2 自由度積分型サーボ系のロバスト安定性と 積分補償のハイゲイン化

金 英 福*・池 田 雅 夫**・藤 崎 泰 正**

Robust Stability of a Two-Degrees-of-Freedom Servosystem and High-Gain Integral Compensation

Young-Bok KIM*, Masao IKEDA** and Yasumasa FUJISAKI**

In order to reject the steady-state tracking error, it is common to introduce integral compensators in servosystems for constant reference signals. However, if we have an exact mathematical model of the plant and there is no disturbance to the plant, the integral compensation is not needed. From this point of view, a two-degrees-of-freedom (2 DOF) servosystem has been proposed in the recent literature. The present paper considers robust stability and a transient behavior of the 2 DOF servosystem. A class of uncertainties allowed in the plant model is obtained, to which the servosystem is robustly stable for any gain of the integral compensator. This result implies that if the plant uncertainty is in the class, a high-gain integral compensation can be carried out preserving stability to achieve a high-speed tracking response. The transient behavior attained by the limit of the high-gain compensation is calculated using the singular perturbation approach.

Key Words: two-degrees-of-freedom servosystems, integral compensators, robust stability, high-gain feedback, transient behavior

1. はじめに

制御系設計における基本的な問題の一つは、制御対象のモデル化誤差や外乱の存在のもとで、制御出力が参照信号に定常状態で追従するようなコントローラを設計する問題、すなわちロバストサーボ問題である。よく知られているように、ステップ状参照信号に追従するロバストサーボ系の設計問題において、制御対象のモデル化誤差や定値外乱に対処するには、積分補償が必要である¹⁾。しかし、逆にいえば、制御対象が正確に同定できて、外乱が存在しなければ、積分補償は必要ない。すなわち、積分補償の効果は、制御対象のモデル化誤差や外乱が存

在する場合にのみ、現れるべきものである。このような観点に立ち、2 自由度制御系としての積分型サーボ系が提案された^{2),3)}。

一般に、制御系がロバストサーボ系と呼ばれるとき、そのロバスト性とは、制御対象のモデル化誤差や外乱のもとでの“定常応答のロバスト性”のことであり、ロバスト安定性や過渡応答性能についての何かを意味するものではない。これでは、実際の制御系設計のための情報としては不十分であろう。そこで、本論文では、2 自由度積分型サーボ系のロバスト安定性や過渡応答特性について、特に積分補償ゲインを調整可能とするという観点から考察する。

この問題について、著者らはすでに、文献 2) において、制御対象のシステム行列のモデル化誤差や外乱入力係数行列がいわゆるマッチング条件⁴⁾を満たすとき、積分補償のハイゲイン化によって、制御出力の過渡応答を、モデル化誤差や外乱がない場合の過渡応答に限りなく近付けることができることを、特異摂動法⁵⁾を使って示している。つまり、モデル化誤差や外乱に対するロバスト

* 神戸大学大学院自然科学研究科 神戸市灘区六甲台町 1-1

** 神戸大学工学部 神戸市灘区六甲台町 1-1

* The Graduate School of Science and Technology, Kobe University, Kobe

** Faculty of Engineering, Kobe University, Kobe
(Received October 7, 1994)
(Revised August 21, 1995)

性を定常応答だけでなく、過渡応答についても実現することができるのである。しかし、この文献では、積分補償のゲインが十分に大きければ、制御系が安定であることを暗黙に仮定しているだけで、ロバスト安定条件は与えていない。一方、モデル化誤差や外乱がマッチング条件を満たさない場合について、著者らは文献6)で感度改善について議論しているが、ロバスト安定性や過渡応答についての考察はしていない。

そこで、本論文では、まず、2自由度積分型サーボ系においては、制御対象の不確かさに対するロバスト安定性が積分補償の1つのゲインについて、あるリアプノフ不等式によって保証されれば、そのロバスト性はある形の任意のゲインに対しても保存されることを明らかにする。つまり、積分補償のゲインの大きさにかわらず制御系の安定性が保たれるための制御対象の不確かさの許容範囲を、リアプノフ不等式を用いて与える。

