + K^m e_m^m(t) \end{bmatrix} \quad (53)$$

と書ける。初期値が領域 $\{\hat{z}(0), e(0)\} \in S_{\frac{r}{2}} \times S_{\frac{r}{2\lambda_1}}\}$ に属する閉ループ系の解軌道を考える。定理 1 により $\{\hat{z}(t) \in S_{\frac{r}{2}}; \forall t \geq 0\}$ ならば $\{e(t) \in S_{\frac{r}{2}}; \forall t \geq 0\}$ となる。すなわち $\delta(\hat{z}, t)$ は領域 $S_{\frac{r}{2}}$ において一様有界である。

$$\|\delta(\hat{z}, t)\| \leq M_1 + \dots + M_m +$$

$$(\|K^1\| + \dots + \|K^m\|) \frac{r}{2}, \quad \forall t \geq 0 \quad (54)$$

$r \leq \min(\frac{1}{\|K^1\|}, \dots, \frac{1}{\|K^m\|})$ とすれば $\|\delta(\hat{z}, t)\|$ は K に依存しなくなる。定理 2 により $(A^i + B^i F^i)$ の極配置によって $\hat{z}$ を球領域 $S_{\frac{r}{2}}$ に閉じ込めることが可能となる。つまり閉ループの解軌道を領域 $\{(z(t), \hat{z}(t)) \in S_r \times S_{\frac{r}{2}}; \forall t \geq 0\}$ に閉じ込めることができる。

5. 数 値 例

Fig.1 に示す 2 リンクのロボットアーム (see Nijmeijer et al. 1990, pp.1-4) のオブザーバフィードバックによる安定化問題を考える。ここで u_1 と u_2 は入力で、それぞれの関節に施す関節トルクである。

Fig. 1 Two-link robot manipulator

このシステムは全状態空間においてフルな全相対次数をもつもので、その normal form は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\Delta(z)} \right. \\ &\quad \left. (-M_2(z)\bar{C}_1(z) + M(z)\bar{C}_2(z)) + b_1(z)u \right) \\ y_1 &= z_1^1 \\ \dot{z}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\Delta(z)} \right. \\ &\quad \left. (M(z)\bar{C}_1(z) - M_1(z)\bar{C}_2(z)) + b_2(z)u \right) \\ y_1^2 &= z_1^2 \end{aligned} \quad (55)$$

ここで

$$\begin{aligned} M_1(z) &= (m_1 + m_2)l_1^2 + m_2l_2^2 + 2m_2l_1l_2\cos z_1^2 \\ M_2(z) &= m_2l_2^2 \\ M(z) &= m_2l_2^2 + m_2l_1l_2\cos z_1^2 \\ \Delta(z) &= M_1(z)M_2(z) - M^2 \\ \bar{C}_1(z) &= -m_2l_1l_2(\sin z_1^2)z_2^2(2z_2^1 + z_2^2) - (m_1 + \\ &\quad m_2)gl_1\sin z_1^1 - m_2gl_2\sin(z_1^1 + z_1^2) \\ \bar{C}_2(z) &= m_2l_1l_2(\sin z_1^2)(z_2^1)^2 - m_2gl_2 \\ &\quad \sin(z_1^1 + z_1^2) \\ b_1(z) &= \frac{1}{\Delta(z)} \text{row}(M_2(z), -M(z)) \end{aligned}$$

$$b_2(z) = \frac{1}{\Delta(z)} \text{row}(-M(z), M_1(z)) \quad (56)$$

オブザーバフィードバックによる厳密線形化制御則は

$$\begin{aligned} u &= \begin{bmatrix} M_1(\hat{z}) & M(\hat{z}) \\ M(\hat{z}) & M_2(\hat{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \\ \bar{v}_1 &= v_1 - \frac{1}{\Delta(\hat{z})} (-M_2(\hat{z})\bar{C}_1(\hat{z}) + M(\hat{z})\bar{C}_2(\hat{z})) \\ \bar{v}_2 &= v_2 - \frac{1}{\Delta(\hat{z})} (M(\hat{z})\bar{C}_1(\hat{z}) - M_1(\hat{z})\bar{C}_2(\hat{z})) \end{aligned} \quad (57)$$