このロバスト安定性の結果は、積分補償のハイゲイン化調整を可能にする。これは2自由度サーボ系の一つの長所であり、制御出力の定常状態への整定時間の短縮に効果があると期待される。1自由度サーボ系の場合は、制御対象が不確かでないとしても、積分補償のハイゲイン化は系の不安定化につながる恐れが強く、一般に限界がある。本論文では、得られたロバスト安定条件のもとで、積分補償をハイゲイン化した極限における制御出力の過渡応答の振舞いを特異摂動法により与える。そして、積分補償のハイゲイン化が制御出力の定常状態への整定時間の短縮に効果があることをシミュレーションで確かめる。

2. 2自由度積分型サーボ系

制御対象は、状態方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (1)$$

で表わされているとする。ここで、 x は n 次元状態、 u は m 次元操作入力、 y は m 次元制御出力であり、 A, B, C は適当な大きさの定数行列である。

このシステムに対して、ステップ状の m 次元参照信号

$$r(t) = \begin{cases} r_+ & (t \geq 0) \\ r_- & (t < 0) \end{cases} \quad (2)$$

を考える。目標値 r_+ は時刻 $t=0$ で与えられるとする。そして、 r_+ に追従する制御系が構成できるように、 (A, B) は可安定対、かつ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = n+m \quad (3)$$

であるとする¹⁾。

このような仮定のもとに、藤崎、池田²⁾は Fig. 1 のよ

Fig. 1 Two-Degrees-of-Freedom Servosystem

うな構造の2自由度積分型サーボ系を提案した。図中、 F_0 は $A + BF_0$ を安定にする行列であり、彼らは文献2)では、最適レギュレータ理論から得られたゲインを用いている。また F_1, H_0 はつぎのとおりである。

$$\begin{aligned}F_1 &= C(A + BF_0)^{-1} \\ H_0 &= [-C(A + BF_0)^{-1}B]^{-1}\end{aligned} \quad (4)$$

積分器の出力に加えられた $-(F_1x_0 + w_0)$ の項は、制御対象にモデル化誤差や外乱が存在しない場合、積分補償の効果が現れないように導入されている。ここで、 x_0, w_0 は制御対象の状態 x と積分器の状態 w の初期値である。なお、参照信号 r の変化が制御系が定常状態にあるときのみに起こるとすれば、この項は必要ない²⁾。本論文では、簡単のため、そのような状況のみを考えることにする。このとき、Fig. 1 の制御系は

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B(F_0 + GF_1) & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} BH_0 \\ I \end{bmatrix} r(t) \\ y(t) &= [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (5)$$

と表わされる。

この制御系が積分型サーボ系として動作するためには、安定でなければならない。すなわち、(5)式のシステム行列

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} A + B(F_0 + GF_1) & BG \\ -C & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A + BF_0 & BG \\ 0 & F_1BG \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_1 & I \end{bmatrix}^{-1}\end{aligned} \quad (6)$$

より明らかのように、 G を F_1BG が安定行列になるように選ばなければならない³⁾。

その一つの選択は

$$G = -R^{-1}(F_1B)^T W \quad (7)$$

である。ここに、 F_1B は正則で²⁾、 R, W は任意の正定な

行列である。このとき、 $F_1 B G$ が安定行列であることは、それが

$$F_1 B G = W^{-1/2} [-W^{1/2} F_1 B R^{-1} \times (F_1 B)^T W^{1/2}] W^{1/2} \quad (8)$$

のように、負定行列の相似変換の形で表わせることによる。

安定化フィードバックゲイン F_0 が (1) 式の制御対象に対する最適レギュレータゲインに選ばれており、 R が評価関数の入力重み行列である場合、(7) 式のゲイン G は、(5) 式の制御系においてもある評価関数を最適レギュレータの意味で最小にするものである²⁾。

3. 積分補償ゲインに独立なロバスト安定性

Fig. 1 の 2 自由度制御系において (7) 式のゲイン G を選んだとき、制御対象にモデル化誤差が存在しない場合、(6) 式からわかるように、任意の正定な R と W について制御系は安定である。しかし、制御対象にモデル化誤差が存在して、行列 A, B, C が不確かな場合には、ゲイン G の選択によっては、制御系が不安定になる恐れがある。本章では、そのような不確かさについても、制御系が不安定にならず、ゲインに独立にロバスト安定であるための条件を与える。

いま、(1) 式の制御対象において、行列 A, B, C が不確かさを含み、外乱が加わるとして、つぎのように表わそう。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + \Delta A)x(t) + (B_0 + \Delta B)u(t) \\ &\quad + Dd(t) \\ y(t) &= (C_0 + \Delta C)x(t) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 A_0, B_0, C_0 は A, B, C の公称値を表わし、 $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ が不確かさを表わす。外乱は d で表わし、行列 D はその加わり方を表わす。本論文では、 $\Delta A, \Delta B, D$ がマッチング条件⁴⁾を満たすとはしない。

さて、(5) 式の 2 自由度積分型サーボ系は、不確かさが存在するときは

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)(F_0 + G F_1) \\ -(C_0 + \Delta C) \\ (B_0 + \Delta B)G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} (B_0 + \Delta B)H_0 \\ I \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= [C_0 + \Delta C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

と書ける。ここに、 F_0, F_1, H_0 は A, B, C の公称値から計算されたものである。すなわち、 F_0 は $A_0 + B_0 F_0$ を安定にし、

$$F_1 = C_0(A_0 + B_0 F_0)^{-1}$$

$$H_0 = [-C_0(A_0 + B_0 F_0)^{-1} B_0]^{-1} \quad (11)$$

である。(7) 式のゲイン G も公称値 B_0 について計算されたものを用いる。そして、簡単のため、 R を適当に固定し、

$$G = G_0 W, \quad G_0 = -R^{-1}(F_1 B_0)^T \quad (12)$$

といて、正定行列 W を可調整ゲインと考える。

いま、(10) 式の制御系のシステム行列の公称値 $\bar{A}_0(W)$ と不確かさ $\Delta \bar{A}(W)$ をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} \bar{A}_0 W &= \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 + B_0 G_0 W F_1 & B_0 G_0 W \\ -C_0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta \bar{A}(W) &= \begin{bmatrix} \Delta A + \Delta B F_0 + \Delta B G_0 W F_1 & \Delta B G_0 W \\ -\Delta C & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

そして、制御系の安定性を調べるため、2 次形式リアプノフ関数(の候補)を定義するものとしてつぎのような正定行列を考える。

$$\tilde{P}(W) = \begin{bmatrix} I & F_1^T \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_1 & I \end{bmatrix} \quad (14)$$

ここで、 P はリアプノフ不等式

$$P(A_0 + B_0 F_0) + (A_0 + B_0 F_0)^T P < 0 \quad (15)$$

の正定解とする。その存在性は、 $A_0 + B_0 F_0$ の安定性によって保証されている。

これらを使って、つぎの定理が与えられる。

【定理】 不等式

$$\tilde{P}(I) \bar{A}_0(I) + \bar{A}_0^T(I) \tilde{P}(I) < 0 \quad (16)$$

が成立するとする。そのとき、

$$\begin{aligned} \tilde{P}(I) [\bar{A}_0(I) + \Delta \bar{A}(I)] \\ + [\bar{A}_0(I) + \Delta \bar{A}(I)]^T \tilde{P}(I) < 0 \end{aligned} \quad (17)$$

を満たす任意の $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ に対し、(10) 式の 2 自由度積分型サーボ系は、任意の可調整ゲイン W に対して安定である。

(証明) (13) 式より

$$\begin{aligned} \bar{A}_0(W) + \Delta \bar{A}(W) \\ = [\bar{A}_0(I) + \Delta \bar{A}(I)] \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_1 + W F_1 & W \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

が成立する。また、(14) 式より、

$$\tilde{P}(W) = \begin{bmatrix} I & -F_1^T + F_1^T W \\ 0 & W \end{bmatrix} \tilde{P}(I) \quad (19)$$