となり, その専用オブザーバは

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}^1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{z}^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 + K^1(z_1^1 - \hat{z}_1^1) \\ \dot{\hat{z}}^2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{z}^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_2 + K^2(z_1^2 - \hat{z}_1^2) \end{aligned} \quad (58)$$

となる. ここでオブザーバゲイン K^1, K^2 はたとえば $K^1 = [7, 12]^T, K^2 = [7, 12]^T$ と選べる.

つぎにある初期状態 (例えば $z^1(0) = [2, 0.1]^T, z^2(0) = [0.8, 0]^T$) から平衡点にこの 2 リンクのロボットアームを移動するという安定問題を考える. 線形部の固有値は $-3, -4, -3, -4$ とすると, その線形制御則は

$$v_1 = -12\hat{z}_1^1 - 7\dot{\hat{z}}_1^1, \quad v_2 = -12\hat{z}_1^2 - 7\dot{\hat{z}}_1^2 \quad (59)$$

と導かれる. 説明の便宜上, すべての定数を 1 とし, オブザーバの初期状態を 0 とする. 数値シミュレーションの結果は Fig.2, Fig.3, Fig.4 と Fig.5 に示されている.

Fig. 2 Initial state response of first variable

Fig. 3 Initial state response of second variable

Fig. 4 Initial state response of third variable

Fig. 5 Initial state response of fourth variable

6. おわりに

非線形オブザーバの設計において, 線形の場合と違い, 誤差方程式の収束性は入力に依存するということで入力の扱い方は非常に重要である. オブザーバを設計するとき, 分離定理に基づいて系の入力をオブザーバの状態の関数としてではなく, オブザーバの入力として扱い, つまり制御則と独立してオブザーバ設計を進めるのが普通

である。これに対して本論文では系に加える入力をオブザーバ状態の関数として扱い、制御則の構造に依存する専用オブザーバの設計法を提案した。

本研究は状態線形化可能で、かつ相対次数の和がシステム次数と一致するとなるかなり限定した対象に対する結果である。相対次数の和がシステム次数より小さい、より一般的な場合のオブザーバフィードバックによる安定化制御則の設計法を導くことが今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) G. Ciccarella, M. Dalla Mora and A. Germani : A Luenberger-like observer for nonlinear systems, Internat. J. Control **57** 537-556 (1993)
- 2) J. P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman : A Simple Observer for nonlinear systems applications to bioreactors, IEEE Trans. Automat. control **37** 875-880 (1992)
- 3) A. Isidori : Nonlinear Control System : an Introduction (Springer-Verlag, Berlin, 1989)
- 4) H. Nijmeijer and A. J. van der Schaft : Nonlinear Dynamical Control Systems (Springer-Verlag, New York, 1990)
- 5) L. R. Hunt and Madanpal S. Verma : Observers and Controllers for Feedback Linearization Systems, ACC, 546-547 (1991)

[著 者 紹 介]

宗 日 耀 (学生会員)

1988年、上海交通大学大学院工業自動化研究科修士課程修了。同年上海工程技術大学コンピュータ応用学科助手。91年同講師。94年東京都立科学技術大学大学院工学研究科博士課程入学、現在に至る。非線形オブザーバ及びその応用などの研究に従事。

石 島 辰太郎 (正会員)

1976年、早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了。同年東京都立工科短期大学に奉職。85年同短期大学教授を経て、86年東京都立科学技術大学教授、現在に至る。柔軟構造物制御、線形制御系設計法、非線形制御系の解析と設計理論などの研究に従事(工学博士)。

児 島 晃 (正会員)

1977年早稲田大学理工学部電気工学科卒業。91年同大学院博士後期課程修了。同年、東京都立科学技術大学専任講師、現在に至る。ロバスト制御、予見制御、分布系の制御問題に興味をもつ。工学博士。システム制御情報学会、電気学会、IEEEなどの会員。