が成り立つ。これらを使うと、(17) 式より、任意の $W > 0$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{P}(W) [\bar{A}_0(W) + \Delta \bar{A}(W)] \\ + [\bar{A}_0(W) + \Delta \bar{A}(W)]^T \tilde{P}(W) \\ = \begin{bmatrix} I & -F_1^T + F_1^T W \\ 0 & W \end{bmatrix} \\ \times \{ \tilde{P}(I) [\bar{A}_0(I) + \Delta \bar{A}(I)] + [\bar{A}_0(I) \\ + \Delta \bar{A}(I)]^T \tilde{P}(I) \} \end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & 0 \\ -F_1 + WF_1 & W \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

が得られる。したがって、(10)式の制御系がロバスト安定であると結論することができる。

(注意1) 定理のロバスト安定条件は、任意の大きさの積分補償ゲインに対して(10)式の2自由度サーボ系の安定性を保証する。したがって、非常に厳しい条件ではないかと推測されるかも知れない。しかし、(17)式は、表現からわかるように、基準とした1つのゲイン G_0 (それはハイゲインではない)について、標準的なリアプノフ型のアプローチを適用して得られるロバスト安定条件なのである。ゆえに、定理の条件の厳しさは、積分補償ゲインの任意性を前提としない場合のリアプノフ型のロバスト安定条件と同等であるといえる。定理の特徴は、 $\tilde{P}(I)$ によって定義される2自由度積分型サーボ系に適合したリアプノフ関数を用いている点である。

(注意2) 実際の制御対象のモデリングを考えると、ある実パラメータの不確かさが $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ の複数に同時に現われることも多い。定理では、そのような不確かさも適切に扱えるように、 $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ ごとの許容範囲ではなく、全体として満たすべき(17)式のロバスト安定条件を与えた。不確かさ $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ が許される範囲をもっと陽に知りたければ、保守的になるが以下のように与えることができる。すなわち、

$$\tilde{Q} = -[\tilde{P}(I)\tilde{A}_0(I) + \tilde{A}_0^T(I)\tilde{P}(I)] \quad (21)$$

とおいたとき、

$$\|\Delta \tilde{A}(I)\| < \frac{\lambda_{\min} \tilde{Q}}{2\lambda_{\max} \tilde{P}(I)} \quad (22)$$

であれば、(17)式が成立する。ここに、ノルムは最大特異値であり、 $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ はそれぞれ最小固有値、最大固有値を表わす。(22)式より、

$$\begin{aligned} & \|\Delta A\| + \|[F_0 + G_0 F_1 \ G_0]\| \|\Delta B\| + \|\Delta C\| \\ & < \frac{\lambda_{\min} \tilde{Q}}{2\lambda_{\max} \tilde{P}(I)} \end{aligned} \quad (23)$$

であれば、(17)式が成立することがいえる。

ここで、定理の前提となる(16)式を成立させるような、(12)式の積分補償ゲイン G_0 が常に存在することを示そう。(16)式は(21)式の $\tilde{Q}$ が正定であることと等価である。行列

$$\tilde{P}(I) = \begin{bmatrix} P + F_1^T F_1 & F_1^T \\ F_1 & I \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\tilde{A}_0(I) = \begin{bmatrix} A_0 + B_0 F_0 + B_0 G_0 F_1 & B_0 G_0 \\ -C_0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

を使って、この $\tilde{Q}$ を

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (26)$$

のようにブロックに分割して表わせば、各ブロックは

$$\begin{aligned} Q_{11} &= -P(A_0 + B_0 F_0) - (A_0 + B_0 F_0)^T P \\ &\quad - PB_0 G_0 F_1 - (PB_0 G_0 F_1)^T \\ &\quad - F_1^T F_1 B_0 G_0 F_1 - (F_1^T F_1 B_0 G_0 F_1)^T \\ Q_{12} &= -PB_0 G_0 - F_1^T F_1 B_0 G_0 \\ &\quad - (F_1 B_0 G_0 F_1)^T \\ Q_{21} &= -(PB_0 G_0)^T - (F_1^T F_1 B_0 G_0)^T \\ &\quad - F_1 B_0 G_0 F_1 \\ Q_{22} &= -F_1 B_0 G_0 - (F_1 B_0 G_0)^T \end{aligned} \quad (27)$$

である。ここで、(12)式の $G_0 = -R^{-1}(F_1 B_0)^T$ を用いると、 $F_1 B_0$ が正則だから²⁾、 Q_{22} は正定である。したがって、 $\tilde{Q}$ の正定性は

$$\begin{aligned} & Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21} \\ &= -P(A_0 + B_0 F_0) - (A_0 + B_0 F_0)^T P \\ &\quad - (1/2) PB_0 R^{-1} B_0^T P \end{aligned} \quad (28)$$

の正定性と等価になる。

これが正定になるには、右辺第1項と第2項の和((15)式より正定)に比べて、第3項(半負定)が十分に小さければよい。そのためには、 R を適当に大きく選べばよいことは明らかである。したがって、(16)式を成立させる積分補償ゲイン G_0 は常に存在する。

(16)式を成立させる積分補償ゲイン G_0 の存在性に関する以上の議論は、フィードバックゲイン F_0 を (A_0, B_0) の組に対する任意の安定化ゲインとした場合であった。もし F_0 として最適レギュレータ理論から得られたものを選べば、

$$F_0 = -R^{-1} B_0^T P \quad (29)$$

であり、そのとき、 P はリカッチ方程式

$$PA_0 + A_0^T P - PB_0 R^{-1} B_0^T P + Q = 0 \quad (30)$$

を満たす半正定解である。特に、評価関数の状態重み行列 Q を正定に選べば、 P は正定になる。この場合、(28)式の右辺は $Q + (1/2) PB_0 R^{-1} B_0^T P$ になるから、必ず正定であり、(16)式が成立する。

4. 積分補償のハイゲイン化と過渡応答特性

前章では、制御対象のモデル化誤差が(17)式を満たす範囲であるとき、積分補償に対する可調整ゲイン W をどのような正定行列に選んでも、(10)式の2自由度積分型サーボ系がロバスト安定であることを示した。積分補償は定常状態での制御誤差を零にするように働くものであるから、そのハイゲイン化は定常状態への整定時間を短縮することを期待させる。そこで、本章では、参照信号や外乱に対する応答が、積分補償のハイゲイン化のもとでどのようになるか考察する。

いま、(17)式が成立していることを前提に、(10)式のサーボ系に対して、座標変換

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F_1 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

をほどこすと,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)F_0 \\ F_1(\Delta A + \Delta BF_0) - \Delta C \\ (B_0 + \Delta B)G_0W \\ F_1(B_0 + \Delta B)G_0W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (B_0 + \Delta B)H_0 \\ F_1\Delta BH_0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} D \\ F_1D \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= [C_0 + \Delta C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。ここで、ある正定行列 $\tilde{W}$ と正の実数 μ を用いて

$$W = (1/\mu)\tilde{W} \quad (33)$$

とおき、 μ を 0 へ近付けるとによって、ゲイン W を大きくしたときの制御系の振舞いを、特異摂動法⁹⁾により解析しよう。そのために、

$$\tilde{z}(t) = (1/\mu)z(t) \quad (34)$$

とおけば、(32)式はつぎのように書き直される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \mu\dot{\tilde{z}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)F_0 \\ F_1(\Delta A + \Delta BF_0) - \Delta C \\ (B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W} \\ F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (B_0 + \Delta B)H_0 \\ F_1\Delta BH_0 \end{bmatrix} r(t) + \begin{bmatrix} D \\ F_1D \end{bmatrix} d(t) \\ y(t) &= [C_0 + \Delta C \quad 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{z}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

ところで、(17)式の不等式の(2, 2)ブロックは

$$F_1(B_0 + \Delta B)G_0 + [F_1(B_0 + \Delta B)G_0]^T < 0 \quad (36)$$

であるから、

$$\begin{aligned} &\tilde{W}[F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}] \\ &+ [F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}]^T \tilde{W} < 0 \end{aligned} \quad (37)$$

が成立する。これは $F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}$ をシステム行列、 $\tilde{W}$ を正定解とするリアプノフ不等式とみることができる。したがって、 $F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}$ は安定行列である。ゆえに、(35)式のシステム内の速いサブシステムは安定であり、

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{z}}(t) &= -[F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}]^{-1} \\ &\cdot \{[F_1(\Delta A + \Delta BF_0) - \Delta C]x(t) \\ &+ F_1\Delta BH_0r(t) + F_1Dd(t)\} \end{aligned} \quad (38)$$

とおくと、遅いサブシステムは

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)F_0]x(t) \\ &+ (B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}\tilde{z}(t) \\ &+ (B_0 + \Delta B)H_0r(t) + Dd(t) \\ &= [A_0 + \Delta A + (B_0 + \Delta B)F_0 \\ &- (B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}[F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}]^{-1} \\ &\cdot [F_1(\Delta A + \Delta BF_0) - \Delta C]]x(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \{(B_0 + \Delta B)H_0 - (B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W} \\ &\cdot [F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}]^{-1}F_1\Delta BH_0\}r(t) \\ &+ [D - (B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}[F_1(B_0 + \Delta B)G_0\tilde{W}]^{-1} \\ &\cdot F_1D]d(t) \\ y(t) &= (C_0 + \Delta C)x(t) \end{aligned} \quad (39)$$

と表わすことができる⁹⁾。この式を適当に整理すると、行列 A, B, C の不確かさ $\Delta A, \Delta B, \Delta C$ が定理の(17)式の条件を満たす範囲にあるとき、(10)式の2自由度積分型サーボ系の振舞いは、積分補償の可調整ゲイン W を大きくするとともに、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + B_0F_0)x(t) + B_0H_0r(t) \\ &+ [I - (B_0 + \Delta B)[F_1(B_0 + \Delta B)]^{-1}F_1] \\ &\cdot [\{\Delta A + \Delta BF_0\}x(t) + \Delta BH_0r(t) + Dd(t)] \\ &+ (B_0 + \Delta B)[F_1(B_0 + \Delta B)]^{-1}\Delta Cx(t) \\ y(t) &= (C_0 + \Delta C)x(t) \end{aligned} \quad (40)$$

の振舞いに近付くということができる。この(40)式は、未知である不確かさや外乱を含んでいる。したがって、一般にそれらに依存し、一意ではない。しかし、不確かさや外乱のクラスが与えられれば、その代表的ないくつかの値について計算することによって、振舞いの概容を知することは容易である。

ここで、もし不確かさを表わす行列 $\Delta A, \Delta B$ と外乱の加わり方を表わす行列 D がマッチング条件

$$\begin{aligned} \text{Range } \Delta A &\subset \text{Range } B_0, \text{Range } \Delta B \subset \text{Range } B_0 \\ \text{Range } D &\subset \text{Range } B_0 \end{aligned} \quad (41)$$

を満たし、 $\Delta C = 0$ ならば、(40)式が

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_0 + B_0F_0)x(t) + B_0H_0r(t) \\ y(t) &= C_0x(t) \end{aligned} \quad (42)$$

となるのが容易にいえる。この事実、 $\Delta B = 0$ の場合について、著者らが文献²⁾で述べている。ここでは、 B 行列が不確かでも同様のことがいえたことに注意しよう。

この結果は、マッチング条件のもとで、積分補償のハイゲイン化により、(10)式のサーボ系の振舞いが、公称系に対する積分補償を含まない追従系⁹⁾の振舞いに一致することを意味している。(42)式は制御対象の不確かさに独立であるから、この場合は、過渡応答もロバストであるといえる。その振舞いは、制御対象にモデル化誤差や外乱が存在しない場合の2自由度サーボ系の振舞いでもある⁹⁾。しかし、マッチング条件が満たされない場合や $\Delta C \neq 0$ の場合は、次章の例でも示すように、(40)式の振舞いは(42)式にならない。

なお、積分補償のハイゲイン化とともに、操作入力

$$\begin{aligned} u(t) &= \{F_0 - [F_1(B_0 + \Delta B)]^{-1} \\ &\cdot [F_1(\Delta A + \Delta BF_0) - \Delta C]\}x(t) \\ &+ \{H_0 - [F_1(B_0 + \Delta B)]^{-1}F_1\Delta BH_0\}r(t) \end{aligned}$$

$$-[F_1(B_0 + \Delta B)]^{-1} F_1 D d(t) \quad (43)$$

に近付くことが上と同様の計算でいえる。これを(40)式と合わせると、積分補償のハイゲイン化によっても操作入力が増大する恐れがないことがわかる。

5. 数 値 例

以上で、2自由度積分型サーボ系では、制御対象のモデル化誤差が(17)式を満たす範囲である場合には、可調整ゲイン W をいくらでも大きくすることができ、そのとき、サーボ系の過渡応答が(40)式の振舞いに収束することがわかった。ここでは、数値例でそれを具体的に見てみよう。

対象システムの行列 A, B, C は

$$A = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.02 & 0.020 & -0.50 \\ 0.05 & -1.01 & 0.002 & -4.02 \\ 0.10 & 0.29 + a_1 & -1.710 & 1.3 + a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.18 \\ 3.05 + b_1 & -7.6 \\ -5.52 & 4.9 + b_2 \\ b_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 + c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

とする⁷⁾。ここで、 $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1$ は不確かさを表わすパラメータであって、それらの公称値は0である。この不確かさはマッチング条件を満たさない。以下では、それらの値が、

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.22, \quad a_2 = 1.2, \quad b_1 = 1.1 \\ b_2 &= -1.5, \quad b_3 = -0.5, \quad c_1 = 0.5 \end{aligned} \quad (45)$$

である場合の応答により、可調整ゲイン W がもつ制御効果を検討する。ただし、簡単のため、外乱はないものとする。

ここでは、制御対象を安定化するフィードバックゲイン F_0 は、最適レギュレータ理論から得られたものを

いることにする。いま、評価関数の重み行列 R と Q を

$$R = \text{diag} \{10, 15\}, \quad Q = \text{diag} \{10, 15, 10, 5\} \quad (46)$$

と選んだとき、(30)式のリカッチ方程式の正定解 P は

$$P = \begin{bmatrix} 19.088 & 0.316 & 0.034 & -7.488 \\ 0.316 & 2.380 & 1.083 & -0.184 \\ 0.034 & 1.083 & 1.994 & 1.459 \\ -7.488 & -0.184 & 1.459 & 14.417 \end{bmatrix} \quad (47)$$

となる。ただし、小数点以下4桁目で四捨五入している。このとき、

$$F_0 = \begin{bmatrix} -0.917 & -0.142 & 0.767 & 1.191 \\ -0.080 & 0.842 & -0.115 & -0.489 \end{bmatrix} \quad (48)$$

であり、これを用いると、(11)式から F_1 と H_0 は、

$$F_1 = \begin{bmatrix} -2.006 & -0.024 & 0.007 & 0.795 \\ 0.030 & -0.179 & -0.078 & 0.061 \end{bmatrix}$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0.994 & 0.152 \\ 0.107 & -1.003 \end{bmatrix} \quad (49)$$

と計算される。そして、(12)式のゲイン G は、

$$G = G_0 W$$

$$= \begin{bmatrix} 0.099 & 0.011 \\ 0.010 & -0.065 \end{bmatrix} W \quad (50)$$

と書ける。

このとき、3章で述べたように、必ず(16)式が成立する。そして、(45)式のパラメータに対して、(17)式が成立することがいえて、定理より、 W の大きさにかかわらず、2自由度サーボ系のロバスト安定性がいえる。

それでは、ステップ状の参照信号に対する制御出力のシミュレーション結果を示そう。ここに、参照信号は $r_t = [0.6 \ 1]^T$ とする。また、制御対象の初期状態 x_0 と積分器の初期値 w_0 はともに0とする。可調整ゲイン W は簡単のため $W = \alpha I$ とする。

まず、 $\alpha=1$ としたときの制御出力 y の応答を Fig. 2 (a) の実線で示す。なお、長い破線は制御対象にモデル化誤差がないときの応答を表わし、短い破線は(40)式の振舞いである。また、同図(b)は操作入力 u の振舞いで

(a) Controlled outputs

(b) Control inputs

Fig. 2 Step Responses ($\alpha=1$)

Fig. 3 Step Responses ($\alpha=10$) Fig. 4 Step Responses ($\alpha=100$)

ある。

つぎに、 W を大きくしたときの効果を見るために、 α を 10, 100 としてみよう。このときの制御出力の応答と操作入力の振舞いを Fig. 3, Fig. 4 に示す。制御出力の過渡応答(実線)は、制御対象にモデル化誤差がない場合の応答(長い破線)ではなく、(40)式の振舞い(短い破線)に収束することがわかる。つまり、モデル化誤差の影響は過渡応答から除去されない。しかし、可調整ゲイン W をハイゲイン化することによって定常状態への整定時間は期待通り短くなっている。なお、 W をハイゲイン化しても、操作入力とは過大になっていない。

6. おわりに

本論文では、2 自由度積分型サーボ系が、積分補償のゲインをある形に選んだとき、その大きさにかかわらずロバスト安定であるための条件を与え、ハイゲイン化のもとでの過渡応答の振舞いを明らかにした。それによると、制御対象のモデル化誤差や定値外乱がマッチング条件を満たさない場合や、制御出力の係数行列にモデル化誤差が存在する場合には、過渡応答からモデル化誤差や外乱の影響を完全に取り除くことはできない。しかし、積分補償のハイゲイン化は、制御出力の定常状態への整定時

間の短縮に効果があると期待できることが、シミュレーションによりいえた。

参考文献

- 1) 古田, 原: サーボ技術と現代制御論, 計測と制御, **19**-10, 953/961(1980)
- 2) 藤崎, 池田: 2 自由度積分型最適サーボ系の構成, 計測自動制御学会論文集, **27**-8, 907/914(1991)
- 3) 萩原, 大谷, 荒木: 2 自由度 LQI サーボ系の設計法, システム制御情報学会論文誌, **4**-12, 501/510(1991)
- 4) B. R. Barmish, M. Corless and G. Leitmann: A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, SIAM J. Control and Optimization, **21**-2, 246/255(1983)
- 5) P. V. Kokotovic, R. E. O'Malley, Jr. and P. Sannuti: Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory-An Overview, Automatica, **12**-2, 123/132(1976)
- 6) 藤崎, 池田: 2 自由度積分型サーボ系における感度改善, 計測自動制御学会論文集, **28**-9, 1135/1137(1992)
- 7) O. I. Kosmidou: Robust Stability and Performance of Systems with Structured and Bounded Uncertainties: An Extension of Guaranteed Cost Control Approach, Int. J. Control, **52**-3, 627/640(1990)

[著者紹介]

金 英 福 (学生会員)

1991年韓国釜山水産大学大学院修士課程修了, 同年釜山水産大学機関工学科助手. 92年神戸大学大学院工学研究科研究生, 93年同大学大学院自然科学研究科システム科学専攻博士後期課程に入学し, 現在に至る. ロバスト制御, サーボ系の研究に興味をもつ. システム制御情報学会の学生会員.

藤 崎 泰 正 (正会員)

1988年, 神戸大学大学院工学研究科システム工学専攻修士課程修了. 同年(株)神戸製鋼所入社, 電子技術研究所に配属, 91年神戸大学工学部に勤務. 現在, 情報知能工学科助手, ロバスト制御, 最適サーボ系などの研究に従事. 博士(工学). システム制御情報学会, IEEEなどの会員. 88年度計測自動制御学会学術奨励賞受賞.

池 田 雅 夫 (正会員)

1971年大阪大学大学院工学研究科通信工学専攻修士課程修了. 73年同博士課程を中途退学して, 神戸大学工学部システム工学科(現在, 情報知能工学科)助手. 90年同教授. 95年大阪大学工学部電子制御機械工学科教授. この間, 78-79年サンタクララ大学客員研究員, 86-89年航空宇宙技術研究所客員研究官を兼務. 制御理論とその応用の教育と研究に従事. 工学博士. 89年, 95年本会論文賞, 93年論文賞・蓮沼賞を受賞, システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEEなどの会員